Formelsammlung Algebra

http://www.fersch.de

14. Mai 2017

Inhaltsverzeichnis

1 Algebra

1.1 Grundlagen

1.1.1 Mengen

Definition

Ein Menge (Großbuchstaben) besteht aus unterscheidbaren Elementen.

$\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C}$

Mengen in aufzählender Form

$\mathbb{A} = \{a; b; c\}$

$\mathbb{A} = \{1; 2; 3; 4\}$
$\mathbb{B} = \{-2; 0,4; \sqrt{3}\}$

Mengen in beschreibender Form

$\mathbb{M} = \{x | x \text{ hat die Eigenschaft E}\}$

$\mathbb{M}_1 = \{x | x \text{ Menge aller Primzahlen}\}$
$\mathbb{M}_2 = \{x | x \text{ alle natürlichen Zahlen, die größer als 2 sind}\}$

$\in$ Element - $\notin$ nicht Element

$\mathbb{M} = \{a; b; c\}$
$b \in \mathbb{M}$
$e \notin \mathbb{M}$

$\mathbb{A} = \{1; 2; 3; 4\}$
$2 \in \mathbb{A}$
$5 \notin \mathbb{A}$

$\subset$ Teilmenge - $\not\subset$ nicht Teilmenge

$\mathbb{A} = \{a; b; c; d; e\}$
$\mathbb{B} = \{b; c\}$
$\mathbb{C} = \{b; c; f\}$
$\mathbb{B} \subset \mathbb{A}$ Jedes Element von B ist auch Element von A
$\mathbb{C} \not\subset \mathbb{A}$ Nicht jedes Element von C ist auch Element von A

$\mathbb{A} = \{1; 2; 3; 4\}$
$\{1; 4\} \subset \mathbb{A}$
$\{1; 4; 5\} \not\subset \mathbb{A}$

Gleichheit $A = B$

$\mathbb{A} = \{a; b; c; d; e\}$
$\mathbb{B} = \{a; b; c; d; e\}$
$\mathbb{A} = \mathbb{B}$ Jedes Element von $\mathbb{A}$ ist auch Element von $\mathbb{B}$
Jedes Element von $\mathbb{B}$ ist auch Element von $\mathbb{A}$

$\mathbb{A} = \{-3; 0; 1; 4; 12\}$
$\mathbb{B} = \{-3; 0; 1; 4; 12\}$
$\mathbb{A} = \mathbb{B}$

Leere Menge $\{\}$

$\mathbb{A} = \{\} = \emptyset$
Menge A enthält keine Elemente

1.1.2 Mengenoperationen

Schnittmenge $\cap$

$\mathbb{A} = \{c; d; e\}$
$\mathbb{B} = \{a; b; c; d\}$
$\mathbb{A} \cap \mathbb{B} = \{c; d\}$
Alle Elemente die in A und zugleich in B enthalten sind.

$\mathbb{A} = \{2; 7; 8; 12; 15\}$
$\mathbb{B} = \{1; 8; 12; 24\}$
$\mathbb{A} \cap \mathbb{B} = \{8; 12\}$
$\{4; 5; 23\} \cap \{0; 1; 4; 5; 12\} = \{4; 5\}$

Vereinigungsmenge $\cup$

$\mathbb{A} = \{c; d; e\}$
$\mathbb{B} = \{a; b; c; d\}$
$\mathbb{A} \cup \mathbb{B} = \{a; b; c; d; e\}$
Alle Elemente die in A oder B enthalten sind.

$\mathbb{A} = \{2; 7; 8; 12; 15\}$
$\mathbb{B} = \{1; 8; 12; 24\}$
$\mathbb{A} \cup \mathbb{B} = \{1; 7; 8; 12; 15; 24\}$
$\{4; 5; 23\} \cup \{0; 1; 4; 5; 12\} = \{0; 1; 4; 5; 12; 23\}$

Differenz $\smallsetminus$

$\mathbb{A} = \{c; d; e\}$
$\mathbb{B} = \{a; b; c; d\}$
$\mathbb{A} \smallsetminus \mathbb{B} = \{e\}$
Alle Elemente die in A, aber nicht in B enthalten sind.

$\mathbb{A} = \{2; 7; 8; 12; 15\}$
$\mathbb{B} = \{1; 8; 12; 24\}$
$\mathbb{A} \smallsetminus \mathbb{B} = \{2; 7; 15\}$
$\{4; 5; 23\} \smallsetminus \{0; 1; 4; 5; 12\} = \{23\}$

1.1.3 Zahlenmengen

Natürlichen Zahlen

$\mathbb{N} = \{1; 2; 3; 4; \ldots\}$

$3 \in \mathbb{N} \qquad -3 \notin \mathbb{N}$
$0 \notin \mathbb{N} \qquad 0,2 = \frac{1}{5} \notin \mathbb{N}$

Natürlichen Zahlen und Null

$\mathbb{N}_0 = \{0; 1; 2; 3; 4; \ldots\}$
$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$
$\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0$

$3 \in \mathbb{N}_0 \qquad -3 \notin \mathbb{N}_0$
$0 \in \mathbb{N}_0 \qquad 0,2 = \frac{1}{5} \notin \mathbb{N}_0$

Ganzen Zahlen

$\mathbb{Z} = \{\ldots; -2; -1; 0; 1; 2; \ldots\}$
$\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z}$

$3 \in \mathbb{Z} \qquad -3 \in \mathbb{Z}$
$0 \in \mathbb{Z} \qquad 0,2 = \frac{1}{5} \notin \mathbb{Z}$

Rationalen Zahlen

Rationale Zahlen $\mathbb{Q}$ sind
- Bruchzahlen
- endliche Dezimalzahlen
- unendliche periodische Dezimalzahlen

$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} | p \in \mathbb{Z} \wedge q \in \mathbb{N} \right\}$
$\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

$-3\frac{3}{7} \in \mathbb{Q} \qquad 3 \in \mathbb{Q} \qquad -3 \in \mathbb{Q} \qquad \sqrt{2} \notin \mathbb{Q} \qquad 0 \in \mathbb{Q}$
Jede endliche Dezimalzahl lässt sich durch einen Bruch darstellen.
$0,223 = \frac{223}{100} \in \mathbb{Q} \qquad 0,2 = \frac{1}{5} \in \mathbb{Q}$
Jede unendliche periodische Dezimalzahl lässt sich durch einen Bruch darstellen.
$0,3333... = 0,\overline{3} = \frac{1}{3} \in \mathbb{Q} \qquad 0,535353.. = 0,\overline{53} = \frac{53}{99} \in \mathbb{Q}$
$\mathbb{Q}^+$ = positve rationale Zahlen
$\mathbb{Q}_0^+$ = positve rationale Zahlen und Null
$\mathbb{Q}^-$ = negative rationale Zahlen
$\mathbb{Q}_0^-$ = negative rationale Zahlen und Null
$\mathbb{Q} \setminus \{3,4\}$ = rationale Zahlen ohne 3 und 4
$\mathbb{Q} \setminus [-3;5]$ = rationale Zahlen ohne 3 und 4 und ohne den Bereich zwischen 3 und 4
$\mathbb{Q} \setminus]-3;5[$ = rationale Zahlen ohne den Bereich zwischen 3 und 4

Irrationale Zahlen

Irrationale Zahlen $\mathbb{I}$ sind unendliche nicht periodische Dezimalzahlen.

Kreiszahl $\pi = 3,1415926535.. \in \mathbb{I}$
Eulersche Zahl $e = 2,7182818284.. \in \mathbb{I}$
$\sqrt{2} \in \mathbb{I}$ $\quad \sqrt{3} \in \mathbb{I}$ $\quad \sqrt{4} = 2 \notin \mathbb{I}$ $\quad 3 \notin \mathbb{I}$ $\quad -0,3 \notin \mathbb{I}$

Reellen Zahlen

Reelle Zahlen $\mathbb{R}$ sind
- rationale Zahlen $\mathbb{Q}$
- irrationale Zahlen $\mathbb{I}$

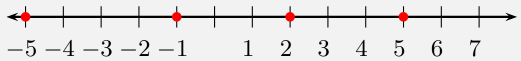
$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$
$\mathbb{R} = \{$jeder Punkt auf dem Zahlenstrahl$\}$
$\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

Kreiszahl $\pi = 3,1415926535.. \in \mathbb{R}$
Eulersche Zahl $e = 2,7182818284.. \in \mathbb{R}$
$-3\frac{3}{7} \in \mathbb{R}$ $\quad \sqrt{2} \in \mathbb{R}$ $\quad \sqrt{3} \in \mathbb{R}$
$\sqrt{4} = 2 \in \mathbb{R}$ $\quad 3 \in \mathbb{R}$ $\quad -0,3 \in \mathbb{R}$
$\sqrt{-4} \notin \mathbb{R}$
$\mathbb{R}^+$ = positve reelle Zahlen
$\mathbb{R}_0^+$ = positve reelle Zahlen und Null
$\mathbb{R}^-$ = negative reelle Zahlen
$\mathbb{R}_0^-$ = negative reelle Zahlen und Null
$\mathbb{R} \setminus \{3,4\}$ = reelle Zahlen ohne 3 und 4
$\mathbb{R} \setminus [-3;5]$ = reelle Zahlen ohne 3 und 4 und ohne den Bereich zwischen 3 und 4
$\mathbb{R} \setminus]-3;5[$ = reelle Zahlen ohne den Bereich zwischen 3 und 4

Vergleichszeichen

$a = b$	a ist gleich b
$a \neq b$	a ist ungleich b
$a < b$	a ist kleiner als b
$a > b$	a ist größer als b
$a \leq b$	a ist kleiner oder gleich b
$a \geq b$	a ist größer oder gleich b

$3 + 4 = 7$ $\quad 3 + 4 \neq 8$



$-5 < -1$ $\quad -1 > -5$ $\quad 2 > -1$ $\quad 2 < 5$
$5 \leqq 5$ $\quad 7 \geqq 5$

1.1.4 Primfaktoren - ggT - kgV

Primzahlen

Eine Primzahl ist eine ganze Zahl, die nur durch eins und sich selbst teilbar ist.

Primzahlen:
$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43,$
$47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107.....$

Primfaktorenzerlegung

Zerlegung einer natürlichen Zahl als Produkt aus Primzahlen.

$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$
$120 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$
$340 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 17$

Teilbarkeitsregeln

Eine Zahl ist durch ...
2 teilbar, wenn ihre letzte Ziffer eine 2, 4, 6, 8 oder 0 ist.
3 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 3 teilbar ist.
4 teilbar, wenn ihre letzten 2 Stellen durch 4 teilbar sind.
5 teilbar, wenn ihre letzte Stelle eine 5 oder eine 0 ist.
6 teilbar, wenn sie durch 2 und durch 3 teilbar ist.
8 teilbar, wenn ihre letzten 3 Stellen durch 8 teilbar sind.
9 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 9 teilbar ist.
10 teilbar, wenn ihre letzte Stelle eine 0 ist.
12 teilbar, wenn sie durch 3 und durch 4 teilbar ist.
15 teilbar, wenn sie durch 3 und durch 5 teilbar ist.
18 teilbar, wenn sie durch 2 und durch 9 teilbar ist.
Die Quersumme einer Zahl, ist die Summe ihrer Ziffern.

$5|45$ 5 ist Teiler von 45
$3|123$ 3 ist Teiler von 123
Quersumme von 123: $1+2+3=6$
$3|6 \Rightarrow 3|123$

Vielfachmenge V(a)

Alle Vielfachen von einer natürlichen Zahl a.

$V(4) = \{4; 8; 12; 16; 20; 24; 28; 32; 36; 40; 44; 48..\}$
$V(6) = \{6; 12; 18; 24; 30; 36; 42; 48; 54; 60; 66; 72; 78; 84..\}$
$V(3) = \{3; 6; 9; 12; 15; 18; 21; 24; 27; 30; 33; 36; 39; 42; 45..\}$

Teilermenge T(a)

Alle ganzzahligen Teiler einer Zahl a.

$T(36) = \{1; 2; 3; 4; 6; 9; 12; 18; 36\}$
$T(24) = \{1; 2; 3; 4; 6; 8; 12; 24\}$
$T(42) = \{1; 2; 3; 6; 7; 14; 21; 42\}$

Größter gemeinsamer Teiler ggT(a,b)

Methode 1: Aus den Teilermengen von a und b den größten Teiler ablesen
Methode 2: Das Produkt der gemeinsamen Primfaktoren bilden.

ggT$(12; 18) = 6$
Aus den Teilermengen den größten Teiler ablesen
T(12)={1;2;3;4;6;12} T(18)={1;2;3;6;9;18}
Gemeinsame Primfaktoren von 12 und 18

12	2	2	3	
18	2		3	3
ggT(12; 18)	2		3	

ggT$(12; 18) = 2 \cdot 3 = 6$

Kleinstes gemeinsames Vielfaches kgV(a,b)

Methode 1: Aus den Vielfachmengen von a und b das kleinste Vielfache ablesen.
Methode 2: Das Produkt aller Primfaktoren von a und den zusätzlichen Primfaktoren von b bilden.

kgV$(12; 18) = 36$
Aus den Vielfachmengen das kleinste Vielfache ablesen
V(12)={12;24;36;48;60;72.. } V(18)={18;36;54;72;90..}
Primfaktoren von 12 und zusätzlichen Primfaktoren von 18

12	2	2	3	
18	2		3	3
kgV(12; 18)	2	2	3	3

kgV$(12; 18) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 36$

Interaktive Inhalte: $ggT(a,b)$ $kgV(a,b)$ - $ggT(a,b,c)$ $kgV(a,b,c)$ -

1.1.5 Grundrechnungen

Addition

a	+	b	=	c
1.Summand	+	2.Summand	=	Summe

$3+2=5$
$2x+3x=5x$
$2x^2+3x^2=5x^2$
$5x^2y+7x^2y=12x^2y$
$2xy+3xy+4z+5z=5xy+9z$

Subtraktion

a	-	b	=	c
Minuend	-	Subtrahend	=	Differenz

$3-2=1$
$3x-2x=x$
$2x^2-3x^2=-x^2$
$5x^2y-7x^2y=-2x^2y$
$3e^x-2e^x=e^x$

Multiplikation

a	·	b	=	c
1.Faktor	·	2.Faktor	=	Produkt

$3\cdot 2=6$
$2x\cdot 3x=6x^2$
$2x^2\cdot 3x^2=6x^4$
$5x^2y\cdot 7x^2y=35x^4y$
$2xy\cdot 3xy\cdot 4z\cdot 5z=120x^2y^2z^2$

Division

a	:	b	=	c
Dividend	:	Divisor	=	Quotient

$\frac{a}{b}=c \qquad \frac{\text{Dividend}}{\text{Divisor}}=\text{Quotient}$

$12:3=4$
$\frac{12}{3}=4$

1.1.6 Grundrechenregeln

Kommutativgesetz

$a\cdot b=b\cdot a$
$a+b=b+a$

$3+2=2+3=5$
$2x+3x=3x+2x=5x$
$3\cdot 2=2\cdot 3=6$
$2x\cdot 3x=3x\cdot 2x=6x^2$

Assoziativgesetz

$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$
$(a+b)+c=a+(b+c)$

$4+(3+2)=(4+3)+2=9$
$4x+(3x+2x)=(4x+3x)+2x=9x$
$4\cdot(3\cdot 2)=(4\cdot 3)\cdot 2=24$
$4x\cdot(3x\cdot 2x)=(4x\cdot 3x)\cdot 2x=24x^3$

Distributivgesetz

$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$

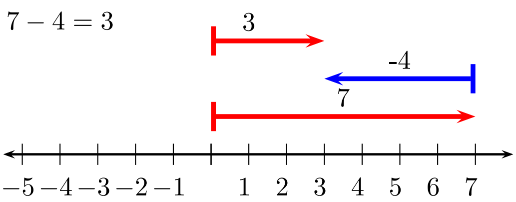
$3\cdot(2+5)=3\cdot 2+3\cdot 5=21$
$3\cdot(2x+5)=3\cdot 2x+3\cdot 5=6x+15$
$3x\cdot(2x+5)=3x\cdot 2x+3x\cdot 5=6x^2+15x$

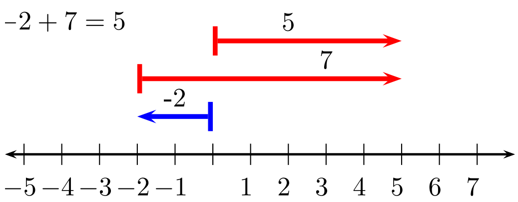
Reihenfolge der Rechenarten

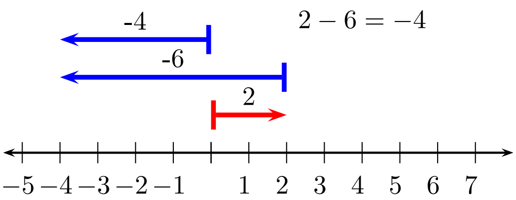
- Klammern vor
- Potenzierung vor
- Punktrechnung (Mulitiplikation und Division) vor
- Strichrechnung (Addition und Subtraktion)
- von links nach rechts

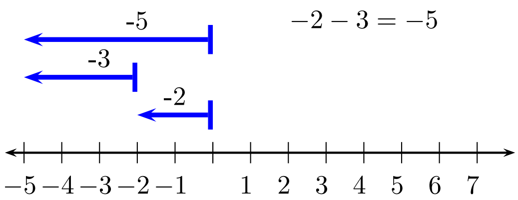
$100-40-5\cdot(42-5\cdot 2^3)^2$	
Innerhalb der Klammer Potenzierung:	$100-40-5\cdot(42-5\cdot 8)^2$
Innerhalb der Klammer Punktrechnung:	$100-40-5\cdot(42-40)^2$
Innerhalb der Klammer Strichrechnung:	$40-5\cdot(42-40)^2$
Potenzierung:	$100-40-5\cdot 2^2$
Punktrechung:	$100-40-5\cdot 4$
von links nach rechts:	$100-40-20$
Ergebnis:	$60-20=40$

1.1.7 Vorzeichenregel









Vorzeichen und Klammern

$+(+a)=+a$
$+(-a)=-a$
$-(+a)=-a$
$-(-a)=+a$

$+(+2)=+2$
$-(-2)=+2$
$+(-2)=-2$
$-(+2)=-2$

Multiplikation

$+a\cdot(+b)=+c$
$-a\cdot(-b)=+c$
$+a\cdot(-b)=-c$
$-a\cdot(+b)=-c$

$+3\cdot(+2)=+6$
$-3\cdot(-2)=+6$
$+3\cdot(-2)=-6$
$-3\cdot(+2)=-6$

Division

$\frac{+a}{+b}=+c$
$\frac{-a}{-b}=+c$
$\frac{+a}{-b}=-c$
$\frac{-a}{+b}=-c$

$\frac{+6}{+3}=+2$
$\frac{-6}{-3}=+2$
$\frac{+6}{-3}=-2$
$\frac{-6}{+3}=-2$

Addition und Subtraktion

Bei gleichem Vorzeichen werden die Beträge addiert. Das Ergebnis erhält das gemeinsame Vorzeichen.
Bei verschiedenem Vorzeichen werden die Beträge subtrahiert. Das Ergebnis erhält das Vorzeichen der Zahl mit dem größerem Betrag.

$10 + 4 = 14$
$-10 - 4 = -(10 + 4) = -14$
$10 - 4 = 6$
$-10 + 6 = -(10 - 6) = -4$
$3x + 4x = 7x$
$-3x - 4x = -(3x + 4x) = -7x$
$3x - 4x = -(4x - 3x) = -x$
$-3x + 4x = 4x - 3x = x$

Betrag einer Zahl

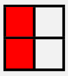
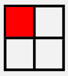
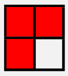
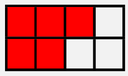
$$|x| = \begin{cases} x & x > 0 \\ -x & x < 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$|-3| = 3$
$|3| = 3$

1.1.8 Brüche

Bruch

Dividend : Divisor = Quotient
$\frac{\text{Dividend}}{\text{Divisor}} = \frac{\text{Zähler}}{\text{Nenner}} = \frac{Z}{N}$=Wert des Bruchs

 $= \frac{1}{2}$  $= \frac{1}{4}$  $= \frac{3}{4}$  $= \frac{5}{8}$

Besondere Brüche

- Echter Bruch: Nenner größer als Zähler
- Unechter Bruch:Zähler größer als Nenner
- Gemischte Zahl: Ganze Zahl + Bruch
- Stammbrüche: Zähler ist 1
- Gleichnamige Brüche: Nenner ist gleich
- Ungleichnamige Brüche:Nenner ist verschieden
- Kehrwert:Zähler und Nenner vertauschen
- Scheinbrüche:Scheinbrüche sind natürliche Zahlen

Echter Bruch:$\frac{2}{4}; \frac{5}{7}; \frac{1}{3}$

Unechter Bruch:$\frac{20}{4}; \frac{15}{7}; \frac{8}{3}$

Gemischte Zahl:$2\frac{2}{4}; 6\frac{5}{7}; 7\frac{8}{3}$

Stammbrüche:$\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}$

Gleichnamige Brüche:$\frac{2}{4}; \frac{3}{4}; \frac{8}{4}$

Ungleichnamige Brüche:$\frac{2}{4}; \frac{5}{7}; \frac{8}{3}$

Kehrwert:$\frac{2}{4} \Leftrightarrow \frac{4}{2}; \frac{5}{7} \Leftrightarrow \frac{7}{5}$

Scheinbrüche:$\frac{4}{2} = 2; \frac{28}{7} = 4$

Erweitern von Brüchen

Zähler und Nenner mit der gleichen Zahl multiplizieren
$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c}$

$\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 2}{4 \cdot 2} = \frac{6}{8}$

Kürzen von Brüchen

- Zähler und Nenner mit der gleichen Zahl dividieren

$\frac{a}{b}=\frac{a:c}{b:c}$

- Zähler und Nenner durch den ggT(Zähler;Nenner) teilen

$ggT(a,b)=c$

$\frac{a}{b}=\frac{a:c}{b:c}$

- Zähler und Nenner in Primfaktoren zerlegen und gleiche Primfaktoren kürzen

$\frac{12}{18}=\frac{12:2}{18:2}=\frac{6}{9}$

$\frac{6}{9}=\frac{6:3}{9:3}=\frac{2}{3}$

$\mathrm{ggT}(18;12)=6$

$\frac{12}{18}=\frac{12:6}{18:6}=\frac{2}{3}$

$\frac{12}{18}=\frac{2\cdot2\cdot3}{2\cdot3\cdot3}=\frac{2}{3}$

Addition und Subtraktion gleichnamiger Brüche

Zähler addieren bzw. subtrahieren

$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}$

$\frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c}$

$\frac{2}{3}+\frac{4}{3}=\frac{2+4}{3}=\frac{6}{3}$

$\frac{5}{7}-\frac{3}{7}=\frac{5-3}{7}=\frac{2}{7}$

Addition und Subtraktion ungleichnamiger Brüche

Brüche durch Erweitern gleichnamig machen

- Hauptnenner: Produkt der beiden Nenner

Erweiterungsfaktoren: d und b

$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d}{b\cdot d}+\frac{c\cdot b}{b\cdot d}=\frac{a\cdot d+c\cdot b}{b\cdot d}$

$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d}{b\cdot d}-\frac{c\cdot b}{b\cdot d}=\frac{a\cdot d-c\cdot b}{b\cdot d}$

- Hauptnenner: kgV(b,d)=c

Erweiterungsfaktoren: $\frac{c}{b}$ und $\frac{c}{d}$

$\frac{2}{3}+\frac{3}{4}$

Hauptnenner: $3\cdot4=12$

Erweiterungsfaktoren: 4 **und** 3

$\frac{2}{3}+\frac{3}{4}=\frac{2\cdot4}{3\cdot4}+\frac{3\cdot3}{4\cdot3}=\frac{8}{12}+\frac{9}{12}=\frac{17}{12}=1\frac{5}{12}$

$\frac{3}{12}+\frac{5}{18}$

Hauptnenner: kgV($12,18)\ =36$

Erweiterungsfaktoren: $\frac{36}{12}=3\quad\frac{36}{18}=2$

$\frac{3}{12}+\frac{5}{18}=\frac{3\cdot3}{12\cdot3}+\frac{5\cdot2}{18\cdot2}=\frac{9+10}{36}=\frac{19}{36}=\frac{19}{36}$

Multiplikation von Brüchen

Zähler mal Zähler und Nenner mal Nenner

$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$

$\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}=\frac{3\cdot5}{4\cdot6}=\frac{15}{24}$

Division von Brüchen

Mit dem Kehrwert des Bruches multiplizieren

Bruch durch Bruch

$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$

Bruch durch Zahl

$\frac{\frac{a}{b}}{e}=\frac{a}{b}:e=\frac{a}{b}\cdot\frac{1}{e}=\frac{a}{b\cdot e}$

Zahl durch Bruch

$\frac{e}{\frac{c}{d}}=e:\frac{c}{d}=\frac{e}{1}\cdot\frac{d}{c}=\frac{e\cdot d}{c}$

Doppelbruch

$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$

$\frac{3}{4}:\frac{5}{6}=\frac{3}{4}\cdot\frac{6}{5}=\frac{3\cdot6}{4\cdot5}=\frac{18}{20}$

$4:\frac{5}{6}=4\cdot\frac{6}{5}=\frac{4\cdot6}{5}=\frac{24}{5}$

$\frac{3}{4}:5=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{5}=\frac{3}{4\cdot5}=\frac{3}{20}$

$\frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{6}}=\frac{3}{4}:\frac{5}{6}==\frac{3}{4}\cdot\frac{6}{5}=\frac{3\cdot6}{4\cdot5}=\frac{18}{20}$

Interaktive Inhalte: Kürzen - $\frac{a}{b} - \frac{c}{d}$ - $a\frac{b}{c} - d\frac{e}{f}$ -

1.1.9 Dezimalbruch

Stellenwerttafel

Bruch	M	HT	ZT	T	H	Z	E	,	z	h	t	zt	ht		Dezimalbruch
$\frac{1}{10}$							0	,	1						$0,1$
$\frac{1}{100}$							0	,	0	1					$0,01$
$\frac{23}{100}$							0	,	2	3					$0,23$
$\frac{456}{1000}$							0	,	4	5	6				$0,456$
$12\frac{3}{10000}$						1	2	,	0	0	0	3			$12,0003$
$567\frac{30}{10000}$					5	6	7	,	0	0	3	0			$567,003$

Z	Zehner	10^1	10	
H	Hunderter	10^2	100	
T	Tausender	10^3	1000	
ZT	Zehntausender	10^4	10000	
HT	Hunderttausender	10^5	100000	
M	Million	10^6	1000000	

E	Einer	10^0	1	
z	Zehntel	10^{-1}	$0,1$	$\frac{1}{10}$
h	Hundertstel	10^{-2}	$0,01$	$\frac{1}{100}$
t	Tausendstel	10^{-3}	$0,001$	$\frac{1}{1000}$
zt	Zehntausendstel	10^{-4}	$0,0001$	$\frac{1}{10000}$
ht	Hunderttausendstel	10^{-5}	$0,00001$	$\frac{1}{100000}$

Bruch - Dezimalbruch

• Erweitern des Bruchs auf Zehntel, Hundertstel, Tausendstel usw.
Werte in die Stellenwerttafel einsetzen.
• Schriftliches Dividieren

$\frac{1}{10} = 0,1$ $\quad \frac{1}{100} = 0,01$

$\frac{1}{1000} = 0,001$ $\quad \frac{1}{2}\frac{5}{10} = 0,5$ $\quad \frac{4}{25} = \frac{16}{100} = 0,16$

$\frac{3}{8} = \frac{375}{1000} = 0,375$ $\quad \frac{12,5}{100} = 0,125$

$\frac{201}{1000} = 0,201$ $\quad \frac{125}{10000} = 0,0125$

$\frac{100}{100} = 1$

$\frac{2}{3} = 2:3 = 0,666... = 0,\overline{6}$

Dezimalbruch - Bruch

• Endlicher Dezimalburch
Nachkommazahl (Dezimalen) als Zähler und im Nenner die entsprechende Stufenzahl(10,100,1000)
• Periodischer Dezimalbruch
- Periode beginnt direkt nach den Komma
Nachkommazahl (Dezimalen) als Zähler und im Nenner den entsprechenden Bruch mit 9 (9,99,999)

$0,201 = \frac{201}{1000}$ $\quad 0,0001 = \frac{1}{10000}$

$0,\overline{1} = \frac{1}{9}$ $\quad 0,\overline{2} = \frac{2}{9}$

$0,\overline{12} = \frac{12}{99}$ $\quad 0,\overline{255} = \frac{255}{999}$

Multiplizieren oder Dividieren mit Stufenzahl

Multipliziern einer Dezimalzahl mit
10 - Komma um 1 Stelle nach rechts verschieben
100 - Komma um 2 Stellen nach rechts verschieben
1000 - Komma um 3 Stellen nach rechts verschieben
......
Dividieren einer Dezimallzahl durch
10 - Komma um 1 Stelle nach links verschieben
100 - Komma um 2 Stellen nach links verschieben
1000 - Komma um 3 Stellen nach links verschieben
......

$345,677 \cdot 10 = 3456,77$ $\quad 345,677 \cdot 100 = 34567,7$

$345,677 \cdot 1000 = 345677,0$ $\quad 345,677 \cdot 10000 = 3456770,0$

$345,677 : 10 = 34,5677$ $\quad 345,677 : 100 = 3,45677$

$345,677 : 1000 = 0,345677$ $\quad 345,677 : 10000 = 0,0345677$

Runden von Dezimalbrüchen

Ziffer der zu rundenten Stelle bestimmen.
• Ist die nachfolgende Ziffer 0,1,2,3,4, dann wird abgerundet. Die gerundete Stelle bleibt unverändert
• Ist die nachfolgende Ziffer 5,6,7,8,9, dann wird aufgerundet. Die gerundete Stelle wird um eins erhöht.
• Wenn nach dem Komma gerundet wird, werden die nachfolgenden Ziffer weggelassen.
• Wenn vor dem Komma gerundet wird, werden die nachfolgenden Ziffern durch Null ersetzt.

$712,654$ runden auf Zehntel (2 Nachkommastellen)
Ziffer der Zehntelstelle: 6
Nachfolgende Ziffer: 5 $\Rightarrow$ aufrunden $6 + 1$
Gerundete Zahl: $712,7$
$712,654$ runden auf Hunderter
Ziffer der Hunderterstelle: 7
Nachfolgende Ziffer: 1 $\Rightarrow$ abrunden 700
Gerundete Zahl: 700
$712,9996$ runden auf Tausendstel (3 Nachkommastellen)
Ziffer der Tausendstelstelle: 9
Nachfolgende Ziffer: 6 $\Rightarrow$ aufrunden $712,999 + 0,001$
Gerundete Zahl: $713,000$

1.1.10 Bruchteile - Prozent - Promille

Bruchteile

• Bruchteil (relativer Anteil) $= \dfrac{\text{absoluter Anteil}}{\text{Ganze}}$

• absoluter Anteil $=$ Bruchteil $\cdot$ Ganze

• Ganze $= \dfrac{\text{absoluter Anteil}}{\text{Bruchteil}}$

Welcher Bruchteil sind 200 Euro von 800 Euro?
$\frac{200}{800} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

Gesucht: absoluter Anteil
$\frac{1}{4}$ von 800 Euro?
$\frac{1}{4} \cdot 800Euro = 200Euro$

Gesucht: Ganze
$\frac{1}{4}$ sind 200 Euro?
$\frac{200Euro}{\frac{1}{4}} = 800Euro$

Prozent

• $p\% = \dfrac{p}{100}$ p Prozent = p Hundertstel

• Prozentsatz= Bruchteil $\cdot 100$ %

• Bruchteil= $\dfrac{\text{Prozentsatz}}{100\%}$

p - Prozentzahl
p% - Prozentsatz

$p\% = 0,01 = \frac{1}{100} = 1\% \quad p = 1$
$p\% = 0,34 = \frac{34}{100} = 34\% \quad p = 34$
$p\% = 0,125 = \frac{12,5}{100} = 12,5\% \quad p = 12,5$
$p\% = 1,25 = \frac{125}{100} = 125\% \quad p = 125$

Promille

• p ‰$= \dfrac{p}{1000}$ p Promille = p Tausendstel

• Promillesatz= Bruchteil $\cdot 1000$ ‰

• Bruchteil= $\dfrac{\text{Promillesatz}}{1000‰}$

p - Promillezahl
p‰ - Promillesatz

$p‰ = 0,001 = \frac{1}{1000} = 1$ ‰ $\quad p = 1$
$p‰ = 0,034 = \frac{34}{1000} = 34$ ‰ $\quad p = 34$
$p‰ = 0,125 = \frac{125}{1000} = 125$ ‰ $\quad p = 125$
$p‰ = 1,25 = \frac{1250}{1000} = 1250$ ‰ $\quad p = 1250$

1.1.11 Prozentrechnung

Prozentrechnung

- Verhältnisgleichung: $\frac{P_w}{p} = \frac{G}{100}$
- $P_w = \frac{p \cdot G}{100}$ $\qquad P_w = p\% \cdot G$
- $G = \frac{P_w \cdot 100}{p}$ $\qquad G = \frac{P_w}{p\%}$
- $p = \frac{P_w \cdot 100}{G}$ $\qquad p\% = \frac{P_w}{G}$

G - Grundwert
p - Prozentzahl
p% - Prozentsatz
P_w - Prozentwert

Wie viel sind 25% von 800 Euro?
$P_w = \frac{25 \cdot 800 Euro}{100} = 200 Euro$
$p\% = 25\% = \frac{25}{100} = 0,25$
$P_w = 0,25 \cdot 800 Euro = 200 Euro$

25% sind 200Euro.Grundwert?
$G = \frac{200 \cdot 100}{25} = 800 Euro \qquad G = \frac{200}{0,25} = 800 Euro$

Wie viel Prozent sind 200 Euro von 800 Euro?
$p = \frac{200 \cdot 100}{800} = 25 \qquad p\% = 25\%$
$p\% = \frac{200}{800} = 0,25 = \frac{25}{100} = 25\%$

Interaktive Inhalte: $P_w = \frac{p \cdot G}{100}$ - $G = \frac{P_w \cdot 100}{p}$ - $p = \frac{P_w \cdot 100}{G}$ -

1.1.12 Promillerechnung

Promillerechnung

- Verhältnisgleichung: $\frac{P_w}{p} = \frac{G}{1000}$
- $P_w = \frac{p \cdot G}{1000}$ $\qquad P_w = p‰ \cdot G$
- $G = \frac{P_w \cdot 1000}{p}$ $\qquad G = \frac{P_w}{p‰}$
- $p = \frac{P_w \cdot 1000}{G}$ $\qquad pp‰ = \frac{P_w}{G}$

G - Grundwert
p - Promillezahl
p‰ - Promillesatz
P_w - Promillewert

Wie viel sind 25‰ von 800 Euro?
$P_w = \frac{25 \cdot 800 Euro}{1000} = 20 Euro$
$p‰ = \frac{25}{1000} = 0,025$
$P_w = 0,025 \cdot 800 Euro = 20 Euro$

25‰ sind 20Euro.Grundwert?
$G = \frac{20 \cdot 1000}{25} = 800 Euro \qquad G = \frac{200}{0,025} = 800 Euro$

Wie viel Promille sind 20 Euro von 800 Euro?
$p = \frac{20 \cdot 1000}{800} = 25 \qquad p‰ = 25‰$
$p‰ = \frac{20}{800} = 0,025 = \frac{25}{1000} = 25‰$

Interaktive Inhalte: $P_w = \frac{p \cdot G}{1000}$ - $G = \frac{P_w \cdot 1000}{p}$ - $p = \frac{P_w \cdot 1000}{G}$ -

1.1.13 Prozentuale Ab- und Zunahme

Prozentuale Ab- und Zunahme

•Endwert= Änderungsfaktor · Anfangswert

$E = q \cdot A$

•$q = \frac{E}{A}$

•$A = \frac{E}{q}$

•Prozentuale Zunahme $q > 1$

$q = 1 + \frac{p}{100}$ $\quad p = (q-1) \cdot 100$

Endwert=Anfangswert+Veränderung

•Prozentuale Abnahme $0 < q < 1$

$q = 1 - \frac{p}{100}$ $\quad p = (1-q) \cdot 100$

Endwert=Anfangswert-Veränderung

A - Anfangswert

E - Endwert

q - Änderungsfaktor

p - Prozentuale Zu- bzw. Abnahme

Eine Artikel kostet 200 Euro.
Der Preis wird um 10% erhöht.
$q = 1 + \frac{10}{100} = 1.1 \quad E = 1.1 \cdot 200 Euro = 220 Euro$
Der Preis wird um 10% gesenkt.
$q = 1 - \frac{10}{100} = 0.9 \quad E = 0.9 \cdot 200 Euro = 180 Euro$

Eine Artikel kostet nach Preiserhöhung 220 Euro.
Der Preis wurde um 10% erhöht.
$q = 1 + \frac{10}{100} = 1.1 \quad A = \frac{220}{1.1} = 200 Euro$
Eine Artikel kostet nach der Preissenkung 180 Euro.
Der Preis wurde um 10% gesenkt.
$q = 1 - \frac{10}{100} = 0.9 \quad A = \frac{180}{0.9} = 200 Euro$

Eine Artikel kostet 200 Euro.
Nach einer Preiserhöhung kostet er 220 Euro.
$q = \frac{220}{200} = 1.1 \qquad p = (1.1-1) \cdot 100 = 10\%$
Nach einer Preissenkung kostet er 180 Euro.
$q = \frac{180}{200} = 0.9 \qquad p = (1-0.9) \cdot 100 = 10\%$

Interaktive Inhalte: $P_w = \frac{p \cdot G}{1000}$ - $G = \frac{P_w \cdot 1000}{p}$ - $p = \frac{P_w \cdot 1000}{G}$ -

1.1.14 Potenzen

Definition

$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n-\text{Faktoren}}$

a = Basis n = Exponent

$a^0 = 1 \quad a^1 = a$

Basis: 10

$10^0 = 1 \quad 10^1 = 10$

Basis: e = 2,718.. (eulersche Zahl)

$e^0 = 1 \quad e^1 = e$

$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2$
$x^4 = x \cdot x \cdot x \cdot x$
$4^0 = 1$
$x^0 = 1$
$4^1 = 4$
$x^1 = x$

Potenzen multiplizieren

gleiche Basis - Exponenten addieren

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

$10^m \cdot 10^n = 10^{m+n}$

$e^m \cdot e^n = e^{m+n}$

$3^2 \cdot 3^5 = 3^{2+5} = 3^7$
$x^3 \cdot x^5 = x^{3+5} = x^8$
$e^3 \cdot e^{-5} = e^{3+(-5)} = e^{-2}$

Potenzen dividieren

gleiche Basis - Exponenten subtrahieren

$a^m : a^n = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

$10^m : 10^n = \frac{10^m}{10^n} = 10^{m-n}$

$e^m : e^n = \frac{e^m}{e^n} = e^{m-n}$

$\frac{3^7}{3^5} = 3^{7-5} = 3^2$
$\frac{x^5}{x^3} = x^{5-3} = x^2$
$\frac{e^5}{e^{-3}} = e^{5-(-3)} = e^8$

Potenz ausklammern

gleicher Exponenten - Exponent ausklammern
$a^n \cdot b^n = (ab)^n$
$\frac{a^n}{b^n} = (\frac{a}{b})^n$

$3^2 \cdot 5^2 = (3 \cdot 5)^2 = 15^2$
$x^2 \cdot y^2 = (x \cdot y)^2$

Potenz in der Potenz

Exponenten multiplizieren
$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$
$(10^n)^m = 10^{n \cdot m}$
$(e^n)^m = e^{n \cdot m}$

$\left(2^3\right)^4 = 2^{3 \cdot 4} = 2^{12}$
$\left(x^2\right)^3 = x^6$
$\left(x^2 \cdot 4\right)^2 = x^4 \cdot 4^2$
$(e^x)^2 = e^{2x}$

Potenzen mit negativem Exponenten

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
$10^{-n} = \frac{1}{10^n}$
$e^{-n} = \frac{1}{e^n}$

$2^{-1} = \frac{1}{2}$ $\quad 3^{-2} = \frac{1}{3^2}$
$x^{-2} = \frac{1}{x^2}$ $\quad x^{-3} \cdot y^{-2} = \frac{1}{x^3 y^2}$

Potenz - Wurzel

$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \qquad a > 0$
$10^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{10}$
$e^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{e}$

$2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$ $\quad x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$
$5^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{5}$ $\quad 4^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{4}}$

Potenz mit rationalen Exponenten

$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \qquad a > 0$
$10^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{10^m}$
$e^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{e^m}$

$2^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{2^3}$

Potenzen mit rationalen (negativ) Exponenten

$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} \qquad a > 0$
$10^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{10^m}}$
$e^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{e^m}}$

$2^{-\frac{3}{5}} = \frac{1}{\sqrt[5]{2^3}}$

Interaktive Inhalte: hier klicken

1.1.15 Wurzeln

Wurzel - Potenz

$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$
n - Wurzelexponent $\quad$ a - Radikand
Quadratwurzel: $\sqrt{a}$
Kubikwurzel: $\sqrt[3]{a}$

$\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$ $\quad \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$
$\sqrt[3]{5} = 5^{\frac{1}{3}}$ $\quad \frac{1}{\sqrt{4}} = 4^{-\frac{1}{2}}$

Wurzeln multiplizieren

$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$
$a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} = (ab)^{\frac{1}{n}}$
gleiche Exponenten - Exponent ausklammern

$\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{2 \cdot 4} = \sqrt[3]{8} = 2$

Wurzeln dividieren

$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$
$\frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}$
gleiche Exponenten - Exponent ausklammern

$\sqrt[3]{54} : \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{\frac{54}{2}} = \sqrt[3]{27} = 3$

Wurzel in der Wurzel

$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}$
$(a^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{m \cdot n}}$

$\sqrt[2]{\sqrt[3]{5}} = \sqrt[6]{5}$

Nenner rational machen

Wurzel (irrationale Zahl) aus dem Nenner entfernen

Erweitern des Bruchs mit der Wurzel
$\frac{a}{b\sqrt{c}} = \frac{a\sqrt{c}}{b\sqrt{c}\sqrt{c}} = \frac{a\sqrt{c}}{b(\sqrt{c})^2} = \frac{a\sqrt{c}}{bc}$
$\frac{a}{b\sqrt{c+d}} = \frac{a\sqrt{c+d}}{b\sqrt{c+d}\sqrt{c+d}} = \frac{a\sqrt{c+d}}{b(\sqrt{c+d})^2} = \frac{a\sqrt{c+d}}{b(c+d)}$

Erweitern mit der 3. Binomischen Formel
$\frac{a}{b+\sqrt{c}} = \frac{a(b-\sqrt{c})}{(b+\sqrt{c})(b-\sqrt{c})} = \frac{a(b-\sqrt{c})}{b^2-(\sqrt{c})^2} = \frac{a(b-\sqrt{c})}{b^2-c}$

Erweitern des Bruchs mit der Wurzel
$\frac{3}{5\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{6}}{5\sqrt{6}\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{6}}{5(\sqrt{6})^2} = \frac{3\sqrt{6}}{30}$
$\frac{3}{5\sqrt{x+2}} = \frac{3\sqrt{x+2}}{5\sqrt{x+2}\sqrt{x+2}} = \frac{3\sqrt{x+2}}{5(\sqrt{x+2})^2} = \frac{3\sqrt{x+2}}{5(x+2)}$

Erweitern zur 3. Binomischen Formel
$\frac{3}{5+\sqrt{2}} = \frac{3(5-\sqrt{2})}{(5+\sqrt{2})(5-\sqrt{2})} = \frac{3(5-\sqrt{2})}{5^2-(\sqrt{2})^2} = \frac{3(5-\sqrt{2})}{5^2-2} = \frac{15-3\sqrt{2}}{23}$
$\frac{3}{\sqrt{x}+\sqrt{2}} = \frac{3(\sqrt{x}-\sqrt{2})}{(\sqrt{x}+\sqrt{2})(\sqrt{x}-\sqrt{2})} = \frac{3(\sqrt{x}-\sqrt{2})}{(\sqrt{x})^2-(\sqrt{2})^2} = \frac{3(\sqrt{x}-\sqrt{2})}{x-2}$

Interaktive Inhalte: hier klicken

1.1.16 Logarithmen

Definition

$c = \log_b a \Leftrightarrow b^c = a$
b = Basis a = Numerus
Basis: 10
$log_{10}x = lgx$
$10^{lgx} = x$
$lg10^x = x$
Basis: e = 2,718.. (eulersche Zahl)
$log_e x = \ln x$
$e^{\ln x} = x$
$\ln e^x = x$

$3 = \log_2 8 \Leftrightarrow 2^3 = 8$
$log_e 3 = \ln 3$
$e^{\ln 3} = 3$
$\ln e^3 = 3$
$log_{10}2 = lg2$
$10^{lg3} = 3$
$lg10^3 = 3$

Logarithmen addieren

$\log_c a + \log_c b = \log_c(a \cdot b)$
$\lg a + \lg b = \lg(a \cdot b)$
$\ln a + \ln b = \ln(a \cdot b)$

$log_2 4 + log_2 8 = log_2(4 \cdot 8) = log_2 32$
$log_3 x + log_3 y = log_3(x \cdot y)$

Logarithmen subtrahieren

$\log_c a - \log_c b = \log_c \frac{a}{b}$
$\lg a - \lg b = \lg \frac{a}{b}$
$\ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b}$

$\log_3 5 - \log_3 7 = \log_3 \frac{5}{7}$
$\ln 5 - \ln 7 = \ln \frac{5}{7}$

Logarithmus von der Potenz

$log_c a^n = n \log_c a$
$log_a a^n = n \log_a a = n$
$lg 10^n = n$
$ln e^n = n$

$log_3 5^2 = 2 \log_3 5$

Basisumrechnung von Logarithmen

$\log_b a = \dfrac{\log_c a}{\log_c b} = \dfrac{\lg a}{\lg b} = \dfrac{\ln a}{\ln b}$

$\log_5 3 = \dfrac{\log_2 3}{\log_2 5} = \dfrac{\lg 3}{\lg 5} = \dfrac{\ln 3}{\ln 5} = 0,68$

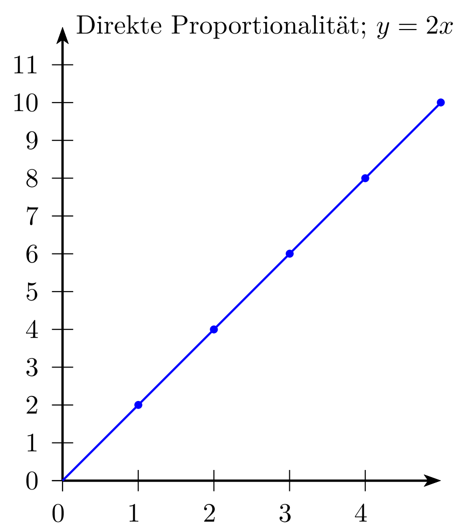
Logarithmus von der Wurzel

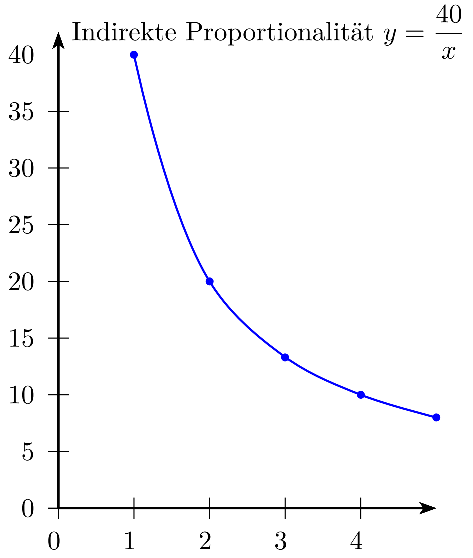
$\log_c \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \log_c a$

$\log_4 \sqrt[5]{3} = \frac{1}{5} \log_4 3$

Interaktive Inhalte: hier klicken

1.1.17 Proportionalität





Direkte Proportionalität

y ist ein vielfaches von x

$y = m \cdot x$

Proportionalitätsfaktor: m

y ist direkt proportional zu x: $y \sim x$

Direkte Proportionalität = quotientengleich

Tabelle:

x_1	x_2	x_3	x_4	..
y_1	y_2	y_3	y_4	..

$m = \frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \frac{y_3}{x_3} = \frac{y_4}{x_4}..$

Funktionsgleichungen:

$y = m \cdot x \qquad x = \frac{y}{m} \qquad m = \frac{y}{x}$

Graph: Urspungsgerade

Ein Tafel Schokolade kostet 2,- Euro.
Zwei Tafeln Schokolade kosten 4,- Euro.
x= Anzahl der Tafeln
y= Preis der Tafeln
m= Preis einer Tafel
$y = 2 \cdot x$
Wieviel kosten 5 Tafeln ?
$y = 2 \cdot 5 = 10$
Wieviel Tafeln bekommt man für 12,-Euro ?
$x = \frac{12}{2} = 6$
Tabelle:

Anzahl	1	2	3	4	5
Preis	2	4	6	8	10

Direkte Proportionalität = quotientengleich
$m = \frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{6}{3} = \frac{8}{4} = 2$
Funktionsgleichung: $y = 2 \cdot x$

Indirekte Proportionalität

y mal x ist konstant

$k = y \cdot x$

y ist indirekt proportional zu x: $y \sim \frac{1}{x}$

Indirekte Proportionalität = produktgleich

Tablelle:

x_1	x_2	x_3	x_4	..
y_1	y_2	y_3	y_4	..

$k = y_1 \cdot x_1 = y_2 \cdot x_2 = y_3 \cdot x_3 = y_4 \cdot x_4..$

Funktionsgleichungen:

$y = \frac{k}{x} \qquad x = \frac{k}{y} \qquad k = y \cdot x$

Graph: Hyperbel

10 Arbeiter benötigen 4 Tage
Wie lange brauchen 20 Arbeiter?
x= Arbeiter
y= Tage
k= Anzahl der Tage bei einem Arbeiter
$k = y \cdot x$
$k = 10 \cdot 4 = 40$
$y = \frac{40}{20} = 2$
Tabelle:

Arbeiter	1	2	3	4	5
Tage	40	20	$13\frac{1}{3}$	10	8

Indirekte Proportionalität = produktgleich
$k = 1 \cdot 4 = 2 \cdot 20 = 3 \cdot 13\frac{1}{3} = 4 \cdot 10 = 5 \cdot 8 = 40$
Funktionsgleichung: $y = \frac{40}{x}$

Dreisatz - Verhältnisgleichung

$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} \qquad \frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} \qquad y_1 : x_1 = y_2 : x_2$

$y_1 \cdot x_2 = x_1 \cdot y_2$

$y_1 = \frac{y_2 \cdot x_1}{x_2} \qquad y_2 = \frac{y_1 \cdot x_2}{x_1}$

$x_1 = \frac{x_2 \cdot y_1}{y_2} \qquad x_2 = \frac{x_1 \cdot y_2}{y_1}$

7 Tafel Schokolade kosten 14,- Euro.
Wieviel kosten 5 Tafeln ?
x= Anzahl der Tafeln
y= Preis der Tafeln
$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$
$\frac{14}{7} = \frac{y_2}{5}$
$y_2 = \frac{14 \cdot 5}{7} = 10$

1.2 Terme

1.2.1 Grundlagen

Definition

Terme sind sinnvolle Verknüpfungen (+,-,·,/) von Koeffizienten (Zahlen) und Variablen (Buchstaben: x,y,z,a..).
Eine Variable ist ein Platzhalter für eine Zahl.
Physikalische und geometrische Formeln sind Terme.
Terme können mit Hilfe des Kommutativgesetzes, Assoziativgesetzes und Distributivgesetzes umgeformt werden.

- konstanter Term 2
- linearer Term $5x$
- quadratischer Term $6x^2$
- weitere Terme

$3 \cdot x - 4$	$2yx - 4y$
$3a - 2b$	$3zx - 2xu$
$x^2 - 3x^2 - x^2$	$yx^2 - 3zx^2 - ux^2$
$5x^2y - 7x^2$	$5e^2y - 2e^3$
$V = l \cdot b \cdot h$	$\rho = \frac{m}{V}$

- keine Terme

$4 + *4 \quad /4, -@$

Schreibweisen

• Man darf das Malzeichen vor der Variablen und vor der Klammer weglassen.
$a \cdot x = ax$
$a \cdot (x + b) = a(x + b)$
• Den Faktor 1 vor einer Variablen kann man weglassen.
$1 \cdot x = 1x = x$
• Zahlen schreibt man vor die Variable
$x \cdot a = ax$

$3 \cdot x = 3x$
$2 \cdot y \cdot 3 = 6y$
$a \cdot x = ax$
$3 \cdot (x - 2) = 3(x - 2)$
$x \cdot y \cdot 5 = 5xy$

Termwert - Termname

Jedem Term kann man einen Namen zuweisen. In Klammern kann man die Variablen des Terms angeben.
Name(Variable 1, Variable 2...)=Term
Ersetzt man die Variablen eines Terms durch Zahlen, berechnet man den Wert des Terms.

Umfang des Rechtecks:
$U(a; b) = 2a + 2b$ oder $U = 2a + 2b$
Name des Terms: U Variable: a,b Term:2a+2b
Berechnen der Termwerts:$a = 5 \quad b = 6$
$U(5; 6) = 2 \cdot 5 + 2 \cdot 6$ oder $U = 2 \cdot 5 + 2 \cdot 6$
$U(5; 6) = 22$ oder $U = 22$
Termwert:22
Linearer Term (Funktion)
$f(x) = 2x + 3$ oder $y = 2x + 3$
Name des Terms: f oder y Variable:x Term:2x+3
Berechnen der Termwerts:$x = 5$
$f(5) = 2 \cdot 5 + 3$ oder $y = 2 \cdot 5 + 3$
$f(5) = 13$ oder $y = 13$
Termwert:13

1.2.2 Umformung von Termen

Addieren und Subtrahieren von Termen

Zwei Terme sind gleichartig, wenn sie aus den gleichen Variablen (Klammerausdrücke) mit den jeweiligen gleichen Exponenten bestehen. Gleichartige Terme kann man durch addieren (subtrahieren) der Koeffizienten zusammenfassen.

Gleichartige Terme $2x$ und $3x$
$2x + 3x = 5x$
Gleichartige Terme $-2x$ und $-3x$
Gleichartige Terme $6y$ und $-5y$
$-2x + 6y - 5y - 3x = -5x + y$
$x^3 + 4x^3 = 5x^3$
$2x^2 + 3x^2 = 5x^2$
$5x^2y + 7x^2y = 12x^2y$
$2xy + 3xy + 4z + 5z = 5xy + 9z$
$3e^x - 2e^x = e^x$
$(x^2 - 5x - 27) - (x + 3) =$
$x^2 - 5x - 27 - x - 3 = x^2 - 6x - 30$
Nicht gleichartige Terme kann man nicht zusammenfassen.
$2x + 3y + 3 =$
$2x^2 + 3x + 2 =$
$x^3 + 5x^4 =$
$3e^{2x} - 2e^x =$

Multiplizieren und Dividieren von Termen

Die Zahlen multiplizieren (dividieren) und gleiche Variablen zusammenfassen (Potenzgesetze) .

$2x \cdot 3x = 6x^2$
$2x \cdot 3x^2 = 2 \cdot 3 \cdot x \cdot x^2 = 6 \cdot x^3$
$6x \cdot x^2 = 6 \cdot x^3$
$\frac{9x}{3x} = 3$

$\frac{12x}{3x^2} = \frac{4}{x}$

Addieren und Subtrahieren von Summentermen

- Vorzeichen vor Summenterm

$+(a + b) = a + b \qquad +(a - b) = a - b$
$-(a + b) = -a - b \qquad -(a - b) = -a + b$

- Summenterm und Summenterm

$(a + b) + (c + d) = a + b + c + d$
$(a + b) - (c + d) = a + b - c - d$
$(a - b) - (c - d) = a - b - c + d$

$(2x + 1) + (x + 3) = 2x + 1 + x - 3 = 3x + 4$
$(2x + 1) + (x - 3) = 2x + 1 + x - 3 = 3x - 2$
$(2x + 1) - (x + 3) = 2x + 1 - x - 3 = x - 2$
$-(2x + 1) + (x + 3) = -2x - 1 + x + 3 = -x + 2$

Multiplizieren von Summentermen - Ausmultiplizieren

Ein Produkt in eine Summe(Differenz) in umwandeln.
Jedes Glied mit jedem multiplizieren.

- Faktor mal Summenterm

$c \cdot (a + b) = (a + b) \cdot c = ac + bc$

- Summenterm mal Summenterm

$(a + b) \cdot (c + d) = ac + ad + bc + bd$
$(a + b) \cdot (c + d + e) = ac + ad + ad + bc + bd + de$

- 3 Faktoren

$c \cdot (a + b) \cdot (d + e) = (ac + bc) \cdot (d + e) =$
$acd + ace + bcd + bce$
$(a + b) \cdot (c + d) \cdot (e + f) = (ac + ad + bc + bd) \cdot (e + f) =$
$ace + acf + ade + adf + bce + bcf + bde + bdf$

$(2x + 1) \cdot (x - 3) =$
$2x \cdot x + 2x \cdot (-3) + 1 \cdot x + 1 \cdot (-3) =$
$2x^2 + (-6x) + x + (-3) = 2x^2 - 5x - 3$
$(x^2 - 5x - 27) \cdot (x + 3) =$
$x^2 \cdot x + x^2 \cdot 3 + (-5x) \cdot x + (-5x) \cdot 3 + (-27) \cdot x + (-27) \cdot 3 =$
$x^3 + 3x^2 + (-5x^2) + (-15x) + (-27x) + (-81) =$
$x^3 - 2x^2 - 42x - 81$
$(x + 2) \cdot (x - 3) \cdot (x - 5) =$
$(x^2 - x - 6) \cdot (x - 5) =$
$x^3 - 6x^2 - x + 30$

Interaktive Inhalte: hier klicken

1.2.3 Binomische Formel

1. Binomische Formel

$(a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$
$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + a \cdot b + a \cdot b + b^2$
$(-a-b)^2 = (-1)^2(a+b)^2 = (a+b)^2$

$(x+5)^2 = x^2 + 10 \cdot x + 25$
$(x+9)^2 = x^2 + 18 \cdot x + 81$
$(-x-9)^2 = x^2 + 18 \cdot x + 81$
$(2 \cdot x + 5)^2 = 4 \cdot x^2 + 20 \cdot x + 25$
$(6 \cdot x + 5)^2 = 36 \cdot x^2 + 60 \cdot x + 25$
$(x+y)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot y + y^2$
$(x \cdot z + y)^2 = x^2 \cdot z^2 + 2 \cdot x \cdot z \cdot y + y^2$

2. Binomische Formel

$(a-b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2$
$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - a \cdot b - a \cdot b + b^2$
$(-a+b)^2 = (-1)^2(a-b)^2 = (a-b)^2$

$(x-5)^2 = x^2 - 10 \cdot x + 25$
$(x-9)^2 = x^2 - 18 \cdot x + 81$
$(-x+9)^2 = x^2 - 18 \cdot x + 81$
$(2 \cdot x - 5)^2 = 4 \cdot x^2 - 20 \cdot x + 25$
$(6 \cdot x - 5)^2 = 36 \cdot x^2 - 60 \cdot x + 25$
$(x-y)^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot y + y^2$
$(x \cdot z - y)^2 = x^2 \cdot z^2 - 2 \cdot x \cdot z \cdot y + y^2$

3. Binomische Formel

$(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2$
$(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - a \cdot b + a \cdot b - b^2 = a^2 - b^2$

$(x+5) \cdot (x-5) = x^2 - 25$
$(x+9) \cdot (x-9) = x^2 - 81$
$(3 \cdot x + 5) \cdot (3 \cdot x - 5) = 9 \cdot x^2 - 25$
$(7 \cdot x + 9) \cdot (7 \cdot x - 9) = 49 \cdot x^2 - 81$
$(x+y) \cdot (x-y) = x^2 - y^2$

Binomische Formel in der 3. Potenz

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(1x+2)^3 = 1^3x^3 + 3 \cdot 1^2 \cdot x^2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 \cdot x \cdot 2^2 + 2^3$
$(x+2)^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$

$(2x + (-3))^3 =$
$2^3x^3 + 3 \cdot 2^2 \cdot x^2 \cdot (-3) + 3 \cdot 2 \cdot x \cdot (-3)^2 + (-3)^3$
$(2x-3)^3 = 8x^3 - 36x^2 + 54x - 27$

Binomische Formel in der 4. Potenz

$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

$(1x+2)^4 =$
$1^4x^4 + 4 \cdot 1^3 \cdot x^3 \cdot 2 + 6 \cdot 1^2 \cdot x^2 \cdot 2^2 + 4 \cdot 1 \cdot x \cdot 2^3 + 2^4$
$(x+2)^3 = x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x + 16$

$(-2x + (-3))^4 =$
$(-2)^4 x^4 + 4 \cdot (-2)^3 \cdot x^3 \cdot (-3) + 6 \cdot (-2)^2 \cdot x^2 \cdot (-3)^2 +$
$4 \cdot (-2) \cdot x \cdot (-3)^3 + (-3)^4$
$(-2x-3)^3 = 16x^4 + 96x^3 + 216x^2 + 216x + 81$

Binomische Formel mit höheren Potenzen

$(a+b)^n = k_o a^n b^0 + k_1 a^{n-1} b^1 + k_2 a^{n-2} b^2 + \ldots + k_n a^0 b^n$

Die Summe der Exponeneten ist n.

n+0=n n-1+1=n n-2+2=n ...

Koeffizienten(k_0, k_1..) übers Pascal'sche Dreieck

$(a+b)^0$						1					
$(a+b)^1$					1		1				
$(a+b)^2$				1		2		1			
$(a+b)^3$			1		3		3		1		
$(a+b)^4$		1		4		6		4		1	
$(a+b)^5$	1		5		10		10		5		1

..

oder über den binomischen Satz:

$(a+b)^n =$

$$\binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \ldots + \binom{n}{n} a^0 b^n$$

Binomialkoeffizient

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad n \text{ über } k$$

$$(a+b)^1 = \binom{1}{0} a^1 + \binom{1}{1} b^1 = 1a + 1b$$

$$(a+b)^2 = \binom{2}{0} a^2 + \binom{2}{1} a^{2-1} b^1 + \binom{2}{2} a^{2-2} b^2$$

$n = 2 \quad k_0 = 1 \quad k_1 = 2 \quad k_2 = 1$

$(a+b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$

$n = 3 \quad k_0 = 1 \quad k_1 = 3 \quad k_2 = 3 \quad k_2 = 1$

$(a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$

$n = 4 \quad k_0 = 1 \quad k_1 = 4 \quad k_2 = 6 \quad k_3 = 4 \quad k_4 = 1$

$(a+b)^4 = 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4$

Interaktive Inhalte: $(a+b)^2$ - $(a-b)^2$ - $(a+b)\cdot(a-b)$ - $(ax+b)^3$ - $(ax+b)^4$ -

1.2.4 Faktorisieren - Ausklammern

Eine Summe(Differenz) in ein Produkt umwandeln.

- Ausklammern eines Faktors

$ac + bc = c \cdot (a+b)$

- Doppeltes Ausklammern

$ac + ad + bc + bd = a \cdot (c+d) + b(c+d) =$

$(a+b) \cdot (c+d)$

- Binomischen Formeln

$a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 = (a+b)^2$

$a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 = (a-b)^2$

$a^2 - b^2 = (a+b) \cdot (a-b)$

$2x^2 + 6x = 2x(x+3)$

Binomischen Formeln

$x^2 + 10x + 25 = (x+5)^2$

$x^2 - 18x + 81 = (x-9)^2$

$4x^2 + 20x + 25 = (2x+5)^2$

$36 \cdot x^2 - 60x + 25 = (6x-5)^2$

$x^2 - 25 = (x+5)(x-5)$

1.2.5 Quadratische Ergänzung

Maximalen oder minimalen Termwert bestimmen.

$T(x) = ax^2 + bx + c$

$T(x) = a(x^2 + \frac{b}{a}x) + c$

$T(x) = a(x^2 + \frac{b}{a}x + (\frac{b}{2a})^2 - (\frac{b}{2a})^2) + c$

$T(x) = a[(x + \frac{b}{2a})^2 - (\frac{b}{2a})^2] + c$

$T(x) = a(x + \frac{b}{2a})^2 - a \cdot \frac{b^2}{4a^2} + c$

$T(x) = a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a} + c$

oder

$T(x) = ax^2 + bx + c$

$T(x) = a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a})$

$T(x) = a(x^2 + \frac{b}{a}x + (\frac{b}{2a})^2 - (\frac{b}{2a})^2 + \frac{c}{a})$

$T(x) = a[(x + \frac{b}{2a})^2 - (\frac{b}{2a})^2 + \frac{c}{a}]$

$T(x) = a(x + \frac{b}{2a})^2 - a \cdot \frac{b^2}{4a^2} + a \cdot \frac{c}{a}$

$T(x) = a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a} + c$

$a < 0$

Maximaler Termwert $= -\frac{b^2}{4 \cdot a} + c$ für x$= -\frac{b}{2 \cdot a}$

$a > 0$

Minimaler Termwert $= -\frac{b^2}{4 \cdot a} + c$ für x$= -\frac{b}{2 \cdot a}$

quadratische Ergänzung

$y = x^2 - 6x + 2$

$y = x^2 - 6x + 3^2 - 3^2 + 2$

$y = (x - 3)^2 - 3^2 + 2$

$y = (x - 3)^2 - 9 + 2$

$y = (x - 3)^2 - 7$

Minimaler Termwert $= -7$ für x $= 3$

$y = 2x^2 + 8x + 2$

$y = 2(x^2 + 4x + 1)$

$y = 2(x^2 + 4x + 2^2 - 2^2 + 1)$

$y = 2[(x + 2)^2 - 2^2 + 1]$

$y = 2[(x + 2)^2 - 4 + 1]$

$y = 2[(x + 2)^2 - 3]$

$y = 2(x + 2)^2 - 6$

Minimaler Termwert $= -6$ für x $= -2$

$y = -4x^2 + 8x + 4$

$y = -4(x^2 - 2x) + 4$

$y = -4(x^2 - 2x + 1^2 - 1^2) + 4$

$y = -4[(x - 1)^2 - 1^2] + 4$

$y = -4[(x - 1)^2 - 1] + 4$

$y = -4(x - 1)^2 + 4 + 4$

$y = -4(x - 1)^2 + 8$

Maximaler Termwert $= 8$ für x $= 1$

1.2.6 Bruchterme

Definition und Definitionsbereich

Bei einem Bruchterm ist im Nenner eine Variable.

$\frac{Z(x)}{N(x)}$

Die Nullstellen des Nenners müssen aus dem Definitionsbereich ausgeschlossen werden.

Nullstellen des Nenners bestimmen: $N(x) = 0$

Nullstellen aus den Definitionsbereich ausschließen:

$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{x_1, x_2....\}$

$\frac{2}{x}$ $\quad \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\frac{2}{x-3}$ $\quad \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{3\}$

$\frac{2x+3}{x(x-3)}$ $\quad \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0; 3\}$

$\frac{3}{x^2-9}$ $\quad x^2 - 9 = 0 \quad \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-3; 3\}$

Erweitern von Bruchtermen

Zähler und Nenner mit dem gleichen Term multiplizieren

$\frac{a(x)}{b(x)} = \frac{a(x) \cdot c(x)}{b(x) \cdot c(x)}$

$\frac{x+3}{x-4} = \frac{(x+3) \cdot 2x}{(x-4) \cdot 2x} = \frac{2x^2+6x}{2x^2-8x}$

Kürzen von Bruchtermen

Zähler und Nenner faktorisieren - gleiche Faktoren kürzen

$\frac{a(x)}{b(x)} = \frac{a(x) : c(x)}{b(x) : c(x)}$

$\frac{12x^2+4}{4x^2-2x} = \frac{4x(3x+1)}{2x(2x-1)} = \frac{2(3x+1)}{2x-1}$

Addition und Subtraktion gleichnamiger Bruchterme

Zähler addieren bzw. subtrahieren

$\frac{a(x)}{c(x)} + \frac{b(x)}{c(x)} = \frac{a(x)+b(x)}{c(x)}$

$\frac{a(x)}{c(x)} - \frac{b(x)}{c(x)} = \frac{a(x)-b(x)}{c(x)}$

$\frac{2}{3x} + \frac{4}{3x} = \frac{2+4}{3x} = \frac{6}{3x} = \frac{2}{x}$

$\frac{5x}{7x-2} - \frac{3}{7x-2} = \frac{5x-3}{7x-2}$

Addition und Subtraktion ungleichnamiger Bruchterme

Brüche durch Erweitern gleichnamig machen

$$\frac{a(x)}{b(x)} + \frac{c(x)}{d(x)} = \frac{a(x)\cdot d(x)}{b(x)\cdot d(x)} + \frac{c(x)\cdot b(x)}{b(x)\cdot d(x)} = \frac{a(x)\cdot d(x) + c(x)\cdot b(x)}{b(x)\cdot d(x)}$$

$$\frac{a(x)}{b(x)} - \frac{c(x)}{d(x)} = \frac{a(x)\cdot d(x)}{b(x)\cdot d(x)} - \frac{c(x)\cdot b(x)}{b(x)\cdot d(x)} = \frac{a(x) - b(x)}{b(x)\cdot d(x)}$$

$$\frac{2}{5x} + \frac{3}{x+4} = \frac{2\cdot(x+4)}{5x(x+4)} + \frac{3\cdot 5x}{5x(x+4)} = \frac{2\cdot(x+4) + 3\cdot 5x}{5x(x+4)} = \frac{2x+8+15x}{5x(x+4)} = \frac{17x+8}{5x(x+4)}$$

Multiplikation von Bruchtermen

Zähler mal Zähler und Nenner mal Nenner

$$\frac{a(x)}{b(x)} \cdot \frac{c(x)}{d(x)} = \frac{a(x)\cdot c(x)}{b(x)\cdot d(x)}$$

$$\frac{3x}{x+4} \cdot \frac{5}{6x} = \frac{3x\cdot 5}{(x+4)\cdot 6x} = \frac{15x}{6x\cdot(x+4)}$$

Division von Bruchtermen

Mit dem Kehrwert des Bruchterms multiplizieren

Bruchterm durch Bruchterm

$$\frac{a(x)}{b(x)} : \frac{c(x)}{d(x)} = \frac{a(x)}{b(x)} \cdot \frac{d(x)}{c(x)} = \frac{a(x)\cdot d(x)}{b(x)\cdot c(x)}$$

Bruch durch Term

$$\frac{\frac{a(x)}{b(x)}}{e(x)} = \frac{a(x)}{b(x)} : e(x) = \frac{a(x)}{b(x)} \cdot \frac{1}{e(x)} = \frac{a(x)}{b(x)\cdot e(x)}$$

Term durch Bruchterm

$$\frac{e(x)}{\frac{c(x)}{d(x)}} = e(x) : \frac{c(x)}{d(x)} = \frac{e(x)}{1} \cdot \frac{d(x)}{c(x)} = \frac{e(x)\cdot d(x)}{c(x)}$$

Doppelbruch

$$\frac{\frac{a(x)}{b(x)}}{\frac{c(x)}{d(x)}} = \frac{a(x)}{b(x)} : \frac{c(x)}{d(x)} = \frac{a(x)}{b(x)} \cdot \frac{d(x)}{c(x)} = \frac{a(x)\cdot d(x)}{b(x)\cdot c(x)}$$

$$\frac{3}{4x} : \frac{5}{6x} = \frac{3}{4x} \cdot \frac{6x}{5} = \frac{3\cdot 6x}{4x\cdot 5} = \frac{18x}{20x} = \frac{9}{10}$$

$$4x : \frac{5}{6x} = 4x \cdot \frac{6x}{5} = \frac{4x\cdot 6x}{5} = \frac{24x^2}{5}$$

$$\frac{3}{4x} : 5x = \frac{3}{4x} \cdot \frac{1}{5x} = \frac{3}{4x\cdot 5x} = \frac{3}{20x^2}$$

$$\frac{\frac{3}{4x}}{\frac{5}{6x}} = \frac{3}{4x} : \frac{5}{6x} == \frac{3}{4x} \cdot \frac{6x}{5} = \frac{3\cdot 6x}{4x\cdot 5} = \frac{18x}{20x} = \frac{9}{10}$$

1.2.7 Polynomdivision

Die Polynomdivision funktioniert ähnlinch wie die schriftliche Division.

• Voraussetzung: Zählergrad≧Nennergrad

• höchste Potenz des Zählers durch die höchste Potenz des Nenners teilen

• Nenner mit dem Ergebnis multiplizieren und abziehen

• höchste Potenz des Restpolynom durch die höchste Potenz des Nenners teilen

usw.

• Wiederholen bis Zählergrad < Nennergrad

$\frac{3x^3-10x^2+7x-12}{x-3}$

•höchste Potenz des Zählers durch
die höchste Potenz des Nenners teilen

$\frac{3x^3}{x}=3x^2$

$(3x^3 \quad -10x^2 \quad +7x \quad -12 \quad) : (x-3) = 3x^2$

•Nenner mit dem Ergebnis multiplizieren und abziehen

$(x-3)3x^2 = 3x^3 - 9x^2$

$$\begin{array}{lllll}
(3x^3 & -10x^2 & +7x & -12 &) : (x-3) = 3x^2 \\
-(3x^3 & -9x^2) & & & \\
\hline
 & -x^2 & +7x & -12 &
\end{array}$$

• höchste Potenz des Restpolynom
durch die höchste Potenz des Nenners teilen

$\frac{-x^2}{x}=-x$

usw...

$$\begin{array}{lllll}
(3x^3 & -10x^2 & +7x & -12 &) : (x-3) = 3x^2 - x + 4 \\
-(3x^3 & -9x^2) & & & \\
\hline
 & -x^2 & +7x & -12 & \\
 & -(-x^2 & +3x) & & \\
\hline
 & & 4x & -12 & \\
 & & -(4x & -12) & \\
\hline
 & & & 0 &
\end{array}$$

•Polynomdivision mit Rest

$$\begin{array}{llll}
(x^2 & -5x & -27 &) : (x+3) = x - 8 + \frac{-3}{x+3} \\
-(x^2 & +3x) & & \\
\hline
 & -8x & -27 & \\
 & -(-8x & -24) & \\
\hline
 & & -3 &
\end{array}$$

•Polynomdivision mit fehlenden Potenzen beim Zähler

$$\begin{array}{lllll}
(x^3 & & & +8 &) : (x-2) = x^2 + 2x + 4 \\
-(x^3 & -2x^2) & & & \\
\hline
 & 2x^2 & & +8 & \\
 & -(2x^2 & -4x) & & \\
\hline
 & & 4x & +8 & \\
 & & -(4x & -8) & \\
\hline
 & & & 16 &
\end{array}$$

Interaktive Inhalte: hier klicken

1.3 Gleichungen

1.3.1 Grundlagen

Definition

Termwert der linken Seite $T_1(x)$ ist gleich dem Termwert der rechten Seite $T_2(x)$.

$$T_1(x) = T_2(x)$$

$T_1(x) = 2 \cdot (x+3) \qquad T_2(x) = 5x$
$T_1(x) = T_2(x)$
$2 \cdot (x+3) = 5x$
$2x + 6 = 5x$
$x = 2$

Äquivalenzumformung

Durch eine Äquivalenzumformung ändert sich die Lösungsmenge einer Gleichung nicht.
Äquivalenzumformungen von Gleichungen
- Vertauschen der beiden Seiten
- Addition des gleichen Terms (Zahl) auf beiden Seiten
- Subtraktion des gleichen Terms auf beiden Seiten
- Multiplikation mit dem gleichen Term (ungleich Null) auf beiden Seiten
- Division mit dem gleichen Term (ungleich Null) auf beiden Seiten

Quadrieren (Potenzieren mit einem geraden Exponenten) ist keine Äquivalenzumformung. Der berechnete Wert, muß durch das Einsetzen in die Ursprungsgleichung überprüft werden.

Vertauschen der beiden Seiten
$x - 2 = 8 \qquad 8 = x - 2$
Addition des gleichen Terms auf beiden Seiten
$x - 2 = 8 \qquad / + 2$
$x - 2 + 2 = 8 + 2$
$x = 10$
Subtraktion des gleichen Terms auf beiden Seiten
$3x - 2 = 2x + 3 \qquad / - 2x$
$3x - 2x - 2 = 2x - 2x + 3$
$x - 2 = 3$
Multiplikation mit dem gleichen Term auf beiden Seiten
$\frac{2}{x-3} = 5 \qquad / \cdot (x-3)$
$\frac{2 \cdot (x-3)}{x-3} = 5 \cdot (x-3)$
$2 = 5(x-3)$
Division durch mit dem gleichen Term auf beiden Seiten
$4x = 8 \qquad / : 4$
$\frac{4x}{4} = \frac{8}{4}$
$x = 2$

Quadrieren

$\sqrt{x} = -4$	$\sqrt{x} = 4$
$\sqrt{x}^2 = (-4)^2$	$\sqrt{x}^2 = 4^2$
$x = 16$	$x = 16$
$\sqrt{x} = -4$	$\sqrt{x} = 4$
$\sqrt{16} \neq -4$	$\sqrt{16} = 4$
keine Lösung	Lösung

1.3.2 Lineare Gleichung

- Klammern auflösen
- Terme zusammenfassen
- Äquivalenzumformung: Alle Terme mit der Variablen auf die eine Seite und alle Terme ohne Variable auf die andere Seite.
- durch die Zahl vor der Variablen dividieren

$2\frac{1}{2}x + 5 = 4(x-2) - 2x + 12$
Klammern auflösen
$2\frac{1}{2}x + 5 = 4x - 8 - 2x + 12$
Terme zusammenfassen
$2\frac{1}{2}x + 5 = 2x + 4$
Äquivalenzumformung:
$2\frac{1}{2}x + 5 = 2x + 4 \qquad / - 5 \qquad / - 2x$
$2\frac{1}{2}x - 2x = 4 - 5$
durch die Zahl vor der Variablen dividieren
$\frac{1}{2}x = -1 \qquad / : \frac{1}{2}$
$x = \frac{-1}{\frac{1}{2}}$
$x = -2$

$a \cdot x = b$

$a \cdot x = b \qquad / : a$
$x = \frac{b}{a}$

$5 \cdot x = 45 \qquad / : 5$
$x = \frac{45}{5}$
$x = 9$

$-2 \cdot x = -6 \qquad / : (-2)$
$x = \frac{-6}{-2}$
$x = 3$

$x + a = b$

$x + a = b \qquad / - a$
$x = b - a$

$x + 2 = 5 \qquad / - 2$
$x = 5 - 2$
$x = 3$

$x + 5 = -7 \qquad / - 5$
$x = -7 - 5$
$x = -12$

$a \cdot x + b = c$

$a \cdot x + b = c \qquad / - b$
$a \cdot x = c - b \qquad / : a$
$x = \dfrac{c - b}{a}$

$5 \cdot x - 4 = 6 \qquad / + 4$
$5 \cdot x = 10 \qquad / : 5$
$x = \dfrac{10}{5}$
$x = 2$

$-2 \cdot x + 4 = -6 \qquad / - 4$
$-2 \cdot x = -10 \qquad / : (-2)$
$x = \dfrac{-10}{-2}$
$x = 5$

$\dfrac{x}{a} = b$

$\dfrac{x}{a} = b \qquad / \cdot a$
$x = b \cdot a$

$\dfrac{x}{2} = 5 \qquad / \cdot 2$
$x = 5 \cdot 2$
$x = 10$

$\dfrac{x}{5} = -7 \qquad / \cdot 5$
$x = -7 \cdot 5$
$x = -35$

$a - x = b$

$a - x = b \qquad / - a$
$-x = b - a \qquad / : (-1)$
$x = a - b$

$2 - x = 5 \qquad / - 2$
$-x = 5 - 2$
$-x = 3 / : (-1)$
$x = -3$

$x - 5 = -7 \qquad / + 5$
$x = -7 + 5$
$x = -2$

$x - a = b$

$x - a = b \qquad / + a$
$x = b + a$

$x - 2 = 5 \qquad / + 2$
$x = 5 + 2$
$x = 7$

$x - 5 = -7 \qquad / + 5$
$x = -7 + 5$
$x = -2$

$ax + b = cx + d \qquad / - cx$
$ax - cx + b = d \qquad / - b$
$(a - c)x = d - b \qquad / : (a - c)$
$a - c \neq 0$
$x = \frac{d-b}{a-c}$

$2x + 4 = 6x + 7 \qquad / - 6x$
$-4x + 4 = 7 \qquad / - 4$
$-4x = 3 \qquad / : (-4)$
$x = -\frac{3}{4}$

Interaktive Inhalte: $a \cdot x + b = c$ - $a \cdot x + b = c \cdot x + d$ - $a \cdot x + b = 0$ - $a \cdot x = d$ -

1.3.3 Quadratische Gleichung

Umformen: $ax^2 + c = 0$

$ax^2 + c = 0 \quad / - c$
$ax^2 = -c \quad / : a$
$x_{1/2} = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$
Diskriminante:
$D = \frac{-c}{a}$
$D = 0$ eine Lösung
$D > 0$ zwei Lösungen
$D < 0$ keine Lösung

$-\frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{6} = 0 \quad / - \frac{1}{6}$
$-\frac{2}{3}x^2 = -\frac{1}{6} \quad / : (-\frac{2}{3})$
$x^2 = \frac{-\frac{1}{6}}{-\frac{2}{3}}$
$x = \pm\sqrt{\frac{1}{4}}$
$x_1 = \frac{1}{2} \quad x_2 = -\frac{1}{2}$

Faktorisieren: $ax^2 + bx = 0$

$ax^2 + bx = 0$
$x(ax + b) = 0$
$x_1 = 0 \quad \vee \quad x_2 = \frac{-b}{a}$

$-2x^2 - 8x = 0$
$x(-2x - 8) = 0$
$x_1 = 0$
$-2x - 8 = 0 \quad / + 8$
$-2x = 8 \quad / : (-2)$
$x = \frac{8}{-2}$
$x_2 = -4$

$x^2 - x = 0$
$x(x - 1) = 0$
$x_1 = 0$
$x - 1 = 0 \quad / + 1$
$x = 1$
$x_2 = 1$

Lösungsformel (Mitternachtsformel): $ax^2 + bx + c = 0$

$ax^2 + bx + c = 0$
$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$
Diskriminante:
$D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$
$D = 0$ eine Lösung
$D > 0$ zwei Lösungen
$D < 0$ keine Lösung

$x^2 + 3x - 10 = 0$
$x_{1/2} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10)}}{2 \cdot 1}$
$x_{1/2} = \frac{-3 \pm \sqrt{49}}{2}$
$x_{1/2} = \frac{-3 \pm 7}{2}$
$x_1 = \frac{-3 + 7}{2} \quad x_2 = \frac{-3 - 7}{2}$
$x_1 = 2 \quad x_2 = -5$

p-q Formel: $x^2 + px + q = 0$

$x^2 + px + q = 0$
$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$
Diskriminante:
$D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$
$D = 0$ eine Lösung
$D > 0$ zwei Lösungen
$D < 0$ keine Lösung

$x^2 + 3x - 10 = 0$
$x_{1/2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - (-10)}$
$x_{1/2} = -1\frac{1}{2} \pm \sqrt{12\frac{1}{4}}$
$x_{1/2} = -1\frac{1}{2} \pm 3\frac{1}{2}$
$x_1 = 2 \quad x_2 = -5$

Satz von Vieta: $x^2 + px + q = 0$

$x^2 + px + q = 0$
x_1, x_2 sind die Lösungen der Gleichung
$(x - x_1) \cdot (x - x_2) = 0$
$x^2 - x_2 \cdot x - x_1 \cdot x + x_1 \cdot x_2 = 0$
$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2 = 0$
$x_1 + x_2 = -p$
$x_1 \cdot x_2 = q$

$x^2 + 3x - 10 = 0$
$p = 3 \quad q = -10$
$x_1 + x_2 = -3$
$x_1 \cdot x_2 = 10$
$2 - 5 = -3$
$2 \cdot (-5) = -10$
$x_1 = 2 \qquad x_2 = -5$
$(x - 2) \cdot (x + 5) = 0$

Interaktive Inhalte: $ax^2 + bx + c = 0$ -

1.3.4 Kubische Gleichungen

Umformen: $ax^3 + b = 0$

$ax^3 + b = 0$
$ax^3 + b = 0 \qquad / - b$
$ax^3 = -b \qquad / : a$
$x^3 = \frac{-b}{a}$
$x = \sqrt[3]{\frac{-b}{a}}$
$\frac{-b}{a} > 0 \qquad x = \sqrt[3]{\frac{-b}{a}}$
$\frac{-b}{a} < 0 \qquad x = -\sqrt[3]{\left|\frac{-b}{a}\right|}$

$3x^3 + 24 = 0$
$3x^3 + 24 = 0 \qquad / - 24$
$3x^3 = -24 \qquad / : 3$
$x^3 = \frac{-24}{3}$
$x = \sqrt[3]{-8}$
$x = -2$

$-3x^3 + 24 = 0$
$-3x^3 + 24 = 0 \qquad / - 24$
$-3x^3 = -24 \qquad / : (-3)$
$x^3 = \frac{-24}{-3}$
$x = \sqrt[3]{8}$
$x = 2$

Faktorisieren: $ax^3 + bx = 0$

$ax^3 + bx = 0$
$x(ax^2 + b) = 0$
$x_1 = 0 \qquad \vee \qquad (ax^2 + b) = 0$

$-9x^3 + 25x = 0$
$x(-9x^2 + 25) = 0$
$\Rightarrow x_1 = 0 \quad \vee \quad -9x^2 + 25 = 0$
$-9x^2 + 25 = 0 \qquad / - 25$
$-9x^2 = -25 \qquad / : (-9)$
$x^2 = \frac{-25}{-9}$
$x = \pm\sqrt{2\frac{7}{9}}$
$x_2 = 1\frac{2}{3} \qquad x_3 = -1\frac{2}{3}$

Faktorisieren: $ax^3 + bx^2 = 0$

$ax^3 + bx^2 = 0$
$x^2(ax + b) = 0$
$x_{1/2} = 0 \qquad \vee \qquad (ax + b) = 0$

$-6\frac{3}{4}x^3 - 13\frac{1}{2}x^2 = 0$
$x^2(-6\frac{3}{4}x - 13\frac{1}{2}) = 0$
$\Rightarrow x_{1/2} = 0 \quad \vee \quad -6\frac{3}{4}x - 13\frac{1}{2} = 0$
$-6\frac{3}{4}x - 13\frac{1}{2} = 0 \qquad / + 13\frac{1}{2}$
$-6\frac{3}{4}x = 13\frac{1}{2} \qquad / : (-6\frac{3}{4})$
$x = \frac{13\frac{1}{2}}{-6\frac{3}{4}}$
$x_3 = -2$

Polynomdivision

$ax^3 + bx^2 + d = 0$
$ax^3 + cx + d = 0$
$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

• Die ganzzahligen Faktoren von d in die Funktion einsetzen. Wird bei einem Faktor der Funktionswert Null, hat man eine Nullstelle x_0 gefunden.

• Wenn x_0 ein Nullstelle von f(x) ist, so ist f(x) durch $(x - x_0)$ ohne Rest teilbar.

• Mit dem Linearfaktor $(x - x_0)$ wird die Polynomdivision durchgeführen.

$(ax^3 + bx^2 + cx + d) : (x - x_0) = fx^2 + dx + e$

$f(x) = (ax^3 + bx^2 + cx + d) = (x - x_0) \cdot (fx^2 + dx + e)$

$x^3 + 3x^2 - 4 = 0$

$x^3 + 3x^2 - 4 = 0$
$d = 4$ Ganzzahlige Faktoren: $\pm 1, \pm 2, \pm 4$
$f(1) = 0$
Nullstelle gefunden: $x_1 = 1$

$$\begin{array}{lllll}
(x^3 & +3x^2 & & -4 &) : (x-1) = x^2+4x+4 \\
-(x^3 & -x^2) & & & \\
\hline
& 4x^2 & & -4 & \\
& -(4x^2 & -4x) & & \\
\hline
& & 4x & -4 & \\
& & -(4x & -4) & \\
\hline
& & & 0 &
\end{array}$$

$1x^2 + 4x + 4 = 0$

$x_{2/3} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1}$

$x_{2/3} = \frac{-4 \pm \sqrt{0}}{2}$

$x_{2/3} = \frac{-4 \pm 0}{2}$

$x_2 = \frac{-4 + 0}{2} \qquad x_3 = \frac{-4 - 0}{2}$

$x_2 = -2 \qquad x_3 = -2$

Interaktive Inhalte: hier klicken

1.3.5 Gleichungen höheren Grades

Gerader Exponent: $ax^n + c = 0$

$ax^n + c = 0 \quad / - c$
$ax^n = -c \quad / : a$
$x_{1/2} = \pm \sqrt[n]{\frac{-c}{a}}$
Diskriminante:
$D = \frac{-c}{a}$
$D = 0$ eine Lösung
$D > 0$ zwei Lösungen
$D < 0$ keine Lösung

$-2x^4 + 162 = 0 \qquad / - 162$
$-2x^4 = -162 \qquad / : (-2)$
$x^4 = \frac{-162}{-2}$
$x = \pm \sqrt[4]{81}$
$x_1 = 3 \qquad x_2 = -3$

Ungerader Exponent: $ax^n + c = 0$

Umformen:
$ax^n + b = 0$

$ax^n + b = 0 \qquad / - b$
$ax^n = -b \qquad / : a$
$x^n = \frac{-b}{a}$
$x = \sqrt[n]{\frac{-b}{a}}$
$\frac{-b}{a} > 0 \qquad x = \sqrt[n]{\frac{-b}{a}}$
$\frac{-b}{a} < 0 \qquad x = -\sqrt[n]{\left|\frac{-b}{a}\right|}$

$5x^3 + 320 = 0 \qquad / - 320$
$5x^3 = -320 \qquad / : 5$
$x^3 = -\frac{320}{5}$
$x = -\sqrt[3]{64}$
$x = -4$

Biquadratische Gleichung

$ax^4 + bx^2 + c = 0$
Substitution: $u = x^2 \qquad u^2 = x^4$
Quadratische Gleichung: $au^2 + bu + c = 0$
Lösungen: $u_1 \qquad u_2$
Resubstitution: $x^2 = u_1 \qquad x^2 = u_2$

$x^4 - 10x^2 + 9 = 0$
$u = x^2 \qquad u^2 = x^4$
$1u^2 - 10u + 9 = 0$

$u_{1/2} = \frac{+10 \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9}}{2 \cdot 1}$
$u_{1/2} = \frac{+10 \pm \sqrt{64}}{2}$
$u_{1/2} = \frac{10 \pm 8}{2}$
$u_1 = \frac{10 + 8}{2} \qquad u_2 = \frac{10 - 8}{2}$
$u_1 = 9 \qquad u_2 = 1$
$x^2 = 9$
$x = \pm\sqrt{9}$
$x_1 = 3 \qquad x_2 = -3$
$x^2 = 1$
$x = \pm\sqrt{1}$
$x_3 = 1 \qquad x_4 = -1$

Interaktive Inhalte: hier klicken

1.3.6 Bruchgleichung

Überkreuzmultiplikation

- Nullstellen des Nenners aus dem Definitionsbereich ausschließen.
- Das Produkt aus dem Zähler des linken Bruchs und dem Nenner des rechten Bruchs ist gleich dem Produkt aus dem Nenner des linken Bruchs und dem Zähler des rechten Bruchs.
- Gleichung lösen
- Lösungen müssen im Definitionsbereich enthalten sein.

$\frac{a}{bx + c} = \frac{d}{ex + f} \qquad a \cdot (ex + f) = d \cdot (bx + c)$

$\frac{2}{x+4} = \frac{3}{x-1}$
Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-4; 1\}$
Überkreuzmultiplikation: $2 \cdot (x - 1) = 3 \cdot (x + 4)$
$2x - 1 = 3x + 12$
$x = -13$

Mit dem Hauptnenner durchmultiplizieren

- Nullstellen des Nenners aus dem Definitionsbereich ausschließen.
- Gleichung mit dem Hauptnenner durchmultiplizieren
- Gleichung lösen
- Lösungen müssen im Definitionsbereich enthalten sein.

$\frac{2}{5x} = \frac{1}{x+3}$
Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-3; 0\}$
Hauptnenner:5x(x+3)
$\frac{2 \cdot 5x(x+3)}{5x} = \frac{1 \cdot 5x(x+3)}{(x+3)}$
$2 \cdot (x + 3) = 5x$
$2x + 6 = 5x$
$x = 2$

1.3.7 Exponentialgleichungen

$a \cdot b^{(cx+d)} + f = 0$

$a \cdot b^{(cx+d)} + f = 0$
$a \cdot b^{(cx+d)} + f = 0 \qquad / - f$
$a \cdot b^{(cx+d)} = -f \qquad / : a$
$b^{(cx+d)} = \frac{-f}{a} \qquad / \log_b(...)$
$\frac{-f}{a} > 0 \Rightarrow$
$\log_b \left(b^{(cx+d)}\right) = \log_b \left(\frac{-f}{a}\right)$
Logarithmengesetz: $log_b b^n = n \log_b b = n$
$(cx+d) \log_b (b) = \log_b \left(\frac{-f}{a}\right)$
$cx + d = \log_b \left(\frac{-f}{a}\right) \qquad / - d \qquad / : c$
$x = \frac{\log_b\left(\frac{-f}{a}\right) - d}{c}$
$\frac{-f}{a} \leq 0 \Rightarrow$ keine Lösung

$-2 \cdot 2^{(2x+3)} + 4 = 0$
$-2 \cdot 2^{(2x+3)} + 4 = 0 \qquad / - 4$
$-2 \cdot 2^{(2x+3)} = -4 \qquad / : -2$
$2^{(2x+3)} = 2 \qquad / \log_2$
$2x + 3 = \log_2(2) \qquad / - 3 \qquad / : 2$
$x = -1$
Basis: $e = 2,718..$(eulersche Zahl)
$2 \cdot e^{(3x+4)} - 6 = 0$
$2 \cdot e^{(3x+4)} - 6 = 0 \qquad / + 6$
$2 \cdot e^{(3x+4)} = +6 \qquad / : 2$
$e^{(3x+4)} = 3 \qquad / \ln$
$3x + 4 = \ln(3) \qquad / - 4 \qquad / : 3$
$x = -0,967$

Interaktive Inhalte: $ab^{(cx+d)} + f = 0$ - $ae^{(cx+d)} + f = 0$ -

1.3.8 Logarithmusgleichungen

$a \log_b (cx + d) + f = 0$

$a \log_b (cx + d) + f = 0$
$a \log_b (cx + d) + f = 0 \qquad / - f$
$a \log_b (cx + d) = -f \qquad / : a$
$\log_b (cx + d) = \frac{-f}{a} \qquad / b$
$b^{(\log_b (cx+d))} = b^{\left(\frac{-f}{a}\right)}$
$cx + d = b^{\left(\frac{-f}{a}\right)} \qquad / - d \qquad / : c$
$x = \dfrac{b^{\left(\frac{-f}{a}\right)} - d}{c}$

$2 \cdot log_3(4x + 5) - 4 = 0$
$2 \cdot log_3(4x + 5) - 4 = 0 \qquad / + 4$
$2 \cdot log_3(4x + 5) = +4 \qquad / : 2$
$\log_3 (4x + 5) = 2 \qquad / 3^{..}$
$4x + 5 = 3^2 \qquad / - 5 \qquad / : 4$
$x = \dfrac{3^2 - 5}{4}$
Basis: $e = 2,718..$(eulersche Zahl)
$\log_e x = lnx \quad 4 \cdot ln(5x + 7) + 8 = 0$
$4 \cdot ln(5x + 7) + 8 = 0 \qquad / - 8$
$4 \cdot ln(5x + 7) = -8 \qquad / : 4$
$\ln(5x + 7) = -2 \qquad / e^{..}$
$5x + 7 = e^{-2} \qquad / - 7 \qquad / : 5$
$x = \dfrac{e^{-2} - 7}{5}$
$x = -1,37$

$\log_b x = 0$

$\log_b x = 0 \quad / b$
$x = b^0$
$x = 1$
$\lg x = 0 \quad / 10$
$x = 10^0$
$x = 1$
$\ln x = 0 \quad / e$
$x = e^0$
$x = 1$

Interaktive Inhalte: $a \log_b (cx + d) + f = 0$ - $a \ln (cx + d) + f = 0$ -

1.3.9 Betragsgleichung

$|ax+b| = c$

• Aufspalten der Beträge in einzelne Intervalle.

Betragsstriche sind nicht nötig, wenn der Term des Betrags positiv ist. $ax+b \geq 0$ für $x \geq \frac{-b}{a}$

Betragsstriche sind nicht nötig, wenn der Term des Betrags negativ ist und dafür zusätzlich ein Minuszeichen vor dem Term geschrieben wird. $ax+b < 0$ für $x < \frac{-b}{a}$

$|ax+b| = \begin{cases} (ax+b) & x \geq \frac{-b}{a} \\ -(ax+b) & x < \frac{-b}{a} \end{cases}$

• 1. Lösung für $x \geq \frac{-b}{a}$

$ax+b = c$

$ax+b = c \quad /-b \quad /:a$

$x = \frac{c-b}{a}$

•1. Lösung ist die Schnittmenge aus $x \geq \frac{-b}{a} \wedge x = \frac{c-b}{a}$

• 2. Lösung für $x < \frac{-b}{a}$

$-(ax+b) = c \quad /:(-1)$

$ax+b = -c$

$ax+b = -c \quad /-b \quad /:a$

$x = \frac{-c-b}{a}$

• 2. Lösung ist die Schnittmenge aus $x > \frac{-b}{a} \wedge x = \frac{-c-b}{a}$

• Gesamtlösung aus Vereinigungsmenge von 1. Lösung und 2. Lösung

$|2x+3| = 7$

$|2x+3| = \begin{cases} (2x+3) & x \geq \frac{-3}{2} \\ -(2x+3) & x < \frac{-3}{2} \end{cases}$

• 1. Lösung für $x \geq \frac{-3}{2}$

$2x+3 = 7$

$2x+3 = 7 \quad /-3 \quad /:2$

$x = 2$

1. Lösung ist die Schnittmenge aus $x \geq \frac{-3}{2} \wedge x = 2$

1. Lösung $x = 2$

• 2. Lösung für $x < \frac{-3}{2}$

$-(2x+3) = 7$

$2x+3 = -7 \quad /-3 \quad /:2$

$x = -5$

2. Lösung ist die Schnittmenge aus $x < \frac{-3}{2} \wedge x = -5$

2. Lösung $x = -5$

Vereinigungsmenge aus 1. Lösung und 2. Lösung

$x = 2 \quad \vee \quad x = -5$

$|2x+3| = -7$

$|2x+3| = \begin{cases} (2x+3) & x \geq \frac{-3}{2} \\ -(2x+3) & x < \frac{-3}{2} \end{cases}$

• 1. Lösung für $x \geq \frac{-3}{2}$

$2x+3 = -7$

$2x+3 = -7 \quad /-3 \quad /:2$

$x = -5$

1. Lösung ist die Schnittmenge aus $x \geq \frac{-3}{2} \wedge x = -5$

1. Lösung ist Leeremenge

• 2. Lösung für $x < \frac{-3}{2}$

$-(2x+3) = -7$

$2x+3 = +7 \quad /-3 \quad /:2$

$x = 2$

2. Lösung ist die Schnittmenge aus $x < \frac{-3}{2} \wedge x = 2$

2. Lösung ist Leeremenge

Gesamtlösung ist Leeremenge

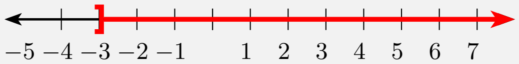
1.4 Ungleichungen

1.4.1 Grundlagen

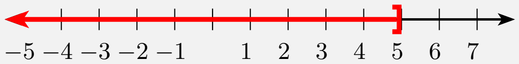
Ungleichheitszeichen

$x < b$	kleiner als	weniger als
$x > b$	größer als	mehr als
$x \leq b$	kleiner oder gleich	höchstens
$x \geq b$	größer oder gleich	mindestens

$x > -3$



$x \leq 5$



Intervalle in der Mengenschreibweise

offenes Intervall

Intervall	Mengenschreibweise
$a < x < b$	$]a; b[= \{x \in \mathbb{R} \vert a < x < b\}$
$x < b$	$]-\infty; b[= \{x \in \mathbb{R} \vert x < b\}$
$x > a$	$]a; \infty[= \{x \in \mathbb{R} \vert x > a\}$

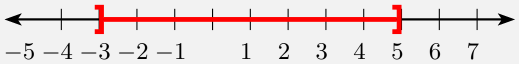
halboffenes Intervall

Intervall	Mengenschreibweise
$a < x \leq b$	$]a; b] = \{x \in \mathbb{R} \vert a < x \leq b\}$
$a \leq x < b$	$[a; b[= \{x \in \mathbb{R} \vert a \leq x < b\}$
$x \leq b$	$]-\infty; b] = \{x \in \mathbb{R} \vert x \leq b\}$
$x \geq a$	$[a; \infty[= \{x \in \mathbb{R} \vert x \geq a\}$

abgeschlossenes Intervall

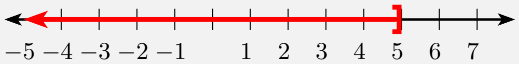
Intervall	Mengenschreibweise
$a \leq x \leq b$	$[a; b] = \{x \in \mathbb{R} \vert a \leq x \leq b\}$

$]-3; 5] = \{x \in \mathbb{R} | -3 < x \leq 5\}$



$-3 \notin]-3; 5]$ $\quad 5 \in]-3; 5]$ $\quad -1 \in]-3; 5]$ $\quad 6 \notin]-3; 5]$

$]-\infty; 5] = \{x \in \mathbb{R} | x \leq 5\}$



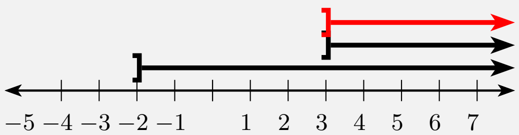
$-123 \in]-\infty; 5]$ $\quad 5 \in]-\infty; 5]$ $\quad 6 \notin]-\infty; 5]$

Schnittmenge ∩ - und zugleich ∧

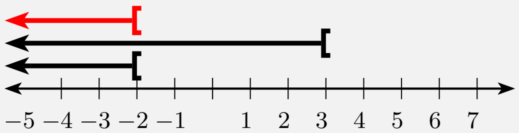
$a < b \qquad \mathbb{G} = \mathbb{R}$

Intervall		Mengen	
$x > a \wedge x > b$	$x > b$	$]a; \infty[\cap]b; \infty[$	$]b; \infty[$
$x < a \wedge x < b$	$x < a$	$]-\infty; a[\cap]-\infty; b[$	$]-\infty; a[$
$x > a \wedge x < b$	$a < x < b$	$]a; \infty[\cap]-\infty; b[$	$]a; b[$
$x < a \wedge x > b$	$\{\}$	$]-\infty; a[\cap]b; \infty[$	$\{\}$

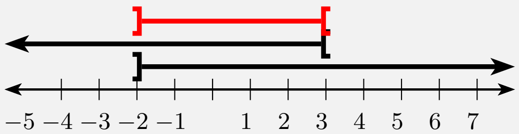
$x > -2 \wedge x > 3 = x > 3 \quad]-2; \infty[\cap]3; \infty[=]3; \infty[$



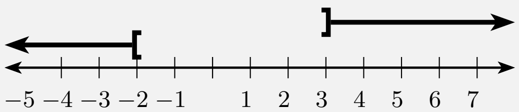
$x < -2 \wedge x < 3 = x < -2 \quad]-\infty; -2[\cap]-\infty; 3[=]-\infty; -2[$



$x > -2 \wedge x < 3 = -2 < x < 3 \quad]-2; \infty[\cap]-\infty; 3[=]-2; 3[$



$x < -2 \wedge x > 3 = \{\} \quad]-\infty; -2[\cap]3; \infty[= \{\}$

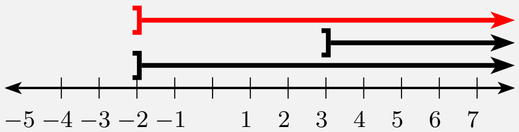


Vereinigungsmenge $\cup$ - oder auch $\vee$

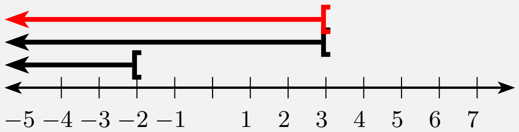
$a < b \qquad \mathbb{G} = \mathbb{R}$

Intervall		Mengen	
$x > a \vee x > b$	$x > a$	$]a;\infty[\,\cup\,]b;\infty[$	$]a;\infty[$
$x < a \vee x < b$	$x < b$	$]-\infty;a[\,\cup\,]-\infty;b[$	$]-\infty;b[$
$x > a \vee x < b$	$x \in \mathbb{R}$	$]a;\infty[\,\cup\,]-\infty;b[$	$\mathbb{R}$
$x < a \vee x > b$		$]-\infty;a[\,\cup\,]b;\infty[$	$\mathbb{R} \setminus [a;b]$

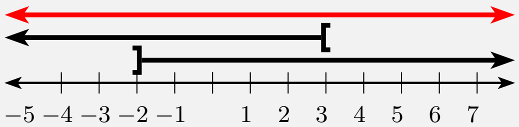
$x > -2 \vee x > 3 = x > -2 \qquad]-2;\infty[\,\cup\,]3;\infty[\, = \,]-2;\infty[$



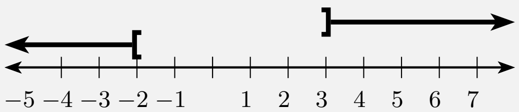
$x < -2 \vee x < 3 = x < 3 \qquad]-\infty;-2[\,\cup\,]-\infty;3[\, = \,]-\infty;3[$



$x > -2 \vee x < 3 = x \in \mathbb{R} \qquad]-2;\infty[\,\cup\,]-\infty;3[\, = \mathbb{R}$



$x < -2 \vee x > 3 \qquad]-\infty;-2[\,\cup\,]3;\infty[$



1.4.2 Äquivalenzumformung

Durch eine Äquivalenzumformung ändert sich die Lösungsmenge einer Ungleichung nicht.

Äquivalenzumformungen von Ungleichungen

- Vertauschen der beiden Seiten $\Rightarrow$ Umdrehen des Ungleichheitszeichens
- Addition des gleichen Terms (Zahl) auf beiden Seiten
- Subtraktion des gleichen Terms auf beiden Seiten
- Multiplikation mit dem gleichen Term (ungleich Null) auf beiden Seiten

Multiplikation mit einer negativen Zahl $\Rightarrow$ Umdrehen des Ungleichheitszeichens

- Division durch mit dem gleichen Term (ungleich Null) auf beiden Seiten

Division mit einer negativen Zahl $\Rightarrow$ Umdrehen des Ungleichheitszeichens

Vertauschen der beiden Seiten

$x - 2 > 8 \qquad 8 < x - 2$

Addition des gleichen Terms auf beiden Seiten

$x - 2 > 8 \qquad / + 2$

$x - 2 + 2 > 8 + 2$

$x > 10$

Subtraktion des gleichen Terms auf beiden Seiten

$3x - 2 \leq 2x + 3 \qquad / - 2x$

$3x - 2x - 2 \leq 2x - 2x + 3$

$x - 2 \leq 3$

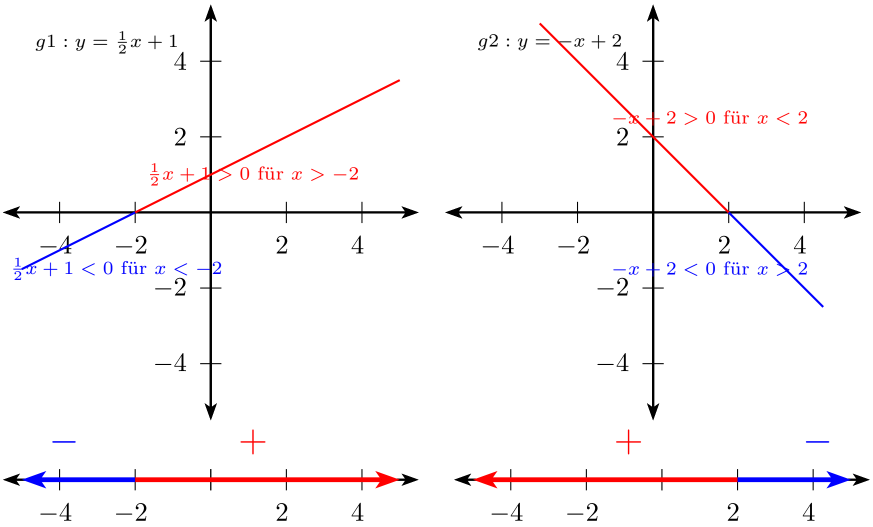
Multiplikation mit dem gleichen Term auf beiden Seiten

$\frac{x}{2} < -4 \qquad / \cdot 2$	$\frac{x}{-2} < -4 \qquad \cdot (-2)$
$\frac{x}{2} \cdot 2 < -4 \cdot 2$	$\frac{x}{-2} \cdot (-2) > -4 \cdot (-2)$
$x < -8$	$x > 8$

Division durch mit dem gleichen Term auf beiden Seiten

$2x > -4 \qquad / : 2$	$\frac{x}{-2} > -4 \qquad / : (-2)$
$\frac{x}{2} \cdot 2 > -4 \cdot 2$	$\frac{x}{-2} \cdot (-2) < -4 : (-2)$
$x > -8$	$x < 8$

1.4.3 Lineare Ungleichung



Algebraische Lösung

$ax + b > 0 \qquad (>, <, \leq, \geq)$

- Klammern auflösen
- Terme zusammenfassen
- Äquivalenzumformung: Alle Terme mit der Variablen auf die linke Seite und alle Terme ohne Variable auf die rechte Seite.
- durch die Zahl vor der Variablen dividieren

Division oder Multiplikation mit einer negativen Zahl $\Rightarrow$ Umdrehen des Ungleichheitszeichens

$2\frac{1}{2}x + 5 \leq 4(x-2) - 2x + 12$
Klammern auflösen
$2\frac{1}{2}x + 5 \leq 4x - 8 - 2x + 12$
Terme zusammenfassen
$2\frac{1}{2}x + 5 \leq 2x + 4$
Äquivalenzumformung:
$2\frac{1}{2}x + 5 \leq 2x + 4 \qquad / - 5 \qquad / - 2x$
$2\frac{1}{2}x - 2x \leq 4 - 5$
durch die Zahl vor der Variablen dividieren
$\frac{1}{2}x \leq -1 \qquad / : \frac{1}{2}$
$x \leq \frac{-1}{\frac{1}{2}}$
$x \leq -2 \qquad x \in]-\infty; 2[$

$-x + 2 > 0$
$-x + 2 = 0 \qquad / - 2$
$-x > -2 \qquad / : (-1)$
$x < 2 \qquad x \in]-\infty; 2[$

Graphische Lösung

$ax + b > 0 \qquad (>, <, \leq, \geq)$

- Klammern auflösen
- Terme zusammenfassen
- Äquivalenzumformung: Alle Terme auf die linke Seite.
- Term als Funktion schreiben
- Nullstelle berechnen
- Graph der Funktion zeichnen
- Graph oberhalb der x-Achse $y > 0$
- Graph ist unterhalb der x-Achse $y < 0$
- x-Bereich aus dem Graphen ablesen

$2\frac{1}{2}x + 5 \leq 4(x-2) - 2x + 12$
Klammern auflösen
$2\frac{1}{2}x + 5 \leq 4x - 8 - 2x + 12$
Terme zusammenfassen
$2\frac{1}{2}x + 5 \leq 2x + 4$
Äquivalenzumformung
$2\frac{1}{2}x + 5 \leq 2x + 4 \qquad / - 5 \qquad / - 2x$
$\frac{1}{2}x + 1 \leq 0$
$y \leq 0$
Term als Funktion schreiben
$g_1 : y = \frac{1}{2}x + 1$
Nullstelle berechnen
$\frac{1}{2}x + 1 = 0 \qquad / - 1$
$\frac{1}{2}x = -1 \qquad / : \frac{1}{2}$
$x = -2$
Graph zeichnen g_1
$y \leq 0$ der Graph ist unterhalb der x-Achse
x-Bereich aus dem Graphen ablesen
$x \leq -2 \qquad x \in]-\infty; -2]$

$-x + 2 > 0$
Term als Funktion schreiben
$g_2 : y = -x + 2 \quad y > 0$
Nullstelle berechnen
$-x + 2 = 0 \qquad / - 2$
$-x = -2 \qquad / : (-1)$
$x = 2$
Graph zeichnen g_2
$y > 0$ der Graph ist oberhalb der x-Achse
x-Bereich aus dem Graphen ablesen
$x < 2 \qquad \in]-\infty; 2[$

Vorzeichentabelle

$ax + b > 0 \qquad (>, <, \leq, \geq)$

- Klammern auflösen
- Terme zusammenfassen
- Äquivalenzumformung: Alle Terme auf die linke Seite.
- Term als Funktion schreiben
- Nullstelle berechnen
- Vorzeichentabelle

Das Vorzeichen einer linearen Funktion kann sich nur an den Nullstellen ändern. Einen beliebigen Wert kleiner bzw. größer als die Nullstelle wählen und das Vorzeichen des Funktionswerts in die Vorzeichentabelle eintragen.

- x-Bereich aus der Vorzeichentabelle ablesen

	$x <$	x_1	$< x$
y	$+$	0	$-$
	$ax + b > 0$		$ax + b < 0$

	$x <$	x_1	$< x$
y	$-$	0	$+$
	$ax + b < 0$		$ax + b > 0$

$\frac{1}{2}x + 1 \leq 0$
$y \leq 0 \quad -$ negative Funktionswerte
Term als Funktion schreiben
$g_1 : y = \frac{1}{2}x + 1$
Nullstelle berechnen
$\frac{1}{2}x + 1 = 0 \qquad / - 1$
$\frac{1}{2}x = -1 \qquad / : \frac{1}{2}$
$x = -2$
Wert kleiner als die Nullstelle wählen: $\quad x = -4$
$g1 : y = \frac{1}{2} \cdot (-4) + 1 = -1 \quad$ Minuszeichen eintragen
Wert größer als die Nullstelle wählen: $\quad x = 0$
$g1 : y = \frac{1}{2} \cdot (0) + 1 = +1 \quad$ Pluszeichen eintragen
Vorzeichentabelle:

	$x <$	-2	$< x$
y	$-$	0	$+$
	$\frac{1}{2}x + 1 < 0$		$\frac{1}{2}x + 1 > 0$

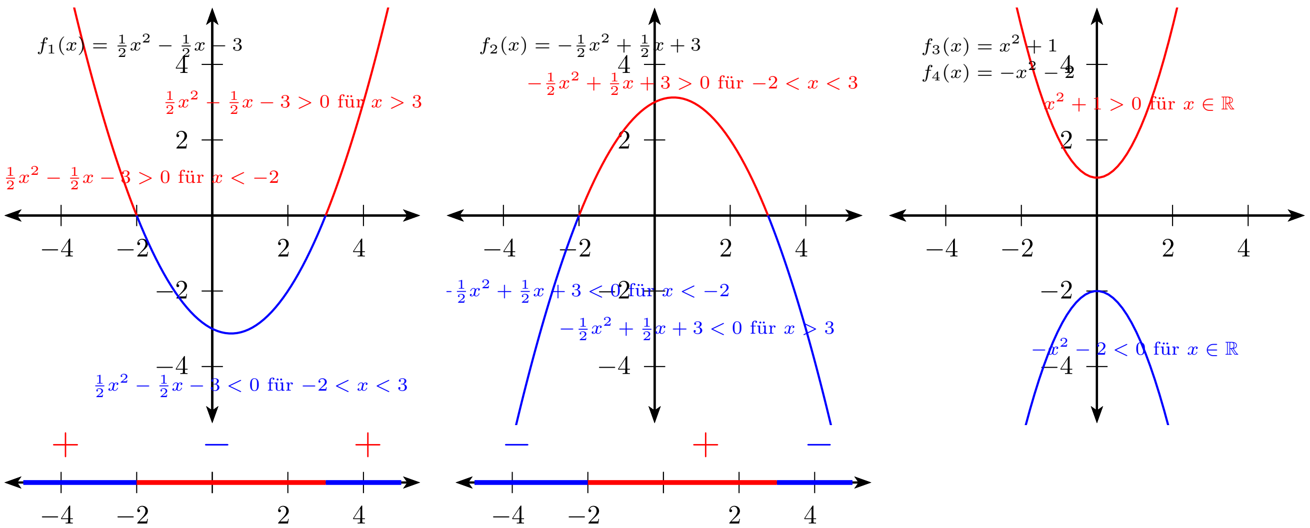
Lösung der Ungleichung: $\frac{1}{2}x + 1 \leq 0$
$x \leq -2 \qquad x \in]-\infty; -2]$

$-x + 2 > 0$
$y > 0 \quad +$positive Funktionswerte
Term als Funktion schreiben
$g_2 : y = -x + 2$
Nullstelle berechnen
$-x + 2 = 0 \qquad / - 2$
$-x = -2 \qquad / : (-1)$
$x = 2$
Wert kleiner als die Nullstelle wählen: $\quad x = 0$
$g2 : y = -0 + 1 = +1 \quad$ Pluszeichen eintragen
Wert größer als die Nullstelle wählen: $\quad x = 2$
$g2 : y = -2 + 1 = -1 \quad$ Minuszeichen eintragen
Vorzeichentabelle:

	$x <$	2	$< x$
y	$+$	0	$-$
	$-x + 2 > 0 \quad x < 2$		$-x + 2 < 0 \quad x > 2$

Lösung der Ungleichung: $-x + 2 > 0$
$x < 2 \qquad x \in]-\infty; 2[$

1.4.4 Quadratische Ungleichung



Algebraische Lösung

$ax^2 + bx + c > 0 \qquad (>, <, \leq, \geq)$

- 1. Methode
- Ungleichung nach Null auflösen
- quadratische Ergänzung
- quadratischen Term alleinstellen
- Wurzelziehen und Betrag schreiben
- Betragsungleichung lösen
- 2. Methode
- Ungleichung nach Null auflösen
- Term faktorisieren

$a(x - x_1)(x - x_2)$

- Auspalten in lineare Ungleichungen

1. Fall $\qquad a(x - x_1)(x - x_2) > 0$

$(+ \cdot + = +) \vee (- \cdot - = +)$

$(a(x - x_1) > 0 \wedge x - x_2 > 0) \vee$

$(a(x - x_1) < 0 \wedge x - x_2 < 0)$

2. Fall $\qquad a(x - x_1)(x - x_2) < 0$

$(+ \cdot - = -) \vee (- \cdot + = -)$

$(a(x - x_1) > 0 \wedge x - x_2 < 0) \vee$

$(a(x - x_1) < 0 \wedge x - x_2 > 0)$

- Zusammenfassen der einzelnen Lösungen

1. Methode

$\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 3 > 0$

quadratische Ergänzung

$\frac{1}{2}(x^2 - x + \frac{1}{2}^2 - \frac{1}{2}^2 - 6) > 0$

$\frac{1}{2}[(x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} - 6] > 0$

$\frac{1}{2}[(x - \frac{1}{2})^2 - 6\frac{1}{4}] > 0$

$\frac{1}{2}(x - \frac{1}{2})^2 - 3\frac{1}{8} > 0$

quadratischen Term alleinstellen

$(x - \frac{1}{2})^2 > \frac{25}{4}$

Wurzelziehen und Betrag schreiben

$|x - \frac{1}{2}| > \frac{5}{2}$

Betragsungleichung

$x > 3 \quad \vee \quad x < -2$

2. Methode

$\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 3 > 0$

Term faktorisieren

$\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 3 = 0$

$x_1 = 3 \qquad x_2 = -2$

$\frac{1}{2}(x + 2)(x - 3) > 0$

Aufspalten in lineare Ungleichungen

$(\frac{1}{2}(x + 2) > 0 \wedge x - 3 > 0) \vee (\frac{1}{2}(x + 2) < 0 \wedge x - 3 < 0)$

$(x > -2 \wedge x > 3) \vee (x < -2 \wedge x < 3)$

Lösungen zusammenfassen

$x > 3 \vee x < -2$

Graphische Lösung

$ax^2 + bx + c > 0 \qquad (>, <, \leq, \geq)$

- Äquivalenzumformung: Alle Terme auf die linke Seite.
- Term als Funktion schreiben
- Nullstelle berechnen
- Graph der Funktion zeichnen
- Graph oberhalb der x-Achse $f(x) > 0$
- Graph unterhalb der x-Achse $f(x) < 0$
- x-Bereich aus dem Graphen ablesen

$\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 3 > 0$

$f_1(x) > 0$

Term als Funktion schreiben

$f_1(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 3$

Nullstelle berechnen

$\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 3 = 0$

$$x_{1/2} = \frac{+\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot (-3)}}{2 \cdot \frac{1}{2}}$$

$x_1 = 3 \qquad x_2 = -2$

Graph zeichnen $f_1(x)$

$\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 3 > 0 \qquad$ der Graph ist oberhalb der x-Achse

x-Bereich aus dem Graphen ablesen

$x > 3 \vee x < -2$

Vorzeichentabelle

$ax^2 + bx + c > 0 \qquad (>, <, \leq, \geq)$

- Äquivalenzumformung: Alle Terme auf die linke Seite.
- Term als Funktion schreiben
- Nullstelle berechnen
- Vorzeichentabelle

Das Vorzeichen einer quadratischen Funktion kann sich nur an den Nullstellen ändern. Einen beliebigen Wert kleiner bzw. größer als die Nullstelle wählen und das Vorzeichen des Funktionswerts in die Vorzeichentabelle eintragen.

- x-Bereich aus der Vorzeichentabelle ablesen

$\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 3 > 0$
$f_1(x) > 0$
Term als Funktion schreiben
$f_1(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 3$
Nullstelle berechnen
$\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 3 = 0$

$$x_{1/2} = \frac{+\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot (-3)}}{2 \cdot \frac{1}{2}}$$

$x_1 = -2 \qquad x_2 = 3$
Wert kleiner als die Nullstelle $x_1 = -2$ wählen $\quad x = -4$
$f_1(-4) = +7$ Pluszeichen eintragen
Wert zwischen $x_1 = -2$ und $x_2 = 3$ wählen $\quad x = 0$
$f_1(0) = -3$ Minuszeichen eintragen
Wert größer als die Nullstelle $x_2 = 3$ wählen $\quad x = 4$
$f_1(4) = +3$ Pluszeichen eintragen
Vorzeichentabelle:

	$x <$	-2	$< x <$	3	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 3 > 0$
x-Bereiche aus der Vorzeichentabelle ablesen
$x \in]-\infty; -2[\quad \cup \quad]3; \infty[$

1.4.5 Betragsungleichung

$|ax + b| > c$

- Aufspalten der Beträge in einzelne Intervalle.

Betragsstriche sind nicht nötig, wenn der Term des Betrags positiv ist. $\quad ax + b \geq 0$ für $x \geq \frac{-b}{a}$
Betragsstriche sind nicht nötig, wenn der Term des Betrags negativ ist und dafür zusätzlich ein Minuszeichen vor dem Term geschrieben wird. $\quad ax + b < 0$ für $x < \frac{-b}{a}$

$$|ax + b| = \begin{cases} (ax + b) & x \geq \frac{-b}{a} \\ -(ax + b) & x < \frac{-b}{a} \end{cases}$$

- 1. Lösung für $x \geq \frac{-b}{a}$

$ax + b > c$
$ax + b > c \quad / - b \quad / : a \qquad (a > 0)$
$x > \frac{c-b}{a}$
1. Lösung ist die Schnittmenge aus $x \geq \frac{-b}{a} \wedge x > \frac{c-b}{a}$

- 2. Lösung für $x < \frac{-b}{a}$

$-(ax + b) > c \quad / : (-1)$
$ax + b < -c$
$ax + b < -c \quad / - b \quad / : a \quad (a > 0)$
$x < \frac{-c-b}{a}$
2. Lösung ist die Schnittmenge aus $x < \frac{-b}{a} \wedge x < \frac{-c-b}{a}$

- Gesamtlösung aus Vereinigungsmenge von 1. Lösung und 2. Lösung

$|2x + 3| > 7$

$$|2x + 3| = \begin{cases} (2x + 3) & x \geq \frac{-3}{2} \\ -(2x + 3) & x < \frac{-3}{2} \end{cases}$$

- 1. Lösung für $x \geq \frac{-3}{2}$

$2x + 3 > 7$
$2x + 3 > 7 \quad / - 3 \quad / : 2$
$x > 2$
1. Lösung ist die Schnittmenge aus $x \geq \frac{-3}{2} \wedge x > 2$
1. Lösung $x > 2$

- 2. Lösung für $x < \frac{-3}{2}$

$-(2x + 3) > 7$
$2x + 3 < -7 \quad / - 3 \quad / : 2$
$x < -5$
2. Lösung ist die Schnittmenge aus $x < \frac{-3}{2} \wedge x < -5$
2. Lösung $x < -5$
Vereinigungsmenge aus 1. Lösung und 2. Lösung
$x > 2 \quad \vee \quad x < -5$

$|2x + 3| < 7$

$$|2x + 3| = \begin{cases} (2x + 3) & x \geq \frac{-3}{2} \\ -(2x + 3) & x < \frac{-3}{2} \end{cases}$$

- 1. Lösung für $x \geq \frac{-3}{2}$

$2x + 3 < 7$
$2x + 3 < 7 \quad / - 3 \quad / : 2$
$x < 2$
1. Lösung ist die Schnittmenge aus $x \geq \frac{-3}{2} \wedge x < 2$
1. Lösung $\frac{-3}{2} \leq x < 2$

- 2. Lösung für $x < \frac{-3}{2}$

$-(2x + 3) < 7$
$2x + 3 > -7 \quad / - 3 \quad / : 2$
$x > -5$
2. Lösung ist die Schnittmenge aus $x < \frac{-3}{2} \wedge x > -5$
2. Lösung $\ -5 < x < \frac{-3}{2}$
Vereinigungsmenge aus 1. Lösung und 2. Lösung
$-5 < x < 2$

1.5 Lineares Gleichungssystem

1.5.1 Einsetzverfahren (2)

$I \qquad a1 \cdot x + b1 \cdot y = c1$

$II \qquad a2 \cdot x + b2 \cdot y = c2$

- Gleichung I oder II nach x oder y auflösen
- Term in die andere Gleichung einsetzen
- Gleichung nach der Unbekannten auflösen
- Zweite Unbekannte berechnen

$I \qquad 3x + 5y = 19$
$II \qquad 7x + 5y = 31$
I nach x auflösen
$3x + 5y = 19$
$3x + 5y = 19 \qquad / - 5y$
$3x = 19 - 5y \qquad / : 3$
$x = 6\frac{1}{3} - 1\frac{2}{3}y$
I in II
$7(6\frac{1}{3} - 1\frac{2}{3}y) + 5y = 31$
$44\frac{1}{3} - 11\frac{2}{3}y + 5y = 31 \qquad / - 44\frac{1}{3}$
$-11\frac{2}{3}y + 5y = 31 - 44\frac{1}{3}$
$-6\frac{2}{3}y = -13\frac{1}{3} \qquad / : \left(-6\frac{2}{3}\right)$
$y = \frac{-13\frac{1}{3}}{-6\frac{2}{3}}$
$y = 2$
$x = 6\frac{1}{3} - 1\frac{2}{3}y$
$x = 6\frac{1}{3} - 1\frac{2}{3} \cdot 2$
$x = 3$
$L = \{3/2\}$

$I \qquad 3x + 5y = 19$
$II \qquad 7x + 5y = 31$
I nach y auflösen
$3x + 5y = 19$
$3x + 5y = 19 \qquad / - 3x$
$5y = 19 - 3x \qquad / : 5$
$y = 3\frac{4}{5} - \frac{3}{5}x$
I in II
$7x + 5(3\frac{4}{5} - \frac{3}{5}x) = 31$
$19 - 3x + 5x = 31 \qquad / - 19$
$-3x + 5x = 31 - 19$
$4x = 12 \qquad / : 4$
$x = \frac{12}{4}$
$x = 3$
$y = 3\frac{4}{5} - \frac{3}{5}x$
$y = 3\frac{4}{5} - \frac{3}{5} \cdot 3$
$y = 2$
$L = \{3/2\}$

Interaktive Inhalte: hier klicken

1.5.2 Gleichsetzungsverfahren (2)

$I \qquad a1 \cdot x + b1 \cdot y = c1$

$II \qquad a2 \cdot x + b2 \cdot y = c2$

- beide Gleichungen nach x oder y auflösen
- Terme gleichsetzen
- Gleichung nach der Unbekannten auflösen
- Zweite Unbekannte berechnen

$I \qquad 3x + 5y = 19$
$II \qquad 7x + 5y = 31$
I nach y auflösen
$3x + 5y = 19$
$3x + 5y = 19 \qquad / - 3x$
$5y = 19 - 3x \qquad / : 5$
$y = 3\frac{4}{5} - \frac{3}{5}x$
II nach y auflösen
$7x + 5y = 31$
$7x + 5y = 31 \qquad / - 7x$
$5y = 31 - 7x \qquad / : 5$
$y = 6\frac{1}{5} - 1\frac{2}{5}x$
I = II
$3\frac{4}{5} - \frac{3}{5}x = 6\frac{1}{5} - 1\frac{2}{5}x \qquad / + \frac{3}{5}x$
$3\frac{4}{5} = 6\frac{1}{5} - \frac{4}{5}x \qquad / - 6\frac{1}{5}$
$-2\frac{2}{5} = -\frac{4}{5}x \qquad / : \left(-\frac{4}{5}\right)$
$x = 3$
x in I
$y = 3\frac{4}{5} - \frac{3}{5}3$
$y = 2$
$L = \{3/2\}$

$I \qquad 3x + 5y = 19$
$II \qquad 7x + 5y = 31$
I nach x auflösen
$3x + 5y = 19$
$3x + 5y = 19 \qquad / - 5y$
$3x = 19 - 5y \qquad / : 3$
$x = 6\frac{1}{3} - 1\frac{2}{3}y$
II nach x auflösen
$7x + 5y = 31$
$7x + 5y = 31 \qquad / - 5y$
$7x = 31 - 5y \qquad / : 7$
$x = 4\frac{3}{7} - \frac{5}{7}y$
I = II
$6\frac{1}{3} - 1\frac{2}{3}y = 4\frac{3}{7} - \frac{5}{7}y \qquad / + 1\frac{2}{3}y$
$6\frac{1}{3} = 4\frac{3}{7} + \frac{20}{21}y \qquad / - 4\frac{3}{7}$
$1\frac{19}{21} = \frac{20}{21}y \qquad / : \frac{20}{21}$
$y = 2$
y in I
$x = 6\frac{1}{3} - 1\frac{2}{3}2$
$x = 3$
$L = \{3/2\}$

Interaktive Inhalte: hier klicken

1.5.3 Additionsverfahren (2)

$I \quad a1 \cdot x + b1 \cdot y = c1$
$II \quad a2 \cdot x + b2 \cdot y = c2$

• Terme mit x und y müssen untereinander stehen
• Gleichungen multiplizieren, so dass die Variablen beim spaltenweisen addieren herausfallen
• Gleichung nach der Unbekannten auflösen
• Zweite Unbekannte berechnen

$I \quad 3x + 5y = 19$
$II \quad 7x + 5y = 31$
$I \quad 3x + 5y = 19 \quad / \cdot 7$
$II \quad 7x + 5y = 31 \quad / \cdot (-3)$
$I \quad 21x + 35y = 133$
$II \quad -21x - 15y = -93$
I + II
$21x - 21x + 35y - 15y = 133 - 93$
$20y = 40 \quad / : 20$
$y = \frac{40}{20}$
$y = 2$
y in I
$I \quad 3x + 5 \cdot 2 = 19$
$3x + 10 = 19 \quad / - 10$
$3x = 19 - 10$
$3x = 9 \quad / : 3$
$x = \frac{9}{3}$
$x = 3$
$L = \{3/2\}$

$I \quad 3x + 5y = 19$
$II \quad 7x + 5y = 31$
$I \quad 3x + 5y = 19 \quad / \cdot 1$
$II \quad 7x + 5y = 31 \quad / \cdot (-1)$
$I \quad 3x + 5y = 19$
$II \quad -7x - 5y = -31$
I + II
$3x - 7x + 5y - 5y = 19 - 31$
$-4x = -12 \quad / : (-4)$
$x = \frac{-12}{-4}$
$x = 3$
x in I
$I \quad 3 \cdot 3 + 5y = 19$
$5y + 9 = 19 \quad / - 9$
$5y = 19 - 9$
$5y = 10 \quad / : 5$
$y = \frac{10}{5}$
$y = 2$
$L = \{3/2\}$

Interaktive Inhalte: hier klicken

1.5.4 Determinantenverfahren (2)

$I \quad a1 \cdot x + b1 \cdot y = c1$
$II \quad a2 \cdot x + b2 \cdot y = c2$

$$D_h = \begin{vmatrix} a1 & b1 \\ a2 & b2 \end{vmatrix} = a1 \cdot b2 - b1 \cdot a2$$
$$D_x = \begin{vmatrix} c1 & b1 \\ c2 & b2 \end{vmatrix} = c1 \cdot b2 - b1 \cdot c2$$
$$D_y = \begin{vmatrix} a1 & c1 \\ a2 & c2 \end{vmatrix} = a1 \cdot c2 - c1 \cdot a2$$

• Eindeutige Lösung $D_h \neq 0$
$x = \frac{D_x}{D_h}$
$y = \frac{D_y}{D_h}$

• Keine Lösung $D_h = 0$
$D_x \neq 0$ oder $D_y \neq 0$
• Unendlich viele Lösungen
$D_h = D_x = D_y = 0$

$I \quad 3x + 5y = 19$
$II \quad 7x + 5y = 31$
$$D_h = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 - 5 \cdot 7 = -20$$
$$D_x = \begin{vmatrix} 19 & 5 \\ 31 & 5 \end{vmatrix} = 19 \cdot 5 - 5 \cdot 31 = -60$$
$$D_y = \begin{vmatrix} 3 & 19 \\ 7 & 31 \end{vmatrix} = 3 \cdot 31 - 19 \cdot 7 = -40$$
$x = \frac{-60}{-20}$
$x = 3$
$y = \frac{-40}{-20}$
$y = 2$
$L = \{3/2\}$

Interaktive Inhalte: hier klicken

1.5.5 Determinantenverfahren (3)

$a1x + b1y + c1z = d1$
$a2x + b2y + c2z = d2$
$a3x + b3y + c3z = d3$

$$D_h = \left|\begin{array}{ccc|cc} a1 & b1 & c1 & a1 & b1 \\ a2 & b2 & c2 & a2 & b2 \\ a3 & b3 & c3 & a3 & b3 \end{array}\right|$$

$D_h = a1 \cdot b2 \cdot c3 + b1 \cdot c2 \cdot a3 + c1 \cdot a2 \cdot b3$
$- c1 \cdot b2 \cdot a3 - a1 \cdot c2 \cdot b3 - b1 \cdot a2 \cdot c3$

$$D_x = \left|\begin{array}{ccc|cc} d1 & b1 & c1 & d1 & b1 \\ d2 & b2 & c2 & d2 & b2 \\ d3 & b3 & c3 & d3 & b3 \end{array}\right|$$

$D_x = d1 \cdot b2 \cdot c3 + b1 \cdot c2 \cdot d3 + c1 \cdot d2 \cdot b3$
$- c1 \cdot b2 \cdot d3 - d1 \cdot c2 \cdot b3 - b1 \cdot d2 \cdot c3$

$$D_y = \left|\begin{array}{ccc|cc} a1 & d1 & c1 & a1 & d1 \\ a2 & d2 & c2 & a2 & d2 \\ a3 & d3 & c3 & a3 & d3 \end{array}\right|$$

$D_y = a1 \cdot d2 \cdot c3 + d1 \cdot c2 \cdot a3 + c1 \cdot a2 \cdot d3$
$- c1 \cdot d2 \cdot a3 - a1 \cdot c2 \cdot d3 - d1 \cdot a2 \cdot c3$

$$D_z = \left|\begin{array}{ccc|cc} a1 & b1 & d1 & a1 & b1 \\ a2 & b2 & d2 & a2 & b2 \\ a3 & b3 & d3 & a3 & b3 \end{array}\right|$$

$D_z = a1 \cdot b2 \cdot d3 + b1 \cdot d2 \cdot a3 + d1 \cdot a2 \cdot b3$
$- d1 \cdot b2 \cdot a3 - a1 \cdot d2 \cdot b3 - b1 \cdot a2 \cdot d3 = 0$

• Eindeutige Lösung $D_h \neq 0$
$x = \frac{D_x}{D_h}$
$y = \frac{D_y}{D_h}$
$z = \frac{D_z}{D_h}$
• Keine Lösung $D_h = 0$
$D_x \neq 0$ oder $D_y \neq 0$ oder $D_z \neq 0$
• Unendlich viele Lösungen
$D_h = D_x = D_y = D_z = 0$

$11x + 13y + 4z = 37$
$12x + 14y + 5z = 40$
$9x + 3y + 3z = 15$

$$D_h = \left|\begin{array}{ccc|cc} 11 & 13 & 4 & 11 & 13 \\ 12 & 14 & 5 & 12 & 14 \\ 9 & 3 & 3 & 9 & 3 \end{array}\right|$$

$D_h = 11 \cdot 14 \cdot 3 + 13 \cdot 5 \cdot 9 + 4 \cdot 12 \cdot 3$
$-4 \cdot 14 \cdot 9 - 11 \cdot 5 \cdot 3 - 13 \cdot 12 \cdot 3 = 54$

$$D_x = \left|\begin{array}{ccc|cc} 37 & 13 & 4 & 37 & 13 \\ 40 & 14 & 5 & 40 & 14 \\ 15 & 3 & 3 & 15 & 3 \end{array}\right|$$

$D_x = 37 \cdot 14 \cdot 3 + 13 \cdot 5 \cdot 15 + 4 \cdot 40 \cdot 3$
$-4 \cdot 14 \cdot 15 - 37 \cdot 5 \cdot 3 - 13 \cdot 40 \cdot 3 = 54$

$$D_y = \left|\begin{array}{ccc|cc} 11 & 37 & 4 & 11 & 37 \\ 12 & 40 & 5 & 12 & 40 \\ 9 & 15 & 3 & 9 & 15 \end{array}\right|$$

$D_y = 11 \cdot 40 \cdot 3 + 37 \cdot 5 \cdot 9 + 4 \cdot 12 \cdot 15$
$-4 \cdot 40 \cdot 9 - 11 \cdot 5 \cdot 15 - 37 \cdot 12 \cdot 3 = 108$

$$D_z = \left|\begin{array}{ccc|cc} 11 & 13 & 37 & 11 & 13 \\ 12 & 14 & 40 & 12 & 14 \\ 9 & 3 & 15 & 9 & 3 \end{array}\right|$$

$D_z = 11 \cdot 14 \cdot 15 + 13 \cdot 40 \cdot 9 + 37 \cdot 12 \cdot 3$
$-37 \cdot 14 \cdot 9 - 11 \cdot 40 \cdot 3 - 13 \cdot 12 \cdot 15 = 0$
$x = \frac{54}{54}$
$x = 1$
$y = \frac{108}{54}$
$y = 2$
$z = \frac{0}{54}$
$z = 0$
$L = \{1/2/0\}$

Interaktive Inhalte: hier klicken

1.6 Lineare Algebra

1.6.1 Matrix

Definition

Eine $m \times n$–*Matrix* ist ein rechteckiges Zahlenschema aus m Zeilen und n Spalten.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$A = (a_{ik})$

a_{ik} : Elemente der Matrix

i : Zeilenindex

k : Spaltenindex

• Quadratische Matrix

Die Anzahl der Zeilen ist gleich der Anzahl der Spalten $m = n$.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

3×3Quadratische Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$a_{11} = 1 \quad a_{12} = 2 \quad a_{13} = 3$

$a_{21} = 4 \quad a_{22} = 5 \quad a_{23} = 6$

$a_{31} = 7 \quad a_{32} = 8 \quad a_{33} = 9$

2×3 Matrix

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 13 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

1×3 Zeilenmatrix (Zeilenvektor)

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

3×1 Spaltenmatrix (Spaltenvektor)

$$D = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Besondere Matrizen

• Einheitsmatrix

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

• Transponierte Matrix

Vertauschenden von Zeilen- und Spaltenindex.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$A = (A^T)^T$

symmetrische Matrix

$$\begin{bmatrix} 10 & 4 & -2 \\ 4 & 3 & 6 \\ -2 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

obere Dreiecksmatrix

$$\begin{bmatrix} 10 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

untere Dreiecksmatrix

$$\begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ -2 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

Diagonalmatrix

$$\begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Nullmatrix

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Transponierte Matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Addition von Matrizen

Summe der Matrix $A = (a_{ik})$ und der Matrix $B = (b_{ik})$
Die Anzahl der Spalten (i) und der Zeilen(k) der beiden Matrizen müssen gleich sein. $A + B = a_{ik} + b_{ik}$

- Summe 2×2 Matrix

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} =$$
$$\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{bmatrix}$$

- Summe 3×3 Matrix

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & a_{33} \end{bmatrix} =$$
$$\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33}+a_{33} \end{bmatrix}$$

Summe zweier 2×3 Matrizen
$$\begin{bmatrix} 1 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 0 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

Multiplikation von Matrizen

- Produkt aus der Matrix $A = (a_{ik})$ mit einer Konstanten $\lambda \in \mathbb{R}$:

$\lambda A = \lambda a_{ik}$

2×2 Matrix
$$\lambda \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ \lambda a_{12} & \lambda a_{22} \end{bmatrix}$$

- Produkt aus Matrix $A = (a_{ij})$ und Matrix $B = (b_{jk})$

Anzahl der Zeilen von A muß gleich der Anzahl der Spalten von B sein.
Zeilenelemente von A mal Spaltenelemente von B.

- Produkt zweier 2×2 Matrizen

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} =$$
$$\begin{bmatrix} a_{11}\cdot b_{11} + a_{12}\cdot b_{21} & a_{11}\cdot b_{12} + a_{12}\cdot b_{22} \\ a_{21}\cdot b_{11} + a_{22}\cdot b_{21} & a_{21}\cdot b_{21} + a_{22}\cdot b_{22} \end{bmatrix}$$

Produkt 2×3 Matrix mit 3
$$3 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 15 \\ 0 & 12 & 6 \end{bmatrix}$$

Produkt 2×3 Matrix mit einer 3×2 Matrix
$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 2 & -7 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} =$$
$$\begin{bmatrix} 3\cdot 1 + 4\cdot(-2) + 1\cdot 3 \\ 2\cdot 2 + (-7)\cdot(-2) + 6\cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ 34 \end{bmatrix}$$

Inverse Matrix

•Produkt aus der Matrix A und der inversen Matrix A^{-1} ist gleich der Einheitsmatrix.

$AA^{-1} = E$

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

•Die inverse Matrix ist nur möglich, wenn die Determinante von A ungleich Null ist.

$\det A \neq 0$

• Berechnung von A^{-1} mit dem Gauß-Jordan-Algorithmus

Matrix A und Einheitsmatrix E in der Form schreiben

A		E	
a_{11}	a_{12}	1	0
a_{21}	a_{22}	0	1

Umformen durch:

- Multiplizieren oder Dividieren der Zeilen mit einer Zahl
- Addieren oder Subtrahieren der Zeilen
- Vertauschen der Zeilen

in die Form Einheitsmatrix und inverse Matrix A^-1

E		A^{-1}	
1	0	x_{11}	x_{12}
0	1	x_{21}	x_{22}

$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$

$det(A) = (-10) \Rightarrow$ Matrix ist invertierbar

$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$

$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Zeile2 = Zeile2 - Zeile1 $\cdot \frac{4}{2}$

$a21 = 4 - 2 \cdot \frac{4}{2} = 0$

$a22 = 1 - 3 \cdot \frac{4}{2} = -5$

$b21 = 0 - 1 \cdot \frac{4}{2} = 0$

$b22 = 1 - 0 \cdot \frac{4}{2} = 1$

$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

Zeile1 = Zeile1 - Zeile2 $\cdot \frac{3}{-5}$

$a12 = 3 - (-5) \cdot \frac{3}{-5} = 0$

$b11 = 1 - (-2) \cdot \frac{3}{-5} = 1$

$b12 = 0 - 1 \cdot \frac{3}{-5} = 0$

$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

Zeile1 = Zeile1 : 2

Zeile2 = Zeile2 : -5

$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

A			E		
1	2	-1	1	0	0
2	5	-1	0	1	0
1	2	0	0	0	1

E			$E' = A^{-1}$		
1	0	0	2	-2	3
0	1	0	-1	1	-1
0	0	1	-1	0	1

Eigenwert und Eigenvektor

Gegegeben: A - Matrix
Gesucht: x - Eigenvektor (Spaltenvektor)
λ - *Eigenwert*
Das Produkt aus Matrix A und Eigenvektor x ist gleich dem Produkt aus Eigenwert λ und Eigenvektor x.
$Ax = \lambda x$
$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix}$$
•Eigenwert aus folgender Gleichung:
$\det(A - \lambda \cdot E) = 0$
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$
$$\left| \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right| = 0$$
$$\left| \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{bmatrix} \right| = 0$$
$(a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}a_{21} = 0$
charakteristisches Polynom
$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22}) \cdot \lambda + a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12} = 0$
•Eigenvektoren durch einsetzen der λ-Werte
$(A - \lambda E)x = 0$
$$\begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$
$a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 = \lambda \cdot x_1$
$a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 = \lambda \cdot x_2$

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$
$\det(A - \lambda \cdot E) = 0$
$$\begin{bmatrix} 7-\lambda & 2 & 0 \\ -2 & 6-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & 5-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

Interaktive Inhalte: hier klicken

1.6.2 Determinante

Definiton

Aus quadratischen Matrix kann eine Determinante (Zahlenwert) berechnet werden.
D=det $A = |A|$
Anwendung der Determinante:
- Lineare Gleichungssysteme
- Volumenberechnung im R3
- Flächenberechnungen im R2
- Spatprodukt
- Lineare Abhängigkeit von Vektoren - inverse Matrix

2-reihige Determinante

Determinante einer 2×2 Matrix
$$D = \det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21}$$

$$D = \det A = |A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 - (-2) \cdot 4 = 23$$

3-reihige Determinante

Determinante einer 3×3 Matrix

Methode 1

$$D = \det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$= a_{11}(a_{22} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a_{32}) - a_{12}(a_{21} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a_{31}) +$
$a_{13}(a_{21} \cdot a_{32} - a_{22} \cdot a_{31})$

Methode 2 (Regel von Sarrus)

$$\text{D}=\left|\begin{array}{ccc|cc} \overset{+}{a_1} & \overset{+}{b_1} & \overset{+}{c_1} & a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 \\ \underset{-}{a_3} & \underset{-}{b_3} & \underset{-}{c_3} & a_3 & b_3 \end{array}\right.$$

$D = a1 \cdot b2 \cdot c3 + b1 \cdot c2 \cdot a3 + c1 \cdot a2 \cdot b3$
$- c1 \cdot b2 \cdot a3 - a1 \cdot c2 \cdot b3 - b1 \cdot a2 \cdot c3$

$$D = \det A = |A| = \begin{vmatrix} 11 & 13 & 4 \\ 12 & 14 & 5 \\ 9 & 3 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 11 & 13 \\ 12 & 14 \\ 9 & 3 \end{matrix}$$

$D = 11 \cdot 14 \cdot 3 + 13 \cdot 5 \cdot 9 + 4 \cdot 12 \cdot 3$
$-4 \cdot 14 \cdot 9 - 11 \cdot 5 \cdot 3 - 13 \cdot 12 \cdot 3 = 54$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 11 & 12 & 9 \\ 13 & 14 & 3 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$11 \cdot \begin{vmatrix} 14 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} - 13 \cdot \begin{vmatrix} 12 & 9 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 12 & 9 \\ 14 & 3 \end{vmatrix} = 54$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 12 & 9 \\ 14 & 3 \end{vmatrix} = 12 \cdot 3 - 14 \cdot 9 = -90$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 12 & 9 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 12 \cdot 3 - 5 \cdot 9 = -9$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 14 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 14 \cdot 3 - 5 \cdot 3 = 27$$

$D_3 = 11 \cdot 27 - 13 \cdot (-9) + 4 \cdot (-90) = 54$
$det(D) = 54$

Interaktive Inhalte: hier klicken hier klicken hier klicken

1.6.3 Lineare Gleichungssysteme und Gauß-Algorithmus

Lineare Gleichungssysteme in Matrizenschreibweise

$Ax = b \qquad x = A^{-1}b$

A Koeffizientenmatrix

b Spaltenvektor der rechten Seite

x *Lösungsvektor*

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Inhomogenes Gleichungssystem

$a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \cdots + a_{1n} \cdot x_n = b_1$

$a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \cdots + a_{2n} \cdot x_n = b_2$

$\vdots$

$a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \cdots + a_{mn} \cdot x_n = b_m$

Homogenes Gleichungssystem

$a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \cdots + a_{1n} \cdot x_n = 0$

$a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \cdots + a_{2n} \cdot x_n = 0$

$\vdots$

$a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \cdots + a_{mn} \cdot x_n = 0$

Variablen:x_1,x_2,x_3

$a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + a_{13} \cdot x_3 = b_1$

$a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + a_{23} \cdot x_3 = b_2$

$a_{31} \cdot x_1 + a_{32} \cdot x_2 + a_{33} \cdot x_3 = b_m$

oder in der Schreibweise mit den Variablen:x, y, z

$a1 \cdot x + b1 \cdot y + c1 \cdot z = d1$

$a2 \cdot x + b2 \cdot y + c2 \cdot z = d2$

$a3 \cdot x + b3 \cdot y + c3 \cdot z = d3$

Erweiterte Koeffizientenmatrix

x	y	z	
$a1$	$b1$	$c1$	$d1$
$a2$	$b2$	$c2$	$d2$
$a3$	$b3$	$c3$	$d3$

$Ax = b$

$$A = \begin{bmatrix} 11 & 13 & 4 \\ 12 & 14 & 5 \\ 9 & 3 & 3 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 37 \\ 40 \\ 15 \end{bmatrix} \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 11 & 13 & 4 \\ 12 & 14 & 5 \\ 9 & 3 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 37 \\ 40 \\ 15 \end{bmatrix}$$

$11x_1 + 13x_2 + 4x_3 = 37$

$12x_1 + 14x_2 + 5x_3 = 40$

$9x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 15$

oder

$11x + 13y + 4z = 37$

$12x + 14y + 5z = 40$

$9x + 3y + 3z = 15$

x	y	z	
11	13	4	37
12	14	5	40
9	3	3	15

Gaußsches Eliminationsverfahren

$a1 \cdot x + b1 \cdot y + c1 \cdot z = d1$
$a2 \cdot x + b2 \cdot y + c2 \cdot z = d2$
$a3 \cdot x + b3 \cdot y + c3 \cdot z = d3$

Koeffizientenmatrix erstellen:

x	y	z	
$a1$	$b1$	$c1$	$d1$
$a2$	$b2$	$c2$	$d2$
$a3$	$b3$	$c3$	$d3$

x	y	z	
$Zeile1Spalte1$	$z1s2$	$z1s3$	$z1s4$
$z2s1$	$z2s2$	$z2s3$	$z2s4$
$z3s1$	$z3s2$	$z3s3$	$z3s4$

Die Lösungsmenge ändert sich nicht durch:
- Multiplizieren oder Dividieren der Zeilen mit einer Zahl
- Addieren oder Subtrahieren der Zeilen
- Vertauschen der Zeilen

Umformen in die Stufenform
- Eindeutige Lösung

x	y	z	
$Z1S1$	$z1s2$	$z1s3$	$z1s4$
0	$z2s2$	$z2s3$	$z2s4$
0	0	$z3s3$	$z3s4$

Rückwärtseinsetzen
$z = \frac{z3s3}{z3s4}$
z in die 2. Zeile einsetzen ⇒ y
z und y in die 1. Zeile einsetzen ⇒ x

- Keine Lösung

x	y	z	
$Z1S1$	$z1s2$	$z1s3$	$z1s4$
0	$z2s2$	$z2s3$	$z2s4$
0	0	0	$z3s4$

- Unendlich viele Lösungen

x	y	z	
$Z1S1$	$z1s2$	$z1s3$	$z1s4$
0	$z2s2$	$z2s3$	$z2s4$
0	0	0	0

$11x + 13y + 4z = 37$
$12x + 14y + 5z = 40$
$9x + 3y + 3z = 15$

x	y	z	
11	13	4	37
12	14	5	40
9	3	3	15

Zeile2 = Zeile2 · 11 − Zeile1 · 12
$z2s1 = 12 \cdot 11 - 11 \cdot 12 = 0$
$z2s2 = 14 \cdot 11 - 13 \cdot 12 = -2$
$z2s3 = 5 \cdot 11 - 4 \cdot 12 = 7$
$z2s4 = 40 \cdot 11 - 37 \cdot 12 = -4$

x	y	z	
11	13	4	37
0	−2	7	−4
9	3	3	15

Zeile3 = Zeile3 · 11 − Zeile1 · 9
$z3s1 = 9 \cdot 11 - 11 \cdot 9 = 0$
$z3s2 = 3 \cdot 11 - 13 \cdot 9 = -84$
$z3s3 = 3 \cdot 11 - 4 \cdot 9 = -3$
$z3s4 = 15 \cdot 11 - 37 \cdot 9 = -168$

x	y	z	
11	13	4	37
0	−2	7	−4
0	−84	−3	−168

Zeile3 = Zeile3 · (−2) − Zeile2 · (−84)
$z3s2 = (-84) \cdot -2 - (-2) \cdot (-84) = 0$
$z3s3 = (-3) \cdot -2 - 7 \cdot (-84) = 594$
$z3s4 = (-168) \cdot -2 - (-4) \cdot (-84) = 0$

x	y	z	
11	13	4	37
0	−2	7	−4
0	0	594	0

$z = \frac{0}{594} = 0$
$y \cdot (-2) + 7 \cdot 0 = (-4)$
$y = 2$
$x \cdot 11 + 13 \cdot 2 + 4 \cdot 0 = 37$
$x = 1$
$L = \{1/2/0\}$

Gauß-Jordan-Algorithmus

$a1 \cdot x + b1 \cdot y + c1 \cdot z = d1$
$a2 \cdot x + b2 \cdot y + c2 \cdot z = d2$
$a3 \cdot x + b3 \cdot y + c3 \cdot z = d3$

Koeffizientenmatrix erstellen:

x	y	z	
$a1$	$b1$	$c1$	$d1$
$a2$	$b2$	$c2$	$d2$
$a3$	$b3$	$c3$	$d3$

x	y	z	
$Zeile1Spalte1$	$z1s2$	$z1s3$	$z1s4$
$z2s1$	$z2s2$	$z2s3$	$z2s4$
$z3s1$	$z3s2$	$z3s3$	$z3s4$

Die Lösungsmenge ändert sich nicht durch:

- Multiplizieren oder Dividieren der Zeilen mit einer Zahl
- Addieren oder Subtrahieren der Zeilen
- Vertauschen der Zeilen

Ziel ist das Umformen in die Diagonalenform

- Eindeutige Lösung

x	y	z	
$z1s1$	0	0	$z1s4$
0	$z2s3$	0	$z2s4$
0	0	$z3s3$	$z3s4$

$x = \frac{z1s4}{z1s1}$
$y = \frac{z2s4}{z2s3}$
$z = \frac{z3s3}{z3s4}$

- Keine Lösung

x	y	z	
$z1s1$	0	0	$z1s4$
0	$z2s3$	0	$z2s4$
0	0	0	$z3s4$

- Unendlich viele Lösungen

x	y	z	
$z1s1$	0	0	$z1s4$
0	$z2s3$	0	$z2s4$
0	0	0	0

$11x + 13y + 4z = 37$
$12x + 14y + 5z = 40$
$9x + 3y + 3z = 15$

x	y	z	
11	13	4	37
12	14	5	40
9	3	3	15

$\text{Zeile2} = \text{Zeile2} - \text{Zeile1} \cdot \frac{12}{11}$
$z2s1 = 12 - 11 \cdot \frac{12}{11} = 0$
$z2s2 = 14 - 13 \cdot \frac{12}{11} = -\frac{2}{11}$
$z2s3 = 5 - 4 \cdot \frac{12}{11} = \frac{7}{11}$
$z2s4 = 40 - 37 \cdot \frac{12}{11} = -\frac{4}{11}$

x	y	z	
11	13	4	37
0	$-\frac{2}{11}$	$\frac{7}{11}$	$-\frac{4}{11}$
9	3	3	15

$\text{Zeile3} = \text{Zeile3} - \text{Zeile1} \cdot \frac{9}{11}$
$z3s1 = 9 - 11 \cdot \frac{9}{11} = 0$
$z3s2 = 3 - 13 \cdot \frac{9}{11} = -7\frac{7}{11}$
$z3s3 = 3 - 4 \cdot \frac{9}{11} = -\frac{3}{11}$
$z3s4 = 15 - 37 \cdot \frac{9}{11} = -15\frac{3}{11}$

x	y	z	
11	13	4	37
0	$-\frac{2}{11}$	$\frac{7}{11}$	$-\frac{4}{11}$
0	$-7\frac{7}{11}$	$-\frac{3}{11}$	$-15\frac{3}{11}$

$\text{Zeile1} = \text{Zeile1} - \text{Zeile2} \cdot \frac{13}{-\frac{2}{11}}$
$z1s2 = 13 - (-\frac{2}{11}) \cdot \frac{13}{-\frac{2}{11}} = 0$
$z1s3 = 4 - \frac{7}{11} \cdot \frac{13}{-\frac{2}{11}} = 49\frac{1}{2}$
$z1s4 = 37 - (-\frac{4}{11}) \cdot \frac{13}{-\frac{2}{11}} = 11$

x	y	z	
11	0	$49\frac{1}{2}$	11
0	$-\frac{2}{11}$	$\frac{7}{11}$	$-\frac{4}{11}$
0	$-7\frac{7}{11}$	$-\frac{3}{11}$	$-15\frac{3}{11}$

$\text{Zeile3} = \text{Zeile3} - \text{Zeile2} \cdot \frac{-7\frac{7}{11}}{-\frac{2}{11}}$
$z3s2 = -7\frac{7}{11} - (-\frac{2}{11}) \cdot \frac{-7\frac{7}{11}}{-\frac{2}{11}} = 0$
$z3s3 = -\frac{3}{11} - \frac{7}{11} \cdot \frac{-7\frac{7}{11}}{-\frac{2}{11}} = -27$
$z3s4 = -15\frac{3}{11} - (-\frac{4}{11}) \cdot \frac{-7\frac{7}{11}}{-\frac{2}{11}} = 0$

x	y	z	
11	0	$49\frac{1}{2}$	11
0	$-\frac{2}{11}$	$\frac{7}{11}$	$-\frac{4}{11}$
0	0	-27	0

$\text{Zeile1} = \text{Zeile1} - \text{Zeile3} \cdot \frac{49\frac{1}{2}}{-27}$
$z1s3 = 49\frac{1}{2} - (-27) \cdot \frac{49\frac{1}{2}}{-27} = 0$
$z1s4 = 11 - 0 \cdot \frac{49\frac{1}{2}}{-27} = 11$

x	y	z	
11	0	0	11
0	$-\frac{2}{11}$	$\frac{7}{11}$	$-\frac{4}{11}$
0	0	-27	0

$\text{Zeile2} = \text{Zeile2} - \text{Zeile3} \cdot \frac{\frac{7}{11}}{-27}$
$z2s3 = \frac{7}{11} - (-27) \cdot \frac{\frac{7}{11}}{-27} = 0$
$z2s4 = -\frac{4}{11} - 0 \cdot \frac{\frac{7}{11}}{-27} = -\frac{4}{11}$

x	y	z	
11	0	0	11
0	$-\frac{2}{11}$	0	$-\frac{4}{11}$
0	0	-27	0

$x = \frac{11}{11} = 1$
$y = \frac{-\frac{4}{11}}{-\frac{2}{11}} = 2$
$z = \frac{0}{-27} = 0$
$L = \{1/2/0\}$

Interaktive Inhalte: hier klicken hier klicken hier klicken

1.7 Finanzmathematik

1.7.1 Zinsrechnung - Jahreszins

$z = \frac{K \cdot p \cdot t}{100}$

Anzahl der Jahre	t		Jahre
Kapital	K	$Euro$	Europa
Zinssatz	p	%	Prozent
Zinsen	z	$Euro$	Europa

$p = \frac{z \cdot 100}{K \cdot t}$ $K = \frac{z \cdot 100}{p \cdot t}$ $t = \frac{z \cdot 100}{K \cdot p}$

Interaktive Inhalte: $z = \frac{K \cdot p \cdot t}{100}$ - $p = \frac{z \cdot 100}{K \cdot t}$ - $K = \frac{z \cdot 100}{p \cdot t}$ - $t = \frac{z \cdot 100}{K \cdot p}$ -

1.7.2 Zinsrechnung - Tageszins

$z = \frac{K \cdot p \cdot t}{100 \cdot 360}$

Anzahl der Tage	t		Tage
Kapital	K	$Euro$	Europa
Zinssatz	p	%	Prozent
Zinsen	z	$Euro$	Europa

$p = \frac{z \cdot 100 \cdot 360}{K \cdot t}$ $K = \frac{z \cdot 100 \cdot 360}{p \cdot t}$ $t = \frac{z \cdot 100 \cdot 360}{p \cdot K}$

Interaktive Inhalte: $z = \frac{K \cdot p \cdot t}{100 \cdot 360}$ - $p = \frac{z \cdot 100 \cdot 360}{K \cdot t}$ - $K = \frac{z \cdot 100 \cdot 360}{p \cdot t}$ - $t = \frac{z \cdot 100 \cdot 360}{p \cdot K}$ -

1.7.3 Zinsrechnung - Monatszins

$z = \frac{K \cdot p \cdot t}{100 \cdot 12}$

Anzahl der Monate	t		
Kapital	K	$Euro$	Europa
Zinssatz	p	%	Prozent
Zinsen	z	$Euro$	Europa

$p = \frac{z \cdot 100 \cdot 12}{K \cdot t}$ $K = \frac{z \cdot 100 \cdot 12}{p \cdot t}$ $t = \frac{z \cdot 100 \cdot 12}{p \cdot K}$

Interaktive Inhalte: $z = \frac{K \cdot p \cdot t}{100 \cdot 12}$ - $p = \frac{z \cdot 100 \cdot 12}{K \cdot t}$ - $K = \frac{z \cdot 100 \cdot 12}{p \cdot t}$ - $t = \frac{z \cdot 100 \cdot 12}{p \cdot K}$ -

1.7.4 Zinsfaktor

$q = 1 + \frac{p}{100}$

Zinssatz	p	%	Prozent
Zinsfaktor	q		

$p = (q-1) \cdot 100$

Interaktive Inhalte: $q = 1 + \frac{p}{100}$ - $p = (q-1) \cdot 100$ -

1.7.5 Zinseszinsformel

$K_t = K_0 \cdot (1 + \frac{p}{100})^t$

Anzahl der Jahre	t		Jahre
Zinssatz	p	%	Prozent
Anfangskapital	K_0	$Euro$	Europa
Kapital nach t Jahren	K_t	$Euro$	Europa

$K_0 = \frac{K_t}{(1+\frac{p}{100})^t}$ $p = (\sqrt[t]{\frac{K_t}{K_0}} - 1) \cdot 100$ $t = \frac{\ln(K_t) - \ln(K_0)}{\ln(1+\frac{p}{100})}$

Interaktive Inhalte: $K_t = K_0 \cdot (1 + \frac{p}{100})^t$ - $K_0 = \frac{K_t}{(1+\frac{p}{100})^t}$ - $p = (\sqrt[t]{\frac{K_t}{K_0}} - 1) \cdot 100$ - $t = \frac{\ln(K_t) - \ln(K_0)}{\ln(1+\frac{p}{100})}$ -

1.7.6 Degressive Abschreibung

$B_t = B_0 \cdot (1 - \frac{p}{100})^t$

Anzahl der Jahre	t		Jahre
Abschreibungssatz	p	%	
Anschaffungswert	B_0	$Euro$	Europa
Buchwert	B_t	$Euro$	Europa

$B_0 = \frac{B_t}{(1-\frac{p}{100})^t}$ $t = \frac{\ln(B_t) - \ln(B_0)}{\ln(1-\frac{p}{100})}$ $p = (1 - \sqrt[t]{\frac{B_t}{B_0}}) \cdot 100$

Interaktive Inhalte: $B_t = B_0 \cdot (1 - \frac{p}{100})^t$ - $B_0 = \frac{B_t}{(1-\frac{p}{100})^t}$ - $t = \frac{\ln(B_t) - \ln(B_0)}{\ln(1-\frac{p}{100})}$ - $p = (1 - \sqrt[t]{\frac{B_t}{B_0}}) \cdot 100$ -