

# Formelsammlung Analysis

<http://www.fersch.de>

©Klemens Fersch

14. Mai 2017

## Inhaltsverzeichnis

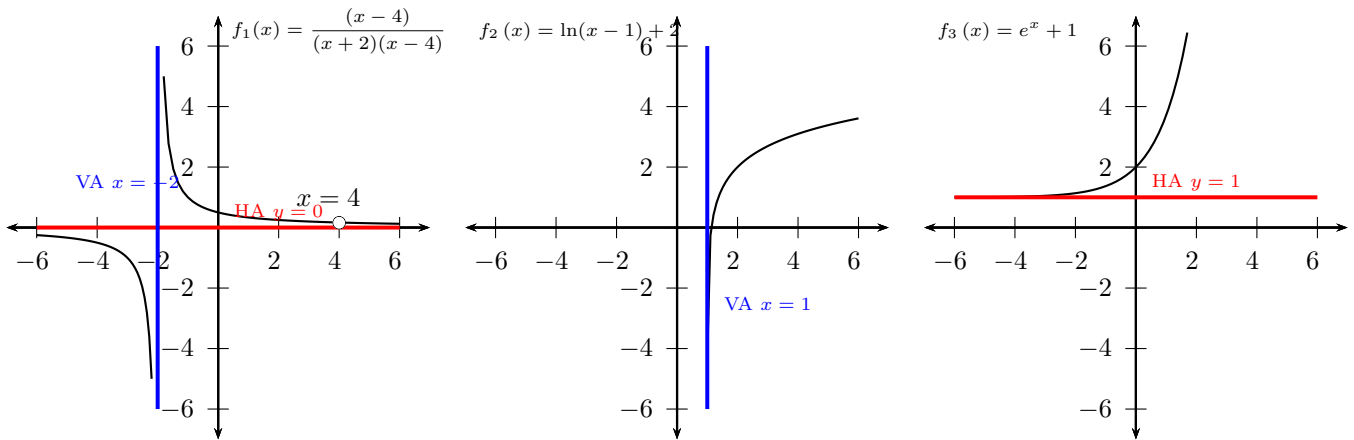
<b>4</b>	<b>Analysis</b>	<b>3</b>
4.1	Grenzwert - Stetigkeit . . . . .	3
4.1.1	Grenzwert von $f(x)$ für $x$ gegen $x_0$ . . . . .	3
4.1.2	Grenzwert von $f(x)$ für $x$ gegen Unendlich . . . . .	4
4.1.3	Stetigkeit . . . . .	4
4.1.4	Rechenregeln . . . . .	5
4.2	Differentialrechnung . . . . .	7
4.2.1	Definition . . . . .	7
4.2.2	1. Ableitung - Monotonie - Extremwerte . . . . .	8
4.2.3	Graph der 1. Ableitung . . . . .	10
4.2.4	2. Ableitung - Krümmung - Wendepunkte . . . . .	11
4.2.5	Graph der 2. Ableitung . . . . .	13
4.2.6	Ableitung der Grundfunktionen . . . . .	14
4.2.7	Ableitungsregeln . . . . .	14
4.2.8	Tangenten- und Normalengleichung . . . . .	16
4.2.9	Newtonsches Iterationsverfahren . . . . .	17
4.3	Integralrechnung . . . . .	18
4.3.1	Definition . . . . .	18
4.3.2	Integration der Grundfunktionen . . . . .	19
4.3.3	Integrationsregeln . . . . .	20
4.3.4	Graph der Stammfunktion . . . . .	21
4.4	Kurvendiskussion . . . . .	23
4.4.1	Ganzrationale Funktion . . . . .	23
4.4.2	Gebrochenrationale Funktion . . . . .	30
4.4.3	Exponentialfunktion (Basis $e$ ) . . . . .	34
4.4.4	Logarithmusfunktion (Basis $e$ ) . . . . .	37
4.5	Aufstellen von Funktionsgleichungen . . . . .	40
4.5.1	Ganzrationale Funktion . . . . .	40



# 4 Analysis

## 4.1 Grenzwert - Stetigkeit

### 4.1.1 Grenzwert von f(x) für x gegen x0



- Linksseitiger Grenzwert (LGW) von f(x) geht gegen eine Konstante (konvergiert)

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = a \text{ oder } \lim_{x \leq x_0} f(x) = a$$

- Rechtsseitiger Grenzwert (RGW) von f(x) geht gegen eine Konstante (konvergiert)

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = a \text{ oder } \lim_{x \geq x_0} f(x) = a$$

- Grenzwert von f(x) existiert

linksseitige Grenzwert = rechtsseitige Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = a$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$$

- Linksseitiger Grenzwert von f(x) geht gegen Unendlich (bestimmt divergiert)

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \pm \infty$$

- Rechtsseitiger Grenzwert von f(x) geht gegen Unendlich (bestimmt divergiert)

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \pm \infty$$

⇒ vertikale Asymptote - Polstelle an der Stelle  $x = x_0$

$$f_1(x) = \frac{(x-4)}{(x+2)(x-4)} \quad \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2; 4\}$$

Linksseitiger Grenzwert von f(x) für x gegen 4

$x \rightarrow 4^-$	$f(x) \rightarrow \frac{1}{6}$
3,99	0,166945
3,999	0,166694
3,9999	0,166669
3,99999	0,166667

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{(x-4)}{(x+2)(x-4)} = \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{1}{(x+2)} = \frac{1}{6}$$

Rechtsseitiger Grenzwert von f(x) für x gegen 4

$x \rightarrow 4^+$	$f(x) \rightarrow \frac{1}{6}$
4,01	0,166389
4,001	0,166639
4,0001	0,166664
4,00001	0,166666

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{(x-4)}{(x+2)(x-4)} = \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{1}{(x+2)} = \frac{1}{6}$$

$\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \frac{1}{6} \Rightarrow$  Stetig behebbare Definitionslücke

Linksseitiger Grenzwert von f(x) für x gegen -2

$x \rightarrow -2^-$	$f(x) \rightarrow -\infty$
-2,01	-100
-2,001	-1000
-2,0001	-10000
-2,00001	-99999,999999

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{(x-4)}{(x+2)(x-4)} = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{1}{(x+2)} = -\infty$$

Rechtsseitiger Grenzwert von f(x) für x gegen -2

$x \rightarrow -2^+$	$f(x) \rightarrow \infty$
-1,99	100
-1,999	1000
-1,9999	10000
-1,99999	99999,999999

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{(x-4)}{(x+2)(x-4)} = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{1}{(x+2)} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \ln(x-1) + 2 = -\infty$$

Vertikale Asymptote (Polstelle):  $x = 1$

Interaktive Inhalte: [hier klicken](#)

### 4.1.2 Grenzwert von f(x) für x gegen Unendlich

- Grenzwert von f(x) geht gegen eine Konstante (konvergiert)

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = a$$

⇒ horizontale Asymptote  $y = a$

- Grenzwert von f(x) geht gegen Unendlich (bestimmt divergiert)

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$$

Funktion:

$$f(x) = -x^3$$

Grenzwert von f(x) für x gegen ∞ und gegen -∞

$x \rightarrow \infty$	$f(x) \rightarrow -\infty$	$x \rightarrow -\infty$	$f(x) \rightarrow \infty$
10	-1000	-10	1000
100	-1000000	-100	1000000
1000	-1000000000	-1000	1000000000
10000	-1000000000000	-10000	1000000000000

$$\lim_{x \rightarrow \infty} -x^3 = [-1 \cdot \infty^3] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} -x^3 = [-1 \cdot (-\infty)^3] = \infty$$

$$f(x) = \frac{(x-4)}{(x+2)(x-4)} \quad \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2; 4\}$$

Grenzwert von f(x) für x gegen ∞ und gegen -∞

$x \rightarrow \infty$	$f(x) \rightarrow 0$	$x \rightarrow -\infty$	$f(x) \rightarrow 0$
10	0,083333	-10	-0,125
100	0,009804	-100	-0,010204
1000	0,000998	-1000	-0,001002
10000	0,0001	-10000	-0,0001
100000	0,00001	-100000	-0,00001

$$f_1(x) = \frac{(x-4)}{(x+2)(x-4)} = \frac{x-4}{x^2-2x-4} = \frac{x(1-\frac{4}{x})}{x^2(1-\frac{2}{x}-\frac{8}{x^2})}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x(1-\frac{4}{x})}{x^2(1-\frac{2}{x}-\frac{8}{x^2})} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Horizontale Asymptote:  $y = 0$

$$f_2(x) = \ln(x-1) + 2$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln(x-1) + 2 = \infty$$

$$f_3(x) = e^x + 1$$

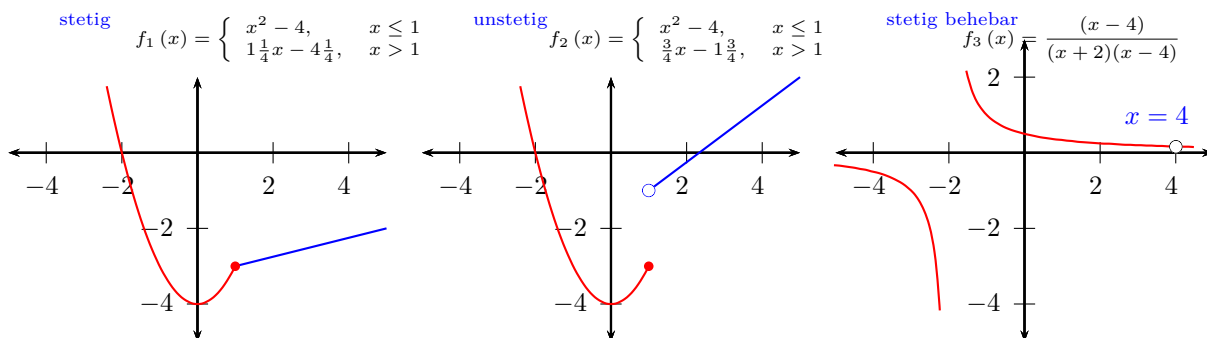
$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^x + 1 = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x + 1 = 1$$

Horizontale Asymptote:  $y = 1$

Interaktive Inhalte: [hier klicken](#)

### 4.1.3 Stetigkeit



- Ein Funktion ist an der Stelle  $x_0$  stetig, wenn der linksseitige GW = rechtsseitige GW = Funktionswert  $f(x)$   

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$$
- Stetige Funktionen
  - Ganzrationale Funktionen
  - Exponentialfunktionen
  - Sinus- und Kosinusfunktion
- Stetige Funktionen, bei denen die Unstetigkeitsstellen aus dem Definitionsbereich ausgeschlossen sind:
  - Gebrochenrationale Funktionen
  - Logarithmusfunktionen
  - Tangensfunktion
- Abschnittsweise definierte Funktionen müssen an den Schnittstellen auf Stetigkeit untersucht werden.
- Stetig behebbare Definitionslücke  $x_0$ 
  - linksseitige GW = rechtsseitige GW  

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$$

$$f_1(x) = \begin{cases} x^2 - 4, & x \leq 1 \\ 1\frac{1}{4}x - 4\frac{1}{4}, & x > 1 \end{cases}$$

LGW:  $\lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 - 4 = -3$   
 RGW:  $\lim_{x \rightarrow 1^+} 1\frac{1}{4}x - 4\frac{1}{4} = -3$   
 FW:  $f_1(1) = 1^2 - 4 = -3$   
 LGW = RGW = FW  $\Rightarrow$   
 ist stetig an der Stelle  $x_0 = 1$

$$f_2(x) = \begin{cases} x^2 - 4, & x \leq 1 \\ \frac{3}{4}x - 1\frac{3}{4}, & x > 1 \end{cases}$$

LGW:  $\lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 - 4 = -3$   
 RGW:  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3}{4}x - 1\frac{3}{4} = -1$   
 FW:  $f_1(1) = 1^2 - 4 = -3$   
 LGW  $\neq$  RGW  $\neq$  FW  $\Rightarrow$   
 ist unstetig an der Stelle  $x_0 = 1$

$$f_3(x) = \frac{(x-4)}{(x+2)(x-4)} = \frac{1}{(x+2)} \quad \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2; 4\}$$

$f_3(x)$  stetig in D  
 RGW:  $\lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{1}{(x+2)} = \frac{1}{6}$   
 LGW:  $\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{1}{(x+2)} = \frac{1}{6}$   
 RGW = LGW  
 $\Rightarrow$  stetig behebbare Definitionslücke:  $x_0 = 4$   
 Stetige Fortsetzung von  $f_2(x)$   
 $f_4(x) = \frac{1}{(x+2)} \quad \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

Interaktive Inhalte: [hier klicken](#)

### 4.1.4 Rechenregeln

#### Wichtige Grenzwerte

$$\begin{array}{ll} \lim_{x \rightarrow 0} a \cdot x = 0 & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a}{x} = \infty \\ \lim_{x \rightarrow \infty} a \cdot x = \infty & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty & \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty & \lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = \infty \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \lim_{x \rightarrow 0} 4 \cdot x = 0 & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5}{x} = \infty \\ \lim_{x \rightarrow \infty} 7 \cdot x = \infty & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow \infty} 2e^x = \infty & \lim_{x \rightarrow -\infty} -3e^x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} 3 \ln x = -\infty & \lim_{x \rightarrow \infty} 6 \ln x = \infty \end{array}$$

#### Rechenregeln

$$\begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g \\ \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = f + g \\ \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = f - g \\ \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = f \cdot g \\ g(x) \neq 0 \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} = \frac{f}{g} \end{array}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1 - \frac{4}{x}}{x(1 - \frac{2}{x} - \frac{8}{x^2})} = 0$$

**Zähler:**  
 $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4}{x} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} 1 - 0 = 1$   
**Nenner:**  
 $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{8}{x^2} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2}{x} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x(1 - 0 - 0) = \infty$   
**Zähler durch Nenner:**  $\frac{1}{\infty} = 0$

**Unbestimmte Ausdrücke**

$$\text{Typ 1: } \lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0} \quad \text{Typ 2: } \lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$$

Regel von L'Hospital

Zähler und Nenner getrennt ableiten, bis man den Grenzwert berechnen kann.

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim \frac{f''(x)}{g''(x)} \dots$$

$$\text{Typ 3: } \lim f(x) \cdot g(x) = 0 \cdot \pm\infty$$

- Umformen in Typ 1 oder 2 und danach L'Hospital

$$\text{Typ 4: } \lim (f(x) - g(x)) = \infty - \infty$$

- Brüche auf gemeinsamen Hauptnenner bringen

- Faktorisieren

$$\text{Typ 1: } \frac{0}{0} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = \cos 0 = 1$$

$$\text{Typ 2: } \frac{\infty}{\infty} \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{e^x} = \frac{2}{\infty} = 0$$

$$\text{Typ 3: } \infty \cdot 0 \\ \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot e^{-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -x = 0$$

$$\text{Typ 4: } \infty - \infty \\ \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 - x = \lim_{x \rightarrow \infty} x(x-1) = \infty \\ \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-x}{x^2} = \infty$$

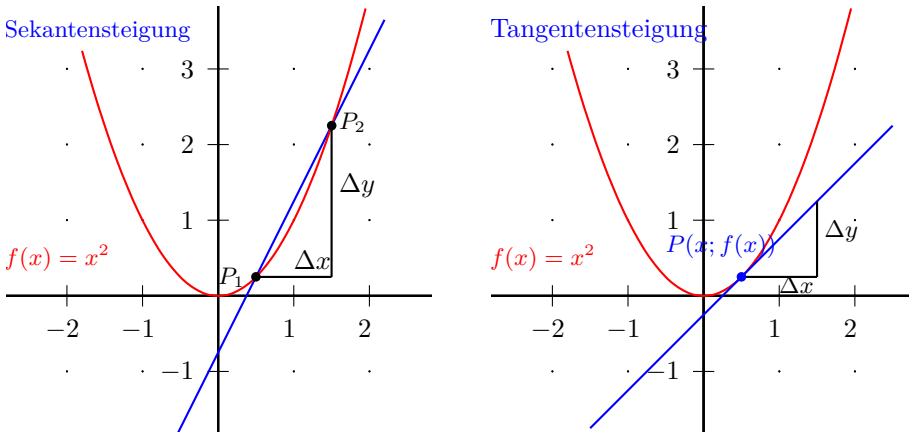
**Wichtige unbestimmte Ausdrücke**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{\ln x} = \infty \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4x^5}{e^x} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^3} = \infty \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3}{\ln x} = \infty \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 \ln x}{x} = 0$$

## 4.2 Differentialrechnung

### 4.2.1 Definition



#### Sekantensteigung

Eine Gerade schneidet eine Funktion in den Punkten  $P_1(x_0; f(x_0))$  und  $P_2(x; f(x))$ .

Steigung der Sekante an der Stelle  $x_0$

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$\Delta x = h \quad x = x_0 + h$$

$$m = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Sekantensteigung = Differenzenquotient = Mittlere Änderungsrate

Für kleine  $h$  ist die Sekantensteigung  $\approx$  Tangentensteigung

$$m \approx f'(x_0)$$

$$f(x) = x^2$$

Die Sekantensteigung  $m$  durch die Punkte

$$P_1(0,5; 0,25) \quad P_2(1,5; 2,25)$$

$$m = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$m = \frac{2,25 - 0,25}{1,5 - 0,5} = 2$$

Die Sekantensteigung  $m$  an der Stelle  $x_0 = 0,5$  und  $h = 1$

$$m = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

$$m = \frac{f(0,5 + 1) - f(0,5)}{1}$$

$$m = \frac{2,25 - 0,25}{1} = 2$$

Die Sekantensteigung  $m$  an der Stelle  $x_0 = 0,25$  und  $h = 0,001$

$$m = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

$$m = \frac{f(0,25 + 0,001) - f(0,25)}{0,001}$$

$$m = \frac{0,251001 - 0,25}{0,001} = 1,001$$

$$m \approx f'(0,5) = 1$$

#### 1. Ableitung - Differentialquotient

Die Ableitung von  $f(x)$  ist die Steigung des Graphen der Funktion  $f(x)$  an der Stelle  $x_0$ .

$$f'(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$x = x_0 + h$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

1. Ableitung = Steigung der Tangente = Steigung der Funktion  $f(x)$  = lokale (momentane) Änderungsrate

Die Ableitung von  $f(x)$  an einer beliebigen Stelle  $x$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Die 1. Ableitung von  $f(x) = x^2$  an der Stelle  $x_0 = 0,5$

$$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(0,5 + h)^2 - 0,5^2}{h}$$

$$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0,25 + h + h^2 - 0,25}{h}$$

$$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(1 + h)}{h}$$

$$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} 1 + h = 1$$

Die Ableitung von  $f(x) = x^2$  an einer beliebigen Stelle  $x$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x + h)^2 - x^2}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2hx + h^2 - x^2}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2x+h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 2x + h = 2x$$

$$f'(x) = 2x$$

$$f'(0,5) = 1$$

**2. Ableitung**

Die Ableitung der 1. Ableitung ist die 2. Ableitung.  
 Die 2. Ableitung gibt die Krümmung einer Funktion  $f(x)$  an der Stelle  $x_0$  an.

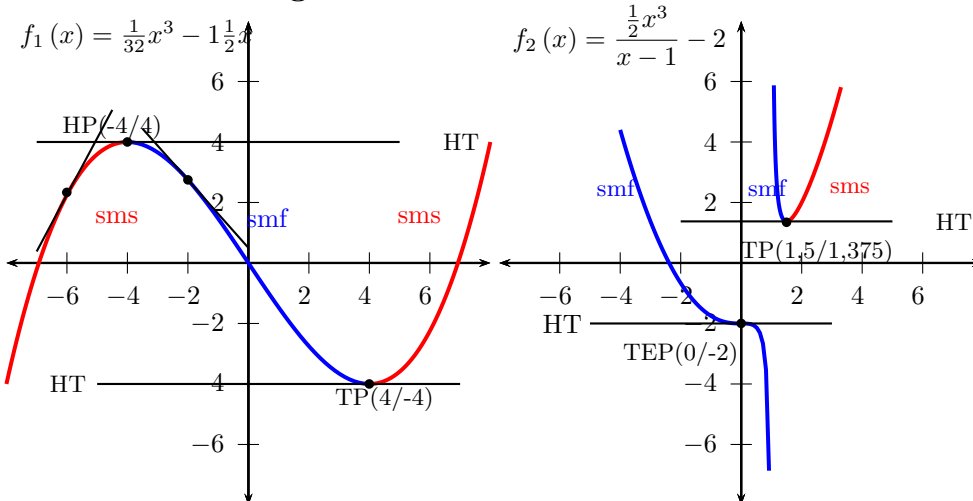
$$f(x) = -x^4 + 3x^2 + 2x$$

$$f'(x) = -4x^3 + 6x + 2$$

$$f''(x) = -12x^2 + 6$$

Interaktive Inhalte: [hier klicken](#)

**4.2.2 1. Ableitung - Monotonie - Extremwerte**



sms - streng monoton steigend; smf - streng monoton fallend; VZW - Vorzeichenwechsel; NST - Nullstelle ; HP - Hochpunkt (Maximum); TP - Tiefpunkt (Minimum) ; HT - horizontale Tangente; TEP - Terrassenpunkt;

**Steigung von  $f(x_0)$  an der Stelle  $x_0$**

$$m = f'(x_0)$$

- Funktion  
 $f(x) = \frac{1}{32}x^3 - 1\frac{1}{2}x$
- 1. Ableitungen  
 $f'(x) = \frac{3}{32}x^2 - 1\frac{1}{2} = \frac{3}{32}(x+4)(x-4)$   
 Steigung an der Stelle  $x = -6$   
 $m = f'(-6) = 1\frac{7}{8}$   
 Steigung an der Stelle  $x = -2$   
 $f'(-2) = -1\frac{1}{8}$

**Stelle  $x_0$  an der  $f(x_0)$  die Steigung m besitzt**

$f'(x) = m$   
 Bei horizontalen Tangenten ist die Steigung Null.  
 $f'(x) = 0$

- 1. Ableitungen  
 $f'(x) = \frac{3}{32}x^2 - 1\frac{1}{2}$   
 Horizontale Tangente  
 $\frac{3}{32}x^2 - 1\frac{1}{2} = 0 \quad / + 1\frac{1}{2}$   
 $\frac{3}{32}x^2 = 1\frac{1}{2} \quad / : \frac{3}{32}$   
 $x^2 = \frac{1\frac{1}{2}}{\frac{3}{32}}$   
 $x = \pm\sqrt{16}$   
 $x_1 = 4 \quad x_2 = -4$



**Monotonieverhalten**

monoton steigend	$f'(x) \geq 0$
streng monoton steigend sms	$f'(x) > 0$
monoton fallend	$f'(x) \leq 0$
streng monoton fallend smf	$f'(x) < 0$

Das Monotonieverhalten kann sich nur an den Extremstellen und an den Rändern des Definitionsbereich (Definitionslücken) ändern.

**Extremwerte und das Monotonieverhalten**

Extremwerte sind Hochpunkte (Maxima) bzw. Tiefpunkte (Minima) der Funktion. In den Extremwerten hat f(x) eine horizontale Tangente (HT).

- $f'(x) = 0$  (Notwendige Bedingung)

Die Nullstellen der 1. Ableitung bestimmen  $(x_0, x_1..)$ .

In diesen Nullstellen  $(x_0, x_1..)$  kann die Funktion einen Hochpunkt, Tiefpunkt oder Terrassenpunkt (Sattelpunkt) besitzen.

Zur Unterscheidung werden die Nullstellen in die Vorzeichentabelle eintragen. Einen Wert kleiner bzw. größer als die Nullstelle wählen und das Vorzeichen von  $f'(x)$  in die Tabelle eintragen. (Hinreichende Bedingung)

- Hochpunkt (HP)

Monotonieverhalten ändert sich von streng monoton steigend (sms) nach streng monoton fallend (smf).

Vorzeichenwechsel (VZW) der 1.Ableitung  $f'(x)$  von Plus nach Minus.

	$x <$	$x_1$	$< x$
$f'(x)$	+	0	-
Graph	sms	HP	smf

- Tiefpunkt (TP)

Monotonieverhalten ändert sich von streng monoton fallend (smf) nach streng monoton steigend (sms).

Vorzeichenwechsel (VZW) der 1.Ableitung  $f'(x)$  von Minus nach Plus.

	$x <$	$x_1$	$< x$
$f'(x)$	-	0	+
Graph	smf	TP	sms

- Terrassenpunkt (TEP)

Monotonieverhalten ändert sich nicht. Kein Vorzeichenwechsel (VZW) der 1.Ableitung.

	$x <$	$x_1$	$< x$		$x <$	$x_1$	$< x$
$f'(x)$	+	0	+	$f'(x)$	-	0	-
Graph	sms	TEP	sms	Graph	smf	TEP	smf

Die Ränder des Definitionsbereichs (Definitionslücken) müssen in die Tabelle mit eingetragen werden.

Monotonieverhalten an der Stelle  $x = -6$   
 $m = f'(-6) = 1\frac{7}{8} > 0 \Rightarrow$  sms  
 Monotonieverhalten an der Stelle  $x = -2$   
 $f'(-2) = -1\frac{1}{8} < 0 \Rightarrow$  smf

- Funktion

$$f_1(x) = \frac{1}{32}x^3 - 1\frac{1}{2}x$$

- 1. Ableitungen

$$f'(x) = \frac{3}{32}x^2 - 1\frac{1}{2} = \frac{3}{32}(x+4)(x-4)$$

$$\bullet f'(x) = \frac{3}{32}x^2 - 1\frac{1}{2} = 0$$

$$\frac{3}{32}x^2 - 1\frac{1}{2} = 0 \quad / + 1\frac{1}{2}$$

$$\frac{3}{32}x^2 = 1\frac{1}{2} \quad / : \frac{3}{32}$$

$$x^2 = \frac{1\frac{1}{2}}{\frac{3}{32}}$$

$$x = \pm\sqrt{16}$$

$$x_1 = 4 \quad x_2 = -4$$

- Vorzeichentabelle von  $f'(x)$

	$x <$	-4	$< x <$	4	$< x$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
Graph	sms	HP	smf	TP	sms

Hochpunkt:  $(-4/4)$  Tiefpunkt:  $(4/-4)$

- Monotonieverhalten

$$x \in ]-\infty; -4[ \cup ]4; \infty[ \quad f'(x) > 0 \quad \text{sms}$$

$$x \in ]-4; 4[ \quad f'(x) < 0 \quad \text{smf}$$

- Funktion

$$f_2(x) = \frac{1}{2}x^3 - x - 1$$

- 1. Ableitungen

$$f'(x) = \frac{1\frac{1}{2}x^2 \cdot (x-1) - \frac{1}{2}x^3 \cdot 1}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{(1\frac{1}{2}x^3 - 1\frac{1}{2}x^2) - \frac{1}{2}x^3}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{x^3 - 1\frac{1}{2}x^2}{(x-1)^2}$$

$$\text{Zähler} = 0$$

$$x^2(x - 1\frac{1}{2}) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \vee \quad x - 1\frac{1}{2} = 0$$

$$x - 1\frac{1}{2} = 0 \quad / + 1\frac{1}{2}$$

$$x = 1\frac{1}{2}$$

$$x_0 = 0; \quad \text{2-fache Nullstelle}$$

$$x_1 = 1\frac{1}{2}; \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

Nullstellen des Nenners aus f(x) übernehmen  $x_3 = 1$

	$x <$	0	$< x <$	1	$< x <$	$1\frac{1}{2}$	$< x$
$f'(x)$	-	0	-		-	0	+
Graph	smf	TEP	smf		smf	HP	sms

TEP(0/0) TP( $1\frac{1}{2}/1\frac{3}{8}$ )

- Monotonieverhalten

$$x \in ]-\infty; 0[ \cup ]0; 1[ \cup ]1\frac{1}{2}; \infty[ \quad f'(x) < 0 \quad \text{smf}$$

$$x \in ]1\frac{1}{2}; \infty[ \quad f'(x) > 0 \quad \text{sms}$$

### Extremwerte und die 2. Ableitung

In den Extremwerten hat  $f(x)$  eine horizontale Tangente (HT).

- $f'(x) = 0$  (Notwendige Bedingung)

Die Nullstellen der 1. Ableitung bestimmen  $(x_0, x_1..)$ .

In diesen Nullstellen  $(x_0, x_1..)$  kann die Funktion einen Hochpunkt, Tiefpunkt oder Terrassenpunkt (Sattelpunkt) besitzen.

Einsetzen der Nullstellen  $x_0, x_1..$  in die 2. Ableitung (Hinreichende Bedingung)

- $f''(x_0) > 0$  (LK)  $\Rightarrow$  Tiefpunkt (Minimum) bei  $x_0$
- $f''(x_0) < 0$  (RK)  $\Rightarrow$  Hochpunkt (Maximum) bei  $x_0$
- $f''(x_0) = 0 \wedge f'''(x_0) \neq 0 \Rightarrow$  Terrassenpunkt

• Funktion

$$f_1(x) = \frac{1}{32}x^3 - 1\frac{1}{2}x$$

• 1. Ableitungen

$$f'(x) = \frac{3}{32}x^2 - 1\frac{1}{2} = \frac{3}{32}(x+4)(x-4)$$

• 2. Ableitungen

$$f''(x) = \frac{3}{16}x$$

$$\bullet f'(x) = \frac{3}{32}x^2 - 1\frac{1}{2} = 0$$

$$\frac{3}{32}x^2 - 1\frac{1}{2} = 0 \quad / + 1\frac{1}{2}$$

$$\frac{3}{32}x^2 = 1\frac{1}{2} \quad / : \frac{3}{32}$$

$$x^2 = \frac{1\frac{1}{2}}{\frac{3}{32}}$$

$$x = \pm\sqrt{16}$$

$$x_1 = 4 \quad x_2 = -4$$

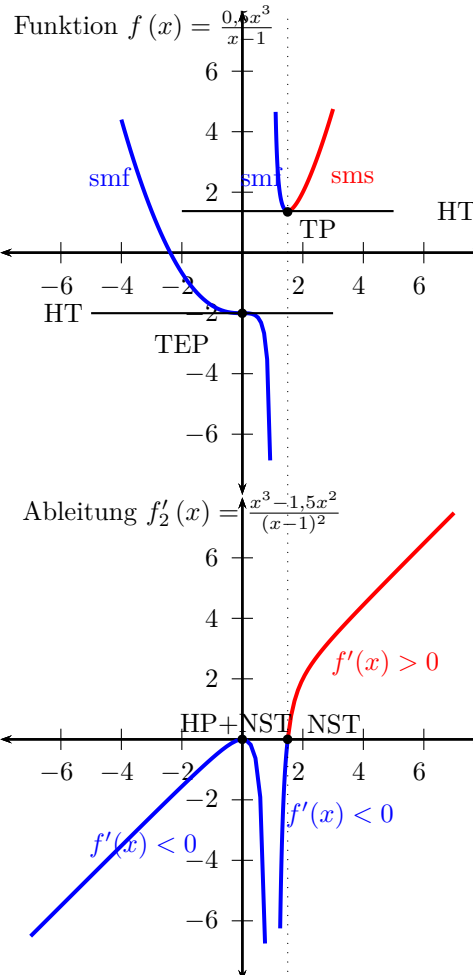
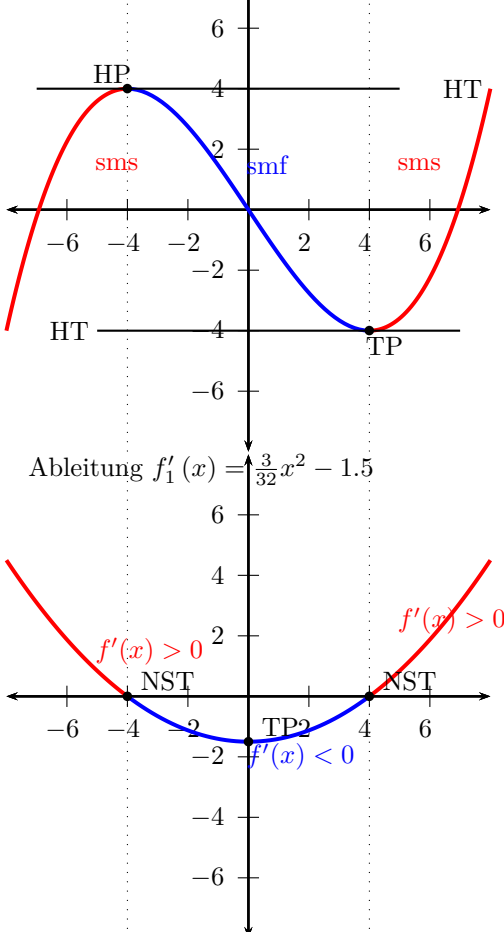
$$f''(-4) = -\frac{3}{4} < 0 \Rightarrow \text{HP}(-4/4)$$

$$f''(4) = \frac{3}{4} > 0 \Rightarrow \text{TP}(4/-4)$$

Interaktive Inhalte: [hier klicken](#)

### 4.2.3 Graph der 1. Ableitung

Funktion:  $f(x) = \frac{1}{32}x^3 - 1,5x$



sms - streng monoton steigend; smf - streng monoton fallend; VZW - Vorzeichenwechsel; NST - Nullstelle ; HP - Hochpunkt (Maximum); TP - Tiefpunkt (Minimum) ; HT - horizontale Tangente; TEP - Terrassenpunkt; VA - vertikale Asymptote; HA - horizontale Asymptote; LK - Linkskrümmung; RK - Rechtskrümmung; WP - Wendepunkt;

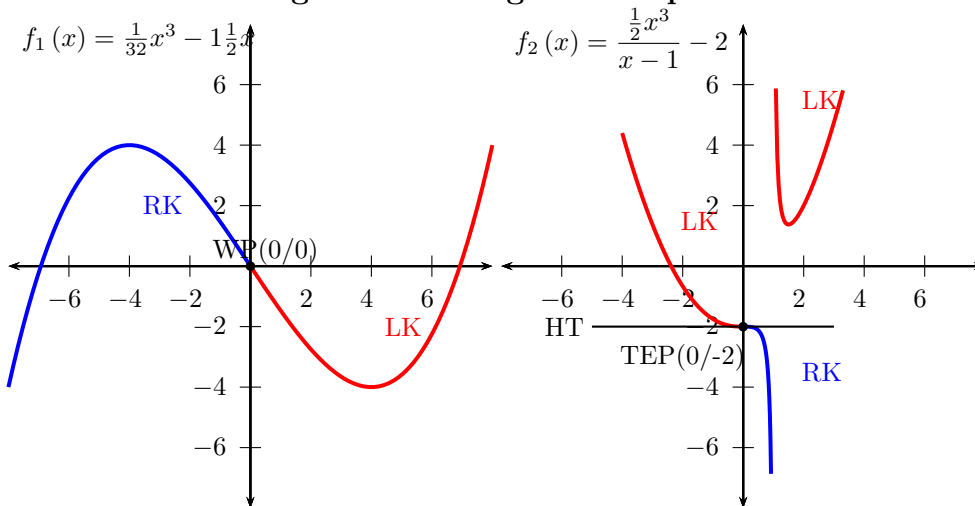
**Funktion - 1. Ableitung f'(x)**

Funktion $f(x)$	Ableitung $f'(x)$
Extremwert	NST $f'(x) = 0$
HT	NST $f'(x) = 0$
HP	NST und VZW von + nach -
TP	NST und VZW von - nach +
TEP	NST ohne VZW
WP	Extremwert
sms	$f'(x) > 0$ (positiv)
smf	$f'(x) < 0$ (negativ)
VA	VA $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = \pm\infty$
HA	HA $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f'(x) = 0$

$f_1(x) = \frac{1}{32}x^3 - 1,5x$ $f_1(x)$	$f_1'(x) = \frac{3}{32}x^2 - 1,5$ $f_1'(x)$
Extremwert: $x = -4$	NST $x = -4$
HP: $x = -4$	VZW von + nach - $x = -4$
WP: $x = 0$	Extremwert: $x = 0$
sms: $x < -4$	$f(x) > 0 \quad x < -4$

Interaktive Inhalte: [Graph \(JS\)](#) - [Graph](#) -

**4.2.4 2. Ableitung - Krümmung - Wendepunkte**



VZW - Vorzeichenwechsel; NST - Nullstelle ; HT - horizontale Tangente; TEP - Terrassenpunkt; VA - vertikale Asymptote; HA - horizontale Asymptote; LK - Linkskrümmung; RK - Rechtskrümmung; WP - Wendepunkt;

**Krümmung von  $f(x_0)$  an der Stelle  $x_0$**

Rechtskrümmung	RK	$f''(x) < 0$
Linkskrümmung	LK	$f''(x) > 0$

Das Krümmungsverhalten kann sich nur an den Nullstellen der 2. Ableitung und an den Rändern des Definitionsbereichs (Definitionslücken) ändern.

### Wendepunkte und das Krümmungsverhalten

Im Wendepunkt und im Flachpunkt ist das Krümmungsverhalten gleich Null.

- $f''(x) = 0$  (Notwendige Bedingung)

Die Nullstellen der 2. Ableitung bestimmen ( $x_0, x_1..$ ). Zur Unterscheidung zwischen Wendepunkt und Flachpunkt werden die Nullstellen in die Vorzeichentabelle eintragen. (Hinreichende Bedingung) Einen Wert kleiner bzw. größer als die Nullstelle wählen und das Vorzeichen von  $f''(x)$  in die Tabelle eintragen.

- Wendepunkt (WP)

Das Krümmungsverhalten ändert sich von rechtsgekrümmt (RK) nach linksgekrümmt (LK) oder von linksgekrümmt nach rechtsgekrümmt.

Vorzeichenwechsel (VZW) der 2.Ableitung  $f''(x)$  von Plus nach Minus oder von Minus nach Plus.

	$x <$	$x_1$	$< x$		$x <$	$x_1$	$< x$
$f''(x)$	+	0	-	$f''(x)$	-	0	+
Graph	LK	WP	RK	Graph	RK	WP	LK

- Flachpunkt (FP)

Krümmungsverhalten ändert sich nicht

Kein Vorzeichenwechsel (VZW) der 2.Ableitung

	$x <$	$x_1$	$< x$		$x <$	$x_1$	$< x$
$f''(x)$	+	0	+	$f''(x)$	-	0	-
Graph	LK	FP	LK	Graph	RK	FP	RK

Die Ränder des Definitionsbereichs (Definitionslücken) müssen in die Tabelle mit eingetragen werden.

- Funktion

$$f_1(x) = \frac{1}{32}x^3 - 1\frac{1}{2}x$$

$$f'_1(x) = \frac{3}{32}x^2 - 1\frac{1}{2}$$

- 2. Ableitungen

$$f''_1(x) = \frac{3}{16}x$$

$$f''_1(x) = \frac{3}{16}x = 0 \Rightarrow x = 0$$

	$x <$	0	$< x$
$f''(x)$	-	0	+
Graph	RK	WP	LK

WP(0/0)

$$x \in ]0; \infty[ \quad f''(x) > 0 \quad \text{LK}$$

$$x \in ]-\infty; 0[ \quad f''(x) < 0 \quad \text{RK}$$

- Funktion

$$f_2(x) = \frac{1}{2}x^3$$

$$f'_2(x) = \frac{x^3 - 1\frac{1}{2}x^2}{(x-1)^2}$$

- 2. Ableitungen

$$f''_2(x) = \frac{(x^2 - 3x + 3)x}{(x-1)^3} \quad \text{Zähler} = 0$$

$$x(x^2 - 3x + 3) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \vee \quad x^2 - 3x + 3 = 0$$

$$x^2 - 3x + 3 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{+3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2}$$

$$x_{1/2} = \frac{+3 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

$$x_{1/2} = \frac{+3 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

Diskriminante negativ keine Lösung

$x_9 = 0$ ; 1-fache Nullstelle

Nullstelle des Nenners aus f(x) übernehmen

$x_{10} = 1$ ; 1-fache Nullstelle

	$x <$	0	$< x <$	1	$< x$
$f''(x)$	+	0	-	0	+
Graph	RK	WP	LK		RK

WP(0/-2) kein WP  $x = 1$

$$x \in ]-\infty; 0[ \cup ]1; \infty[ \quad f''(x) > 0 \quad \text{LK}$$

$$x \in ]0; 1[ \quad f''(x) < 0 \quad \text{RK}$$

### Wendepunkte und die 3.Ableitung

Im Wendepunkt und im Flachpunkt ist das Krümmungsverhalten gleich Null.

- $f''(x) = 0$  (Notwendige Bedingung)

Die Nullstellen der 2. Ableitung bestimmen ( $x_0, x_1..$ ).

Einsetzen der Nullstellen  $x_0, x_1..$  in die 3. Ableitung (Hinreichende Bedingung)

- $f'''(x_0) \neq 0 \Rightarrow$  Wendepunkt

- Funktion

$$f_1(x) = \frac{1}{32}x^3 - 1\frac{1}{2}x$$

- 1. Ableitungen

$$f'(x) = \frac{3}{32}x^2 - 1\frac{1}{2} = \frac{3}{32}(x+4)(x-4)$$

- 2. Ableitungen

$$f''(x) = \frac{3}{16}x$$

- 3. Ableitungen

$$f'''(x) = \frac{3}{16}$$

$$f''(x) = \frac{3}{16}x = 0$$

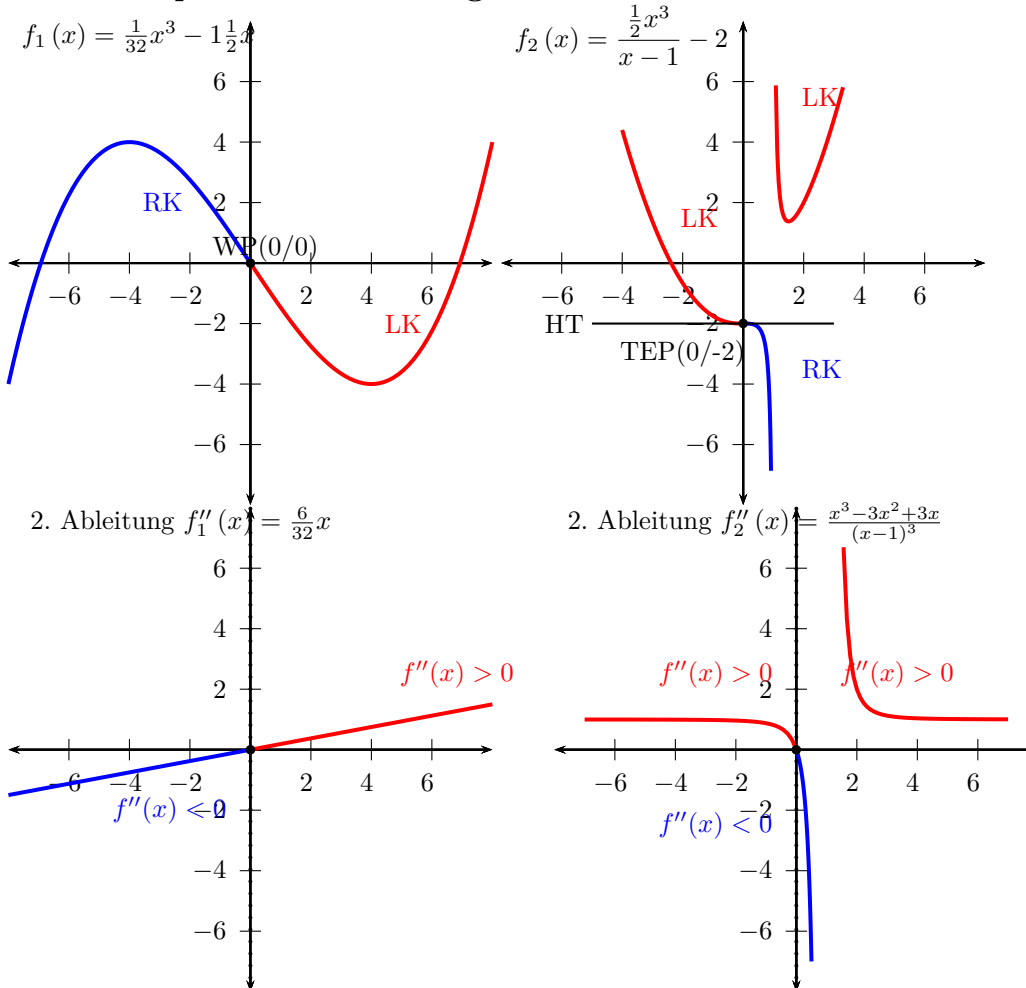
$$x = 0$$

$$f'''(0) = \frac{3}{16} \neq 0 \Rightarrow$$

Wp(0/0)

Interaktive Inhalte: [hier klicken](#)

### 4.2.5 Graph der 2. Ableitung



sms - streng monoton steigend; smf - streng monoton fallend; VZW - Vorzeichenwechsel; NST - Nullstelle ; HP - Hochpunkt (Maximum); TP - Tiefpunkt (Minimum) ; HT - horizontale Tangente; TEP - Terrassenpunkt; VA - vertikale Asymptote; HA - horizontale Asymptote; LK - Linkskrümmung; RK - Rechtskrümmung; WP - Wendepunkt;

#### Funktion - 2. Ableitung f''(x)

Funktion $f(x)$	2. Ableitung $f''(x)$
WP	NST $f''(x) = 0$ mit VZW
LK	$f''(x) > 0$
RK	$f''(x) < 0$
TEP	NST mit VZW
VA	VA
HA	HA

Interaktive Inhalte: [Graph \(JS\)](#) - [Graph](#) -

## 4.2.6 Ableitung der Grundfunktionen

### Polynomfunktion

$$f(x) = x^n \quad f'(x) = nx^{n-1}$$

Die Ableitungen bildet man durch: Exponent vorziehen und vom Exponenten 1 abziehen

$$f(x) = x \quad f'(x) = 1$$

$$f(x) = ax^n \quad f'(x) = nax^{n-1}$$

$$f(x) = ax \quad f'(x) = a$$

Konstanter Faktor a bleibt erhalten

$$f(x) = a \quad f'(x) = 0$$

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$$

Bei Summen wird jeder Summand einzeln abgeleitet

$$\begin{aligned} f_1(x) &= x^5 & f_1'(x) &= 5x^{5-1} = 5x^4 \\ f_2(x) &= 8x^5 & f_2'(x) &= 8 \cdot 5x^{5-1} = 40x^4 \\ f_3(x) &= 2x & f_3'(x) &= 2 \\ f_4(x) &= 5 & f_4'(x) &= 0 \\ f_5(x) &= x^5 + x^4 + x + 3 & f_5'(x) &= 5x^4 + 4x^3 + 1 \\ f_5''(x) &= 20x^3 + 12x^2 \end{aligned}$$

### Exponentialfunktion Basis e

$$f(x) = e^x \quad f'(x) = e^x$$

$$f(x) = ae^x \quad f'(x) = ae^x$$

$$f(x) = ae^x + b \quad f'(x) = ae^x$$

$$f(x) = 3e^x + 4 \quad f'(x) = 3e^x$$

### Logarithmusfunktion Basis e

$$f(x) = \ln x \quad f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$f(x) = a \ln x \quad f'(x) = \frac{a}{x}$$

$$f(x) = a \ln x + b \quad f'(x) = \frac{a}{x}$$

$$f(x) = 4 \ln x + 5 \quad f'(x) = \frac{4}{x}$$

### Exponentialfunktion allgemein

$$f(x) = a^x \quad f'(x) = a^x \ln a$$

$$f(x) = 3^x \quad f'(x) = 3^x \ln 3$$

### Logarithmusfunktion allgemein

$$f(x) = \log_a x \quad f'(x) = \frac{1}{x \ln a}$$

$$f(x) = \log_4 x \quad f'(x) = \frac{1}{x \ln 4}$$

### Trigonometrische Funktionen

$$f(x) = \sin x \quad f'(x) = \cos x$$

$$f(x) = \cos x \quad f'(x) = -\sin x$$

$$f(x) = \tan x \quad f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$f_2(x) = x^3 + 2 \cdot \sin x \quad f_2'(x) = 3 \cdot x^2 + 2 \cdot \cos x$$

Interaktive Inhalte: [hier klicken](#)

## 4.2.7 Ableitungsregeln

### Ableiten von Summen und Differenzen

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$$

$$\begin{aligned} f_1(x) &= x^5 + x^4 + x + 3 \\ f_1'(x) &= 5x^4 + 4x^3 + 1 \\ f_1''(x) &= 20x^3 + 12x^2 \\ f_2(x) &= x^3 + 2 \cdot \sin x \\ f_2'(x) &= 3 \cdot x^2 + 2 \cdot \cos x \end{aligned}$$

**Ableiten mit konstantem Faktor**

$$(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$$

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 5e^x + 4 \ln x \\ f_1'(x) &= 5e^x + 4 \frac{1}{x} \\ f_2(x) &= 5 \cos x + 4 \sin x \\ f_2'(x) &= -5 \sin x + 4 \cos x \end{aligned}$$

**Kettenregel**

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

- äußere Funktion f(x) ableiten
- innere Funktion g(x) unabgeleitet abschreiben
- mit der Ableitung der inneren Funktion g(x) multiplizieren (nachdifferenzieren)

$$\begin{aligned} f_1(x) &= e^{2x} \\ \text{äußere Funktion: } e^{(\cdot)} & \quad \text{innere Funktion: } 2x \\ f_1'(x) &= e^{2x} \cdot 2 = 2e^{2x} \\ f_2(x) &= 3 \sin 5x \\ \text{äußere Funktion: } \sin(\cdot) & \quad \text{innere Funktion: } 5x \\ f_2'(x) &= 3 \cos 5x \cdot 5 = 15 \cos 5x \\ f_3(x) &= 5e^{3x^3} \\ \text{äußere Funktion: } e & \quad \text{innere Funktion: } 3x^3 \\ f_3'(x) &= 5e^{3x^3} \cdot 9x^2 = 45x^2 e^{3x^3} \\ f_4(x) &= (x^3 - x)^7 \\ \text{äußere Funktion: } (\cdot)^7 & \quad \text{innere Funktion: } x^3 - x \\ f_4'(x) &= 7(x^3 - x)^6 \cdot (3x^2 - 1) = (21x^2 - 7)(x^3 - x)^6 \end{aligned}$$

**Produktregel**

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

- 1. Faktor f(x) ableiten
- mal
- 2. Faktor g(x) unabgeleitet
- plus
- 1. Faktor f(x) unabgeleitet
- mal
- 2. Faktor g(x) abgeleitet

$$\begin{aligned} f_1(x) &= x^2 e^x \\ f_1'(x) &= 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x \\ f_1'(x) &= xe^x(2+x) \\ f_2(x) &= (x^2 - 6 \cdot x + 2) \cdot e^x \\ f_2'(x) &= (2 \cdot x - 6) \cdot e^x + (x^2 - 6 \cdot x + 2) \cdot e^x \\ f_2'(x) &= e^x(2x - 6 + x^2 - 6x + 2) \\ f_2'(x) &= e^x(x^2 - 4x - 4) \end{aligned}$$

**Quotientenregel**

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

- Zähler f(x) ableiten
- mal
- Nenner g(x) unabgeleitet
- minus
- Zähler f(x) unabgeleitet
- mal
- Nenner g(x) abgeleitet
- durch
- Nenner g(x) im Quadrat

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{3x-1}{x^2} & f'(x) &= \frac{3 \cdot x^2 - (3x-1) \cdot 2x}{(x^2)^2} \\ f'(x) &= \frac{3x^2 - (6x^2 - 2x)}{(x^4)} \\ f'(x) &= \frac{-3x^2 + 2x}{(x^4)} \\ f'(x) &= \frac{-3x(x - \frac{2}{3})}{x^4} \\ f'(x) &= \frac{-3(x - \frac{2}{3})}{x^3} \\ f'(x) &= \frac{-3x + 2}{x^3} \end{aligned}$$

## 4.2.8 Tangenten- und Normalengleichung

### Tangentengleichung

Tangente an der Stelle  $x_0$ :

$$g(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

oder

$$y_0 = f(x_0)$$

$$m_t = f'(x_0)$$

Geradengleichung:

$$y = m \cdot x + t$$

$m_t, x_0, y_0$  einsetzen und nach t auflösen

$$t = y_0 - m_t \cdot x_0$$

$m_t, t$  einsetzen

$$y = m_t \cdot x + t$$

Funktion

$$f(x) = x^2$$

$$f'(x) = 2x$$

Tangente an der Stelle  $x_0 = \frac{1}{2}$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

$$g(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

$$g(x) = f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$g(x) = 1\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4}$$

$$g(x) = x - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$$

$$g(x) = x - \frac{1}{4}$$

### Normalengleichung

Normale an der Stelle  $x_0$ :

$$g(x) = \frac{-1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0)$$

oder

$$y_0 = f(x_0)$$

$$m_n = f'(x_0)$$

Steigung der Normalen

$$m_n = \frac{-1}{m_t}$$

Geradengleichung:

$$y = m \cdot x + t$$

$m_n, x_0, y_0$  einsetzen und nach t auflösen

$$t = y_0 - m_n \cdot x_0$$

$m_n, t$  einsetzen

$$y = m_n \cdot x + t$$

Funktion

$$f(x) = x^2$$

$$f'(x) = 2x$$

Normale an der Stelle  $x_0 = \frac{1}{2}$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

$$g(x) = \frac{-1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0)$$

$$g(x) = \frac{-1}{f'\left(\frac{1}{2}\right)}\left(x - \frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$g(x) = \frac{-1}{1}\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4}$$

$$g(x) = -1x + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$$

$$g(x) = -1x + \frac{3}{4}$$

Interaktive Inhalte: [Graph \(JS\)](#) - [Graph](#) - [hier klicken](#)



### 4.2.9 Newtonsches Iterationsverfahren

Nullstelle einer Funktion mit dem Newtonsches Iterationsverfahren

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Startwert  $x_0$  wählen

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

....

Funktion

$$f(x) = x^2 - 4$$

$$f'(x) = 2x$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Startwert:  $x_0 = 1$

$$f(1) = -3$$

$$f'(1) = 2$$

$$x_1 = 1 - \frac{f(1)}{f'(1)}$$

$$x_1 = 1 - \frac{-3}{2}$$

$$x_1 = 2,5$$

$$f(2,5) = -32$$

$$f'(2,5) = 22$$

$$x_2 = 2,5 - \frac{f(2,5)}{f'(2,5)}$$

$$x_2 = 2,5 - \frac{-32}{22}$$

$$x_2 = 2,05$$

$$f(2,05) = -33$$

$$f'(2,05) = 23$$

$$x_3 = 2,05 - \frac{f(2,05)}{f'(2,05)}$$

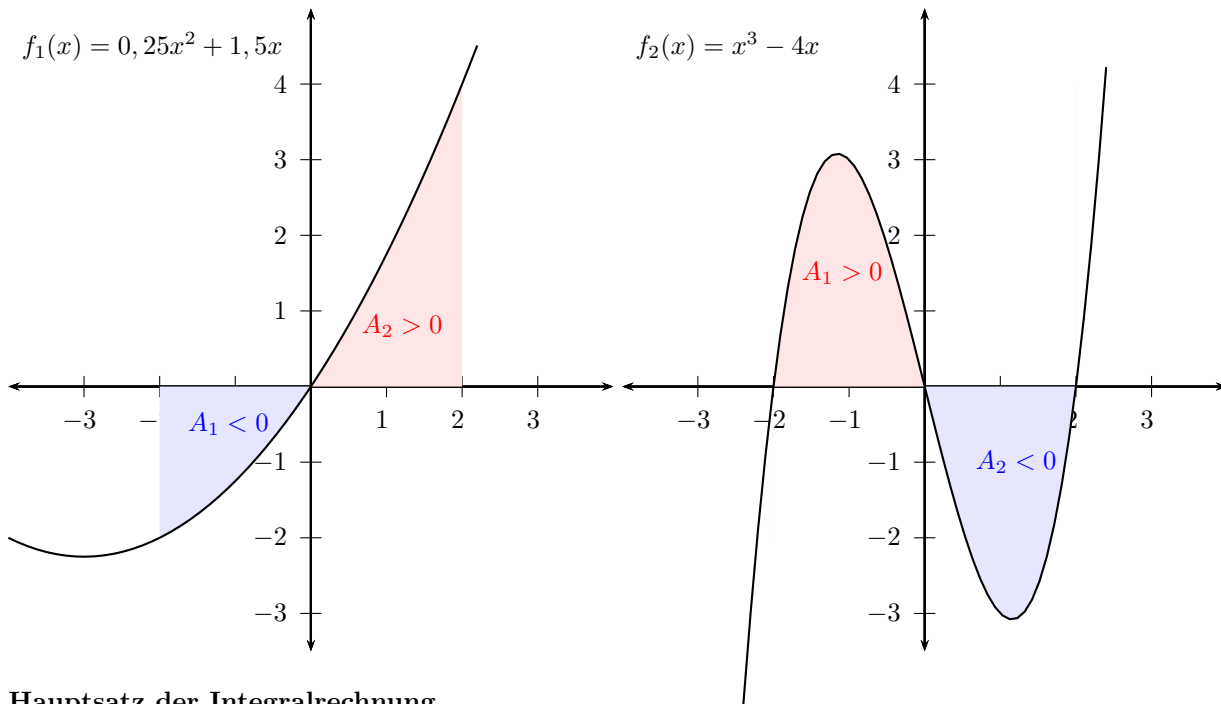
$$x_3 = 2,05 - \frac{-33}{23}$$

$$x_3 = 2,001$$

Interaktive Inhalte: [hier klicken](#)

### 4.3 Integralrechnung

#### 4.3.1 Definition



#### Hauptsatz der Integralrechnung

$$F'(x) = f(x)$$

Die Ableitung von  $F(x)$  ist  $f(x)$

$F(x)$  ist Stammfunktion von  $f(x)$

Die Menge aller Stammfunktionen erhält man durch das Addieren einer Konstanten  $c$ .

$$f(x) = ax^n \quad F(x) = \frac{1}{n+1}ax^{n+1} + c$$

$$F_1(x) = x^2 + 2$$

$$F_1'(x) = 2x$$

$F_1(x)$  ist Stammfunktion von  $f(x) = 2x$

$$F_2(x) = x^2 + 3$$

$$F_2'(x) = 2x$$

$F_2(x)$  ist Stammfunktion von  $f(x) = 2x$

Die Menge aller Stammfunktionen von  $f(x) = 2x$

$$F(x) = x^2 + c$$

#### Unbestimmtes Integral

$$F(x) = \int f(x) \, dx = F(x) + c$$

Die Stammfunktion zu einer Funktion  $f(x)$  ist das unbestimmte Integral.

$$f(x) = 6x^2$$

$$F(x) = \int 6x^2 \, dx = 6 \cdot \frac{1}{3}x^{2+1} + c$$

$$F(x) = 2x^3 + c$$

$$F(x) = \int \left(-\frac{1}{2}x^2 + 2x + 5\right) \, dx = -\frac{1}{6}x^3 + x^2 + 5x + c$$

**Bestimmtes Integral**

- Flächenbilanz

$$A = \int_a^b f(x) \, dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

A ist der Flächeninhalt unter einer Kurve der Funktion f(x) im Integrationsbereich von a bis b.

Fläche oberhalb der x-Achse  $\Rightarrow A > 0$

Fläche unterhalb der x-Achse  $\Rightarrow A < 0$

Flächen unterhalb und oberhalb der x-Achse  $\Rightarrow$  Summe der Teilflächen

- Fläche zwischen dem Graphen und der x-Achse

- Nullstellen berechnen

- Flächen zwischen den Nullstellen berechnen

- Beträge der Flächen addieren

Funktion

$$f_1(x) = \frac{1}{4}x^2 + 1\frac{1}{2}x$$

Stammfunktion

$$F(x) = \frac{1}{12}x^3 + \frac{3}{4}x^2$$

Fläche unterhalb der x-Achse  $\Rightarrow A_1 < 0$

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_{-2}^0 \left( \frac{1}{4}x^2 + 1\frac{1}{2}x \right) dx = \left[ \frac{1}{12}x^3 + \frac{3}{4}x^2 \right]_{-2}^0 \\ &= \left( \frac{1}{12} \cdot 0^3 + \frac{3}{4} \cdot 0^2 \right) - \left( \frac{1}{12} \cdot (-2)^3 + \frac{3}{4} \cdot (-2)^2 \right) \\ &= (0) - \left( 2\frac{1}{3} \right) = -2\frac{1}{3} \end{aligned}$$

Fläche oberhalb der x-Achse  $\Rightarrow A_2 > 0$

$$\begin{aligned} A_2 &= \int_0^2 \left( \frac{1}{4}x^2 + 1\frac{1}{2}x \right) dx = \left[ \frac{1}{12}x^3 + \frac{3}{4}x^2 \right]_0^2 \\ &= \left( \frac{1}{12} \cdot 2^3 + \frac{3}{4} \cdot 2^2 \right) - \left( \frac{1}{12} \cdot 0^3 + \frac{3}{4} \cdot 0^2 \right) \\ &= \left( 3\frac{2}{3} \right) - (0) = 3\frac{2}{3} \end{aligned}$$

Fläche unterhalb und oberhalb der x-Achse

Summe der Teilflächen (Flächenbilanz)

$$\begin{aligned} A_3 &= \int_{-2}^2 \left( \frac{1}{4}x^2 + 1\frac{1}{2}x \right) dx = \left[ \frac{1}{12}x^3 + \frac{3}{4}x^2 \right]_{-2}^2 \\ &= \left( \frac{1}{12} \cdot 2^3 + \frac{3}{4} \cdot 2^2 \right) - \left( \frac{1}{12} \cdot (-2)^3 + \frac{3}{4} \cdot (-2)^2 \right) \\ &= \left( 3\frac{2}{3} \right) - \left( 2\frac{1}{3} \right) = 1\frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$A_3 = A_1 + A_2 = \left( -2\frac{1}{3} \right) + 3\frac{2}{3} = 1\frac{1}{3}$$

$$f_2(x) = x^3 - 4x = x(x+2)(x-2)$$

- Nullstellen:  $x_1 = -2$   $x_2 = 0$   $x_3 = 2$

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_{-2}^0 (x^3 - 4x) dx = \left[ \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 \right]_{-2}^0 \\ &= \left( \frac{1}{4} \cdot 0^4 - 2 \cdot 0^2 \right) - \left( \frac{1}{4} \cdot (-2)^4 - 2 \cdot (-2)^2 \right) \\ &= (0) - (-4) = 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_2 &= \int_0^2 (x^3 - 4x) dx = \left[ \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 \right]_0^2 \\ &= \left( \frac{1}{4} \cdot 2^4 - 2 \cdot 2^2 \right) - \left( \frac{1}{4} \cdot 0^4 - 2 \cdot 0^2 \right) \\ &= (-4) - (0) = -4 \end{aligned}$$

- Fläche zwischen dem Graphen und der x-Achse:

$$A = |A_1| + |A_2| = |4| + |-4| = 8$$

**Integralfunktion**

$$F(x) = \int_k^x f(t) dt = [F(t)]_k^x = F(x) - F(k)$$

Jede Integralfunktion hat mindestens eine Nullstelle.

$$F(k) = 0$$

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-2}^x (2t^2 + 4t) dt = \left[ \frac{2}{3}t^3 + 2t^2 \right]_{-2}^x \\ &= \left( \frac{2}{3}x^3 + 2x^2 \right) - \left( \frac{2}{3} \cdot (-2)^3 + 2 \cdot (-2)^2 \right) \\ &= \frac{2}{3}x^3 + 2x^2 - 2\frac{2}{3} \\ F(-2) &= 0 \end{aligned}$$

Interaktive Inhalte: [hier klicken](#) [hier klicken](#)

**4.3.2 Integration der Grundfunktionen**

**Polynomfunktion**

$$F(x) = \int x^n dx = \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} + c$$

Zum Exponenten 1 addieren, durch den Exponenten dividieren

$$F(x) = \int x dx = \frac{1}{2}x^2 + c$$

$$F(x) = \int ax^n dx = a \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} + c$$

Konstanter Faktor a bleibt erhalten

$$F(x) = \int a dx = ax + c$$

$$\int f(x) + g(x) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

Bei Summen wird jeder Summand einzeln integriert

$$F(x) = \int 4 dx = 4x + c$$

$$F_2(x) = \int \left( -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 5 \right) dx =$$

$$F_2(x) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}x^{2+1} + 2 \cdot \frac{1}{2}x^{1+1} + 5x + c$$

$$F_2(x) = -\frac{1}{6}x^3 + x^2 + 5x + c$$

**Exponentialfunktion Basis e**

$$F(x) = \int e^x dx = e^x + c$$

$$F(x) = \int ae^x dx = ae^x + c$$

$$F(x) = \int ae^x + b dx = ae^x + bx + c$$

$$F(x) = \int -3e^x + 2 dx = -3e^x + 2x + c$$

**Logarithmusfunktion Basis e**

$$F(x) = \int \ln x dx = x \ln x - x + c$$

$$F(x) = \int a \ln x dx = a(x \ln x - x) + c$$

$$F(x) = \int a \ln x + b dx = a(x \ln x - x) + bx + c$$

$$F(x) = \int 7 \ln x + 2 dx = 7(x \ln x - x) + 2x + c$$

**Rationale Funktion mit linearer Funktion im Nenner**

$$F(x) = \int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + c$$

$$F(x) = \int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln |ax + b| + c$$

$$F(x) = \int \frac{1}{x+1} dx = \ln |x + 1| + c$$

$$F(x) = \int \frac{1}{2x+3} dx = \frac{1}{2} \ln |2x + 3| + c$$

**Trigonometrische Funktionen**

$$F(x) = \int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$F(x) = \int \cos x dx = \sin x + c$$

Interaktive Inhalte: [hier klicken](#)

**4.3.3 Integrationsregeln****Integration von Summen und Differenzen**

$$\int f(x) dx + \int g(x) dx = \int (f(x) + g(x)) dx$$

**Integration mit konstanten Faktor**

$$\int c \cdot f(x) dx = c \int f(x) dx$$

**Integration mit vertauschten Grenzen**

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

**Integrationsgrenzen zusammenfassen**

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$$

**Ableitung des Nenners im Zähler**

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + c$$

$$\int \frac{2x}{x^2} dx = \ln |x^2| + c$$

$$\int \frac{-12x^2+5}{-4x^3+5x-2} dx = \ln |-4x^3 + 5x - 2| + c$$

**Innere Funktion ist abgeleiteter Faktor**

$$\int g'(x)f(g(x)) dx = F(x) + c$$

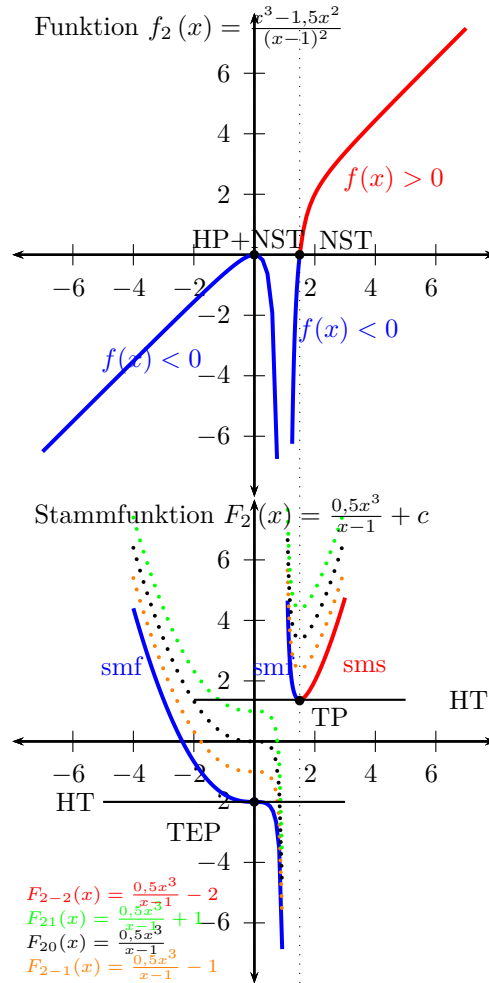
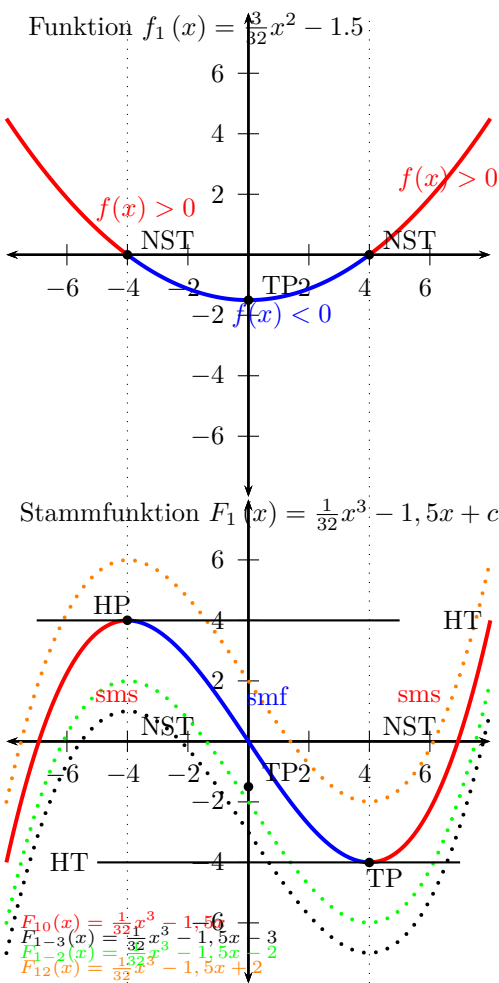
$$\begin{aligned} \int 2x(x^2 - 3)^4 dx &= \frac{1}{5}(x^2 - 3)^5 + c \\ \int 2xe^{x^2-3} dx &= e^{x^2-3} + c \\ \int 2x \sin(x^2 - 3) dx &= -\cos(x^2 - 3) + c \\ \int (3x^2 - 6x)e^{x^3-3x^2} dx &= e^{x^3-3x^2} + c \end{aligned}$$

**Innere Funktion ist eine lineare Funktion**

$$\int f(ax + b) dx = \frac{1}{a}F(x) + c$$

$$\begin{aligned} \int (2x - 6)^4 dx &= \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2}(2x - 3)^5 + c = \frac{1}{10}(2x - 3)^5 + c \\ \int e^{2x-6} dx &= \frac{1}{2}e^{2x-6} + c \\ \int \cos(-2x - 6) dx &= -\frac{1}{2}\sin(-2x - 3) + c \\ \int \frac{1}{5x+3} dx &= \frac{1}{5} \ln |5x + 3| + c \end{aligned}$$

**4.3.4 Graph der Stammfunktion**



sms - streng monoton steigend; smf - streng monoton fallend; VZW - Vorzeichenwechsel; NST - Nullstelle ; HP - Hochpunkt (Maximum); TP - Tiefpunkt (Minimum) ; HT - horizontale Tangente; TEP - Terrassenpunkt; VA - vertikale Asymptote; HA - horizontale Asymptote; LK - Linkskrümmung; RK - Rechtskrümmung; WP - Wendepunkt;

Zu jeder Funktion  $f(x)$  gibt es eine Menge von Stammfunktionen  $F(x)$ , die um  $c$  in  $y$ -Richtung verschoben sind.

Funktion $f(x)$	Stammfunktion $F(x)$
NST $f(x) = 0$	Extremwert (HT)
VZW von + nach -	HP
VZW von - nach +	TP
NST ohne VZW	TEP
Extremwert	WP
$f(x) > 0$ (positiv)	sms
$f(x) < 0$ (negativ)	smf

$$f_1(x) = \frac{3}{32}x^2 - 1.5$$

$$F_1(x) = \int \frac{3}{32}x^2 - 1.5 \, dx = \frac{1}{32}x^3 - 1.5x + c$$

$$F_{12}(x) = \frac{1}{32}x^3 - 1,5x + 2 \quad F_{1-2}(x) = \frac{1}{32}x^3 - 1,5x - 2$$

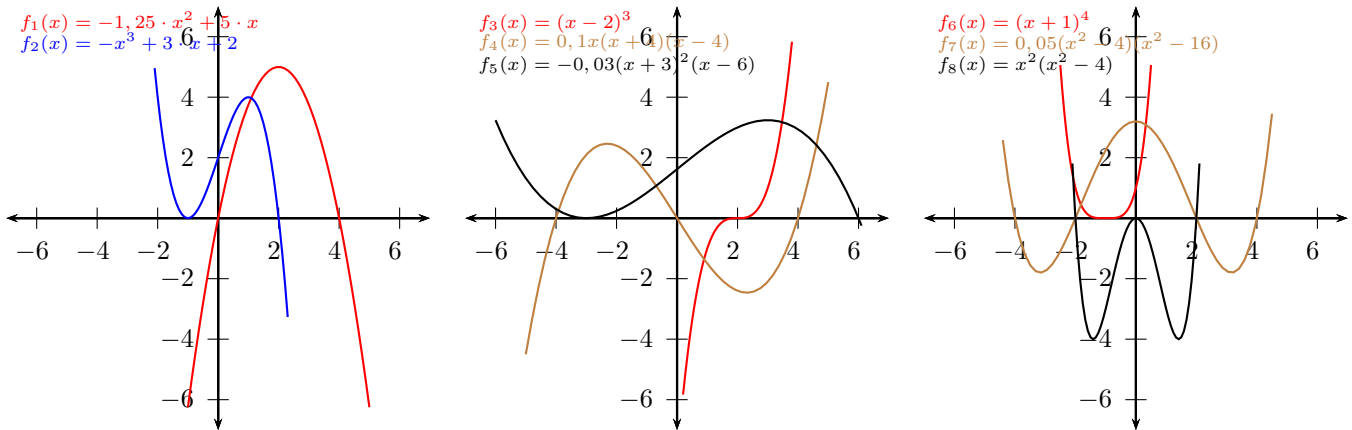
$$F_{1-3}(x) = \frac{1}{32}x^3 - 1,5x - 3 \quad F_{10}(x) = \frac{1}{32}x^3 - 1,5x$$

$f_1(x)$	$F_1(x)$
NST $x = -4$	Extremwert: $x = -4$
VZW von + nach - $x = -4$	HP: $x = -4$
Extremwert: $x = 0$	WP: $x = 0$
$f(x) > 0 \quad x < -4$	sms: $x < -4$

Interaktive Inhalte: [Graph \(JS\)](#) - [Graph](#) -

## 4.4 Kurvendiskussion

### 4.4.1 Ganzrationale Funktion



#### Formen der Polynomfunktion - ganzrationalen Funktion

- Summendarstellung der Polynomfunktion

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} \dots + a_1 x^1 + a_0$$

oder

$$f(x) = ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} \dots$$

Die höchste Potenz (n) gibt den Grad der Polynomfunktion an.

- Produktdarstellung (faktorierte Form) der Polynomfunktion

Ist der Grad des Polynoms gleich der Anzahl der (reellen) Nullstellen, kann man die Funktion in faktorisierte Form schreiben.

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \dots$$

Nullstellen:  $x_1, x_2, x_3, \dots$

Linearfaktoren:  $(x - x_1), (x - x_2), \dots$

a=Koeffizient der höchsten Potenz

Grad 1: Lineare Funktion

$$f(x) = ax + b$$

Grad 2: Quadratische Funktion

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Grad 3: Kubische Funktion

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

Grad 4: Biquadratische Funktionen

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)$$

Grad 5:

$$f(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$$

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)(x - x_5)$$

Summen- in Produktdarstellung

$$f_1(x) = -1\frac{1}{4}x^2 + 5x = -1\frac{1}{4}x(x - 4)$$

$$f_2(x) = -x^3 + 3 \cdot x + 2 = -(x + 1)^2(x - 2)$$

$$f_4(x) = \frac{1}{10}x^3 - 1\frac{3}{5}x = 0$$

$$x(\frac{1}{10}x^2 - 1\frac{3}{5}) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \quad \vee \quad \frac{1}{10}x^2 - 1\frac{3}{5} = 0$$

$$x_2 = 4 \quad x_3 = -4$$

Grad der Funktion = Anzahl der Nullstellen = 3

Faktorierte Form:

$$f_4(x) = 0,1x(x + 4)(x - 4)$$

$$f_7(x) = \frac{1}{20}x^4 - x^2 + 3\frac{1}{5} = 0$$

$$u = x^2 \quad u^2 = x^4$$

$$\frac{1}{20}u^2 - 1u + 3\frac{1}{5} = 0$$

$$u_{1/2} = \frac{+1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot \frac{1}{20} \cdot 3\frac{1}{5}}}{2 \cdot \frac{1}{20}}$$

$$u_1 = 16 \quad u_2 = 4$$

$$x^2 = 16$$

$$x = \pm\sqrt{16}$$

$$x_1 = 4 \quad x_2 = -4$$

$$x^2 = 4$$

$$x = \pm\sqrt{4}$$

$$x_3 = 2 \quad x_4 = -2$$

Faktorierte Form:

$$f_7(x) = \frac{1}{20}(x + 4)(x - 4)(x + 2)(x - 2)$$

Produkt- in Summendarstellung

$$f_3(x) = (x - 2)(x - 2)(x - 2) = (x - 2)^3$$

$$f_3(x) = x^3 - 6x^2 - 12x - 8$$

$$f_5(x) = 0,1x(x + 4)(x - 4) = 0,1x^3 - 1\frac{3}{5}x$$

$$f_6(x) = (x + 1)^4 = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$$

$$f_7(x) = 0,05(x^2 - 4)(x^2 - 16) = 0,05x^4 - x^2 + \frac{16}{5}$$

$$f_8(x) = x^2(x^2 - 4) = x^4 - 4x^2$$

## Definitions- und Wertebereich

- Definitionsbereich  $\mathbb{D} = \mathbb{R}$
- Wertebereich
- höchster Exponent ungerade:  
 $\mathbb{W} = \mathbb{R}$
- höchster Exponent gerade:  
 $\mathbb{W} = [\text{absoluter Tiefpunkt}; \infty[$   
 $\mathbb{W} = ] - \infty; \text{absoluter Hochpunkt}]$

$$f_1(x) = -1\frac{1}{4}x^2 + 5x$$

absoluter Hochpunkt: (2/5) höchster Exponent 2 (gerade)  
 $\mathbb{D} = \mathbb{R}$   $\mathbb{W} = ] - \infty, 5[$

$$f_2(x) = -x^3 + 3 \cdot x + 2$$

höchster Exponent 3 (ungerade Zahl)  
 $\mathbb{D} = \mathbb{R}$   $\mathbb{W} = \mathbb{R}$

$$f_5(x) = 0,1x^3 - 1\frac{3}{5}x$$

$\mathbb{D} = \mathbb{R}$   $\mathbb{W} = \mathbb{R}$

$$f_7(x) = 0,05x^4 - x^2 + \frac{16}{5}$$

absoluter Tiefpunkt aus der Kurvendiskussion  
 $\mathbb{D} = \mathbb{R}$   $\mathbb{W} = [-1\frac{4}{5}, \infty[$

## Symmetrie

- Punktsymmetrie zum Ursprung:  
 $f(-x) = -f(x)$   
 $f(x)$  hat nur ungerade Exponenten
- Achsensymmetrie zur y-Achse:  
 $f(-x) = f(x)$   
 $f(x)$  hat nur gerade Exponenten

$$f_1(-x) = -1\frac{1}{4} \cdot (-x)^2 + 5 \cdot (-x)$$

keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

$$f_2(-x) = -1 \cdot 1(-x)^3 + 3 \cdot (-x) + 2$$

keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

$$f_4(x) = 0,1x^3 - 1\frac{3}{5}x$$

$$f_4(-x) = 0,1(-x)^3 - 1\frac{3}{5} \cdot (-x)$$

$$f_4(-x) = -(0,1 \cdot x^3 - 1\frac{3}{5} \cdot x)$$

$$f_4(-x) = -f(x) \Rightarrow \text{Symmetrie zum Ursprung}$$

$$f_7(x) = 0,05x^4 - x^2 + \frac{16}{5}$$

$$f_7(-x) = \frac{1}{20} \cdot (-x)^4 - 1 \cdot (-x)^2 + 3\frac{1}{5}$$

$$f_7(-x) = \frac{1}{20} \cdot x^4 - 1 \cdot x^2 + 3\frac{1}{5}$$

$$f_7(-x) = f(x) \Rightarrow \text{Symmetrie zur y-Achse}$$



**Schnittpunkte mit der x-Achse - Nullstellen**

- Funktionsterm gleich Null setzen und die Gleichung lösen. ( siehe Algebra-Gleichungen)

$$f(x) = 0 \quad ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} \dots = 0$$

- höchster Exponent ungerade

$$1 \leq \text{Anzahl der Nullstellen} \leq \text{Grad des Polynoms}$$

- höchster Exponent gerade

$$0 \leq \text{Anzahl der Nullstellen} \leq \text{Grad des Polynoms}$$

Faktorisierte Polynomfunktion

- Nullstellen aus faktorisierten Polynom ablesen.

$$a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \dots = 0$$

Nullstellen:  $x_1, x_2, x_3 \dots$

Nullstellen aus faktorisierten Polynom ablesen.

$$f_3(x) = (x - 2)^3 \quad x_{123} = 2 \quad \text{3-fache Nullstelle}$$

$$f_5(x) = -0,03(x + 3)^2(x - 6)$$

$$x_1 = -3 \quad \text{2-fache Nullstelle}$$

$$x_{23} = 6 \quad \text{1-fache Nullstelle}$$

Funktionsterm gleich Null setzen.

$$f_1(x) = -1\frac{1}{4}x^2 + 5x = 0$$

$$x(-1\frac{1}{4}x + 5) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \vee \quad -1\frac{1}{4}x + 5 = 0$$

$$-1\frac{1}{4}x + 5 = 0 \quad \vee \quad x = 4$$

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 4$$

$$\text{Faktorisierte Form: } f_1(x) = -1\frac{1}{4}x(x - 4)$$

$$f_2(x) = -x^3 + 3x + 2 = 0$$

Nullstelle für Polynomdivision erraten:  $x_1 = -1$

$$\begin{pmatrix} -x^3 & & +3x & +2 \\ -(-x^3 & -x^2) & & \end{pmatrix} : (x + 1) = -x^2 + x + 2$$

$$\begin{array}{r} -x^3 \quad -x^2 \\ \underline{+x^2 \quad +3x \quad +2} \\ -x^3 \quad -x^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \quad \quad x^2 \quad +3x \quad +2 \\ \underline{-x^2 \quad +x} \\ \quad \quad \quad 2x \quad +2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \quad \quad \quad \quad 2x \quad +2 \\ \underline{-(2x \quad +2)} \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \quad \quad \quad \quad \quad \quad 2x \quad +2 \\ \underline{-(2x \quad +2)} \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad 2x \quad +2 \\ \underline{-(2x \quad +2)} \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad 2x \quad +2 \\ \underline{-(2x \quad +2)} \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad 0 \end{array}$$

$$-x^2 + x + 2 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 2}}{2 \cdot (-1)} \quad \vee \quad x_2 = -1 \quad x_3 = 2$$

$$\text{Faktorisierte Form: } f_2(x) = -(x + 1)^2(x - 2)$$

$$f_4(x) = \frac{1}{10}x^3 - 1\frac{3}{5}x = 0$$

$$x(\frac{1}{10}x^2 - 1\frac{3}{5}) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \quad \vee \quad \frac{1}{10}x^2 - 1\frac{3}{5} = 0$$

$$x_2 = 4 \quad x_3 = -4$$

Grad der Funktion = Anzahl der Nullstellen = 3

$$\text{Faktorisierte Form: } f_5(x) = 0,1x(x + 4)(x - 4)$$

$$f_7(x) = \frac{1}{20}x^4 - x^2 + 3\frac{1}{5} = 0$$

$$u = x^2 \quad u^2 = x^4$$

$$\frac{1}{20}u^2 - 1u + 3\frac{1}{5} = 0$$

$$u_{1/2} = \frac{+1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot \frac{1}{20} \cdot 3\frac{1}{5}}}{2 \cdot \frac{1}{20}}$$

$$u_1 = 16 \quad u_2 = 4 \quad \vee$$

$$x^2 = 16 \quad x = \pm\sqrt{16} \quad x_1 = 4 \quad x_2 = -4$$

$$x^2 = 4 \quad x = \pm\sqrt{4} \quad x_3 = 2 \quad x_4 = -2$$

$$\text{Faktorisierte Form: } f_7(x) = \frac{1}{20}(x + 4)(x - 4)(x + 2)(x - 2)$$

**Graph oberhalb/unterhalb der x-Achse**

Bei ganzrationalen Funktionen kann sich das Vorzeichen nur an den Nullstellen ändern. Einen beliebigen Wert kleiner bzw. größer als die Nullstelle wählen und das Vorzeichen des Funktionswerts in die Tabelle eintragen.

Vorzeichentabelle mit f(x)

	$x <$	$x_1$	$< x$
$f(x)$	+	0	-
Graph	oberhalb	0	unterhalb

+ f(x)>0 Graph oberhalb der x-Achse  
 - f(x)<0 Graph unterhalb der x-Achse

$$f_1(x) = -1\frac{1}{4}x^2 + 5x$$

	$x <$	0	$< x <$	4	$< x$
$f(x)$	-	0	+	0	-

$x \in ]0; 4[$   $f(x) > 0$  oberhalb der x-Achse  
 $x \in ]-\infty; 0[ \cup ]4; \infty[$   $f(x) < 0$  unterhalb der x-Achse  
 $f_2(x) = -x^3 + 3 \cdot x + 2$

	$x <$	-1	$< x <$	2	$< x$
$f(x)$	+	0	+	0	-

$x \in ]-\infty; -1[ \cup ]-1; 2[$   $f(x) > 0$  oberhalb der x-Achse

$x \in ]2; \infty[$   $f(x) < 0$  unterhalb der x-Achse

Faktorierte Form:

$$f_5(x) = 0, 1x(x+4)(x-4)$$

Nullstellen:  $x_1 = 0$      $x_2 = 4$      $x_3 = -4$

$$-5 < -4 \quad f_5(-5) = -4, 5$$

	$x <$	-4	$< x <$	0	$< x <$	4	$< x$
$f(x)$	-	0	+	0	-	0	+

$x \in ]-4; 0[ \cup ]4; \infty[$   $f(x) > 0$  oberhalb der x-Achse  
 $x \in ]-\infty; -4[ \cup ]0; 4[$   $f(x) < 0$  unterhalb der x-Achse

**Grenzwert - Verhalten im Unendlichen**

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} \dots + a_1 x^1 + a_0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \pm \infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \pm \infty$$

Das Vorzeichen des Glieds mit der höchsten Potenz und der Grad des Polynoms bestimmen das Vorzeichen des Grenzwerts.

Grenzwert gegen plus Unendlich

$a_n$	Grad	Grenzwert
+	gerade	$\lim_{x \rightarrow \infty} a_n \cdot \infty^n = \infty$
+	ungerade	$\lim_{x \rightarrow \infty} a_n \cdot \infty^n = \infty$
-	gerade	$\lim_{x \rightarrow \infty} a_n \cdot \infty^n = -\infty$
-	ungerade	$\lim_{x \rightarrow \infty} a_n \cdot \infty^n = -\infty$

Grenzwert gegen minus Unendlich

$a_n$	Grad	Grenzwert
+	gerade	$\lim_{x \rightarrow -\infty} a_n \cdot (-\infty)^n = \infty$
+	ungerade	$\lim_{x \rightarrow -\infty} a_n \cdot (-\infty)^n = -\infty$
-	gerade	$\lim_{x \rightarrow -\infty} a_n \cdot (-\infty)^n = -\infty$
-	ungerade	$\lim_{x \rightarrow -\infty} a_n \cdot (-\infty)^n = \infty$

$$f_1(x) = -1\frac{1}{4}x^2 + 5x$$

Glied mit der höchsten Potenz:  $-1\frac{1}{4}x^2$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f_1(x) = [-1\frac{1}{4} \cdot \infty^2] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_1(x) = [-1\frac{1}{4} \cdot (-\infty)^2] = -\infty$$

$$f_2(x) = -x^3 + 3 \cdot x + 2$$

Glied mit der höchsten Potenz:  $-x^3$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f_2(x) = [-1 \cdot \infty^3] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_2(x) = [-1 \cdot (-\infty)^3] = \infty$$

**Ableitung**

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} \dots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0$$

Die Ableitungen bildet man durch: Exponent vorziehen und vom Exponenten 1 abziehen.

Die erste Ableitung  $f'(x)$  gibt die Steigung der Funktion an der Stelle  $x$  an.

Die zweite Ableitung  $f''(x)$  gibt die Krümmung der Funktion an der Stelle  $x$  an.

$$f'(x) = a_n \cdot n \cdot x^{n-1} + a_{n-1} \cdot (n-1) \cdot x^{n-2} \dots + a_2 \cdot 2 \cdot x^{2-1} + a_1$$

$$f(x) = ax^n \quad f'(x) = nax^{n-1}$$

Grad 1: Lineare Funktion

$$f(x) = ax + b \quad f'(x) = a$$

Grad 2: Quadratische Funktion

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad f'(x) = 2ax + b$$

Grad 3: Kubische Funktion

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

Grad 4: Biquadratische Funktionen

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

$$f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$$

$$f_1(x) = -1\frac{1}{4}x^2 + 5x = -1\frac{1}{4}x(x - 4)$$

$$f_1'(x) = -2\frac{1}{2}x + 5$$

$$f_1''(x) = -2\frac{1}{2}$$

$$f_1'''(x) = 0$$

$$f_2(x) = -x^3 + 3x + 2 = -(x + 1)^2(x - 2)$$

$$f_2'(x) = -3x^2 + 3 = -3(x + 1)(x - 1)$$

$$f_2''(x) = -6x = -6x$$

$$f_2'''(x) = -6$$

**Extremwerte und die 2.Ableitung**

In den Extremwerten hat  $f(x)$  eine horizontale Tangente (HT).

- $f'(x) = 0$  (Notwendige Bedingung)

Die Nullstellen der 1. Ableitung bestimmen  $(x_0, x_1..)$ .

In diesen Nullstellen  $(x_0, x_1..)$  kann die Funktion einen Hochpunkt, Tiefpunkt oder Terrassenpunkt (Sattelpunkt) besitzen.

Einsetzen der Nullstellen  $x_0, x_1..$  in die 2. Ableitung (Hinreichende Bedingung)

- $f''(x_0) > 0(LK) \Rightarrow$  Tiefpunkt (Minimum) bei  $x_0$
- $f''(x_0) < 0(RK) \Rightarrow$  Hochpunkt (Maximum) bei  $x_0$
- $f''(x_0) = 0 \wedge f'''(x_0) \neq 0 \Rightarrow$  Terrassenpunkt

$$f_1'(x) = -2\frac{1}{2}x + 5 = 0$$

$$-2\frac{1}{2}x + 5 = 0 \quad / -5$$

$$-2\frac{1}{2}x = -5 \quad / : (-2\frac{1}{2})$$

$$x = \frac{-5}{-2\frac{1}{2}}$$

$$x = 2$$

$$f_1''(2) < 0 \Rightarrow \text{Hochpunkt: } (2/5)$$

$$f_2'(x) = -3x^2 + 3 = 0$$

$$-3x^2 + 3 = 0 \quad / -3$$

$$-3x^2 = -3 \quad / : (-3)$$

$$x^2 = \frac{-3}{-3}$$

$$x = \pm\sqrt{1}$$

$$x_1 = 1 \quad x_2 = -1$$

$$f_2''(-1) = 6 > 0 \Rightarrow \text{Tiefpunkt: } (-1/0)$$

$$f_2''(1) = -6$$

$$f_2''(1) < 0 \Rightarrow \text{Hochpunkt: } (1/4)$$

**Extremwerte und das Monotonieverhalten**

Extremwerte sind Hochpunkte (Maxima) bzw. Tiefpunkte (Minima) der Funktion. In den Extremwerten hat  $f(x)$  eine horizontale Tangente (HT).

- $f'(x) = 0$  (Notwendige Bedingung)

Die Nullstellen der 1. Ableitung bestimmen  $(x_0, x_1..)$ .

In diesen Nullstellen  $(x_0, x_1..)$  kann die Funktion einen Hochpunkt, Tiefpunkt oder Terrassenpunkt (Sattelpunkt) besitzen.

Zur Unterscheidung werden die Nullstellen in die Vorzeichen-tabelle eintragen. Einen Wert kleiner bzw. größer als die Nullstelle wählen und das Vorzeichen von  $f'(x)$  in die Tabelle eintragen. (Hinreichende Bedingung)

- Hochpunkt (HP)

Monotonieverhalten ändert sich von streng monoton steigend (sms) nach streng monoton fallend (smf).

Vorzeichenwechsel (VZW) der 1.Ableitung  $f'(x)$  von Plus nach Minus.

	$x <$	$x_1$	$< x$
$f'(x)$	+	0	-
Graph	sms	HP	smf

- Tiefpunkt (TP)

Monotonieverhalten ändert sich von streng monoton fallend (smf) nach streng monoton steigend (sms).

Vorzeichenwechsel (VZW) der 1.Ableitung  $f'(x)$  von Minus nach Plus.

	$x <$	$x_1$	$< x$
$f'(x)$	-	0	+
Graph	smf	TP	sms

- Terrassenpunkt (TEP)

Monotonieverhalten ändert sich nicht. Kein Vorzeichenwechsel (VZW) der 1.Ableitung.

	$x <$	$x_1$	$< x$		$x <$	$x_1$	$< x$
$f'(x)$	+	0	+	$f'(x)$	-	0	-
Graph	sms	TEP	sms	Graph	smf	TEP	smf

Die Ränder des Definitionsbereichs (Definitionslücken) müssen in die Tabelle mit eingetragen werden.

$$f'_1(x) = -2\frac{1}{2}x + 5$$

	$x <$	2	$< x$
$f'(x)$	+	0	-

streng monoton steigend

$$x \in ] - \infty; 2[ \quad f'(x) > 0$$

streng monoton fallend

$$x \in ]2; \infty[ \quad f'(x) < 0$$

$$f'_2(x) = -3x^2 + 3$$

	$x <$	-1	$< x <$	1	$< x$
$f'(x)$	-	0	+	0	-

streng monoton steigend

$$x \in ] - 1; 1[ \quad f'(x) > 0$$

streng monoton fallend

$$x \in ] - \infty; -1[ \cup ]1; \infty[ \quad f'(x) < 0$$

**Wendepunkte und 3.Ableitung**

Im Wendepunkt und im Flachpunkt ist das Krümmungsverhalten gleich Null.

- $f''(x) = 0$  (Notwendige Bedingung)

Die Nullstellen der 2. Ableitung bestimmen  $(x_0, x_1..)$ .

Einsetzen der Nullstellen  $x_0, x_1..$  in die 3. Ableitung (Hinreichende Bedingung)

- $f'''(x_0) \neq 0 \Rightarrow$  Wendepunkt

$$f'''_1(x) = 0$$

kein Wendepunkt

$$f''_2(x) = -6x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$f'''(0) = 2$$

$$f'''(0) \neq 0 \Rightarrow$$

Wendepunkt: (0/2)

### Wendepunkte und das Krümmungsverhalten

Im Wendepunkt und im Flachpunkt ist das Krümmungsverhalten gleich Null.

- $f''(x) = 0$  (Notwendige Bedingung)

Die Nullstellen der 2. Ableitung bestimmen ( $x_0, x_1..$ ). Zur Unterscheidung zwischen Wendepunkt und Flachpunkt werden die Nullstellen in die Vorzeichentabelle eintragen. (Hinreichende Bedingung) Einen Wert kleiner bzw. größer als die Nullstelle wählen und das Vorzeichen von  $f''(x)$  in die Tabelle eintragen.

- Wendepunkt (WP)

Das Krümmungsverhalten ändert sich von rechtsgekrümmt (RK) nach linksgekrümmt (LK) oder von linksgekrümmt nach rechtsgekrümmt.

Vorzeichenwechsel (VZW) der 2.Ableitung  $f''(x)$  von Plus nach Minus oder von Minus nach Plus.

	$x <$	$x_1$	$< x$		$x <$	$x_1$	$< x$
$f''(x)$	+	0	-	$f''(x)$	-	0	+
Graph	LK	WP	RK	Graph	RK	WP	LK

- Flachpunkt (FP)

Krümmungsverhalten ändert sich nicht

Kein Vorzeichenwechsel (VZW) der 2.Ableitung

	$x <$	$x_1$	$< x$		$x <$	$x_1$	$< x$
$f''(x)$	+	0	+	$f''(x)$	-	0	-
Graph	LK	FP	LK	Graph	RK	FP	RK

Die Ränder des Definitionsbereichs (Definitionslücken) müssen in die Tabelle mit eingetragen werden.

$$f''_2(x) = -6x$$

	$x <$	0	$< x$
$f''(x)$	+	0	-

$x \in ]-\infty; 0[$   $f''(x) > 0$  linksgekrümmt

$x \in ]0; \infty[$   $f''(x) < 0$  rechtsgekrümmt

### Stammfunktion von f(x)

Stammfunktionen bildet man durch: zum Exponent 1 addieren, durch den Exponenten dividieren.

$$f(x) = ax^n \quad F(x) = \frac{1}{n+1} ax^{n+1} + c$$

Unbestimmtes Integral:  $F(x) = \int f(x) dx = F(x) + c$

$$F_1(x) = \int (-1\frac{1}{4}x^2 + 5x) dx = -\frac{5}{12}x^3 + 2\frac{1}{2}x^2 + c$$

$$F_2(x) = \int (-x^3 + 3x + 2) dx = -\frac{1}{4}x^4 + 1\frac{1}{2}x^2 + 2x + c$$

### Bestimmtes Integral

$$A = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = [F(x)]_{x_1}^{x_2} = F(x_2) - F(x_1)$$

$$A_1 = \int_0^4 (-1\frac{1}{4}x^2 + 5x) dx = [-\frac{5}{12}x^3 + 2\frac{1}{2}x^2]_0^4$$

$$= (-\frac{5}{12} \cdot 4^3 + 2\frac{1}{2} \cdot 4^2) - (-\frac{5}{12} \cdot 0^3 + 2\frac{1}{2} \cdot 0^2)$$

$$= (13\frac{1}{3}) - (0) = 13\frac{1}{3}$$

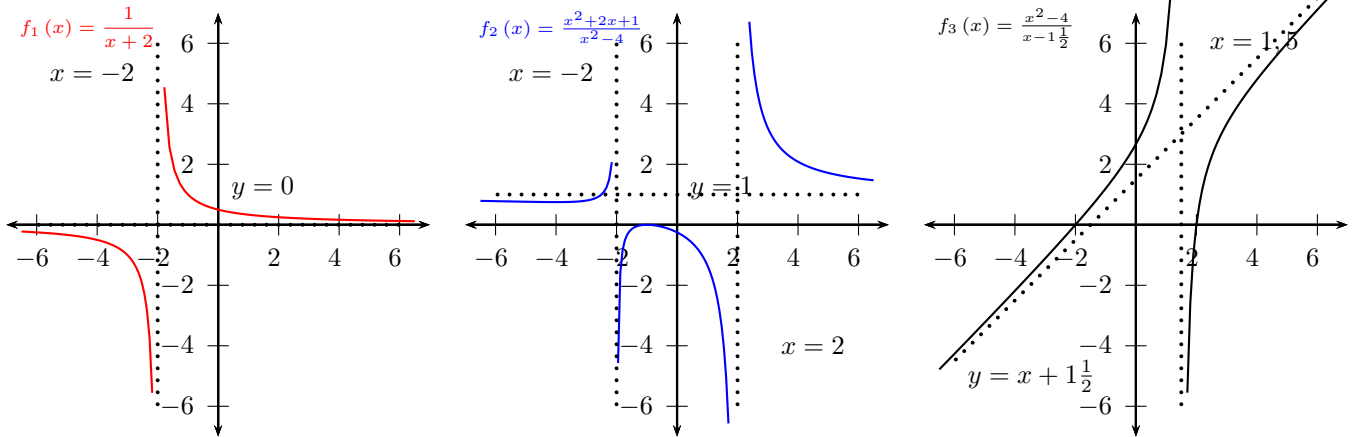
$$A_2 = \int_{-1}^2 (-x^3 + 3x + 2) dx = [-\frac{1}{4}x^4 + 1\frac{1}{2}x^2 + 2x]_{-1}^2$$

$$= (-\frac{1}{4} \cdot 2^4 + 1\frac{1}{2} \cdot 2^2 + 2 \cdot 2) - (-\frac{1}{4} \cdot (-1)^4 + 1\frac{1}{2} \cdot (-1)^2 + 2 \cdot (-1))$$

$$= (6) - (-\frac{3}{4}) = 6\frac{3}{4}$$

Interaktive Inhalte: [Graph \(JS\)](#) - [Graph](#) - [Kurvendiskussion](#) -

### 4.4.2 Gebrochenrationale Funktion



#### Formen der gebrochenrationalen Funktion

Summendarstellung der gebrochenrationalen Funktion

$$f(x) = \frac{Z(x)}{N(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_2 x^2 + b_1 x^1 + b_0}$$

Zählerpolynom vom Grad n  
 $Z(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0$   
 Nennerpolynom vom Grad m:  
 $N(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_2 x^2 + b_1 x^1 + b_0$

$$f_2(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 4}$$

Zählerpolynom:  $Z(x) = x^2 + 2x + 1$  Zählergrad: 2  
 Nennerpolynom:  $N(x) = x^2 - 4$  Nennergrad: 2  
 Faktorierte Form:  
 $f_2(x) = \frac{(x+1)^2}{(x+2)(x-2)}$   
 $f_3(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 1\frac{1}{2}}$   
 Funktion nach der Polynomdivision:  
 $f_3(x) = x + 1\frac{1}{2} + \frac{-1\frac{3}{4}}{x - 1\frac{1}{2}}$

Produktdarstellung (faktorierte Form) der gebrochenrationalen Funktion

$$f(x) = a \frac{(x - z_1)(x - z_2)(x - z_3)\dots}{(x - n_1)(x - n_2)(x - n_3)\dots}$$

$z_1, z_2, z_3 \dots$  Nullstellen des Zählers  
 $n_1, n_2, n_3 \dots$  Nullstellen des Nenners

#### Definitions- und Wertebereich

Definitionsbereich:  
 Nullstellen des Nennerpolynoms ausschließen.  
 Nennerpolynom:  $N(x) = 0$   
 $n_1, n_2, n_3 \dots$  Nullstellen des Nenners (Definitionslücken)  
 $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{n_0, n_1, n_2, \dots\}$   
 (siehe Algebra - Gleichungen)  
 Wertebereich:  
 Bestimmung nur nach Kurvendiskussion möglich.

$$f_1(x) = \frac{1}{(x+2)}$$

$$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$$

$$f_2(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 4}$$

Nenner Null setzen  
 $x^2 - 4 = 0$   
 $x^2 - 4 = 0 \quad / + 4$   
 $x = \pm\sqrt{4}$   
 $x_1 = 2 \quad x_2 = -2$   
 $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$

#### Symmetrie

Punktsymmetrie zum Ursprung:  
 $f(-x) = -f(x)$   
 Achsensymmetrie zur y-Achse:  
 $f(-x) = f(x)$

**Schnittpunkte mit der x-Achse - Nullstellen**

Zählerpolynom gleich Null setzen.

Zählerpolynom:  $Z(x) = 0$

$z_1, z_2, z_3 \dots$  Nullstellen des Zählers

(siehe Algebra - Gleichungen)

$$f_2(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 4}$$

Zählerpolynom gleich Null setzen:

$$x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1}$$

$$x_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{0}}{2}$$

$$x_1 = -1 \quad x_2 = -1$$

$x_1 = -1$ ; 2-fache Nullstelle

**Verhalten im Unendlichen - Grenzwert - Asymptoten**

- Zählergrad > Nennergrad

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \pm \infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \pm \infty$$

Das Vorzeichen der Glieder mit der höchsten Potenzen und der Grad der höchsten Exponenten, bestimmen das Vorzeichen des Grenzwerts.

Grenzwert gegen plus Unendlich

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_m} \cdot \frac{(\infty)^n}{(\infty)^m} = \pm \infty$$

Grenzwert gegen minus Unendlich

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{a_n}{b_m} \cdot \frac{(-\infty)^n}{(-\infty)^m} = \pm \infty$$

- Zählergrad = Nennergrad + 1

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = \pm \infty$$

Polynomdivision - schiefe Asymptote

- Zählergrad = Nennergrad

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = \frac{a_n}{b_m}$$

horizontale Asymptote  $y = \frac{a_n}{b_m}$

- Zählergrad < Nennergrad

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = 0$$

horizontale Asymptote  $y = 0$

Zählergrad < Nennergrad

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{1}{x + 2} = 0$$

Horizontale Asymptote:  $y = 0$

Zählergrad = Nennergrad

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{1x^2 + 2x + 1}{1x^2 - 4} = \frac{1}{1} = 1$$

Horizontale Asymptote:  $y = 1$

Zählergrad = Nennergrad + 1

$$f_3(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 1\frac{1}{2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1} \cdot \frac{(\infty)^2}{(\infty)^1} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1} \cdot \frac{(-\infty)^2}{(-\infty)^1} = -\infty$$

oder

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2(1 - \frac{4}{x^2})}{x(1 - \frac{1}{2x})} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2(1 - \frac{4}{x^2})}{x(1 - \frac{1}{2x})} = -\infty$$

Polynomdivision :

$$\begin{array}{r} (x^2 \quad \quad \quad -4 \quad \quad) : (x - 1\frac{1}{2}) = x + 1\frac{1}{2} \\ -(x^2 \quad -1\frac{1}{2}x) \\ \hline 1\frac{1}{2}x \quad -4 \\ -(1\frac{1}{2}x \quad -2\frac{1}{4}) \\ \hline -1\frac{3}{4} \end{array}$$

$$f_3(x) = x + 1\frac{1}{2} + \frac{-1\frac{3}{4}}{x - 1\frac{1}{2}}$$

Schiefe Asymptote:  $y = x + 1\frac{1}{2}$

**Verhalten an den Definitionslücken - Grenzwert - Asymptoten**

$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{x_0, x_1..\}$   
 $x_0, x_1..$  sind Definitionslücken von  $f(x)$   
 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty \Rightarrow$   
 Vertikale Asymptote:  $x = x_0$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{1}{(x+2)} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{1}{(x+2)} = -\infty$$

Vertikale Asymptote (Polstelle):  $x = -2$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{(x+1)^2}{(x+2)(x-2)} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{(x+1)^2}{(x+2)(x-2)} = \infty$$

Vertikale Asymptote (Polstelle):  $x = -2$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x+1)^2}{(x+2)(x-2)} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x+1)^2}{(x+2)(x-2)} = -\infty$$

Vertikale Asymptote (Polstelle):  $x = 2$

**Ableitung**

Die Ableitungen bildet man durch die Quotientenregel,  
 $f'(x) = \frac{Z'(x) \cdot N(x) - Z(x) \cdot N'(x)}{(N(x))^2}$   
 Die erste Ableitung  $f'(x)$  gibt die Steigung der Funktion an der Stelle  $x$  an.  
 Die zweite Ableitung  $f''(x)$  gibt die Krümmung der Funktion an der Stelle  $x$  an.

$$f_1'(x) = \frac{0 \cdot (x+2) - 1 \cdot 1}{(x+2)^2}$$

$$= \frac{0-1}{(x+2)^2}$$

$$= \frac{-1}{(x+2)^2}$$

$$= \frac{-1}{(x+2)^2}$$

$$f''(x) = \frac{0 \cdot (x^2+4x+4) - (-1) \cdot (2x+4)}{(x^2+4x+4)^2}$$

$$= \frac{0 - (-2x-4)}{(x^2+4x+4)^2}$$

$$= \frac{2x+4}{(x^2+4x+4)^2}$$

$$= \frac{2x+4}{(x^2+4x+4)^2}$$

$$= \frac{2(x+2)}{(x+2)^4}$$

$$= \frac{2}{(x+2)^3}$$

$$f_2(x) = \frac{x^2+2x+1}{x^2-4}$$

$$f'(x) = \frac{(2x+2) \cdot (x^2-4) - (x^2+2x+1) \cdot 2x}{(x^2-4)^2}$$

$$= \frac{(2x^3+2x^2-8x-8) - (2x^3+4x^2+2x)}{(x^2-4)^2}$$

$$= \frac{-2x^2-10x-8}{(x^2-4)^2}$$

**Extremwerte und die 2. Ableitung**

In den Extremwerten hat  $f(x)$  eine horizontale Tangente (HT).  
 •  $f'(x) = 0$  (Notwendige Bedingung)  
 Die Nullstellen der 1. Ableitung bestimmen ( $x_0, x_1..$ ).  
 In diesen Nullstellen ( $x_0, x_1..$ ) kann die Funktion einen Hochpunkt, Tiefpunkt oder Terrassenpunkt (Sattelpunkt) besitzen.  
 Einsetzen der Nullstellen  $x_0, x_1..$  in die 2. Ableitung (Hinreichende Bedingung)  
 •  $f''(x_0) > 0$  (LK)  $\Rightarrow$  Tiefpunkt (Minimum) bei  $x_0$   
 •  $f''(x_0) < 0$  (RK)  $\Rightarrow$  Hochpunkt (Maximum) bei  $x_0$   
 •  $f''(x_0) = 0 \wedge f'''(x_0) \neq 0 \Rightarrow$  Terrassenpunkt

$$f_2'(x) = \frac{-2x^2 - 10x - 8}{x^4 - 8x^2 + 16} = 0$$

$$-2x^2 - 10x - 8 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{+10 \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-8)}}{2 \cdot (-2)}$$

$$x_{1/2} = \frac{+10 \pm \sqrt{36}}{-4}$$

$$x_{1/2} = \frac{10 \pm 6}{-4}$$

$$x_1 = \frac{10+6}{-4} \quad x_2 = \frac{10-6}{-4}$$

$$x_1 = -4 \quad x_2 = -1$$

$$f''(-4) = 6 > 0 \Rightarrow \text{Tiefpunkt: } (-4/\frac{3}{4})$$

$$f''(-1) = -6$$

$$f''(-1) < 0 \Rightarrow \text{Hochpunkt: } (-1/0)$$



**Extremwerte und das Monotonieverhalten**

Extremwerte sind Hochpunkte (Maxima) bzw. Tiefpunkte (Minima) der Funktion. In den Extremwerten hat  $f(x)$  eine horizontale Tangente (HT).

- $f'(x) = 0$  (Notwendige Bedingung)

Die Nullstellen der 1. Ableitung bestimmen  $(x_0, x_1..)$ .

In diesen Nullstellen  $(x_0, x_1..)$  kann die Funktion einen Hochpunkt, Tiefpunkt oder Terrassenpunkt (Sattelpunkt) besitzen.

Zur Unterscheidung werden die Nullstellen in die Vorzeichen-tabelle eintragen. Einen Wert kleiner bzw. größer als die Nullstelle wählen und das Vorzeichen von  $f'(x)$  in die Tabelle eintragen. (Hinreichende Bedingung)

- Hochpunkt (HP)

Monotonieverhalten ändert sich von streng monoton steigend (sms) nach streng monoton fallend (smf).

Vorzeichenwechsel (VZW) der 1.Ableitung  $f'(x)$  von Plus nach Minus.

	$x <$	$x_1$	$< x$
$f'(x)$	+	0	-
Graph	sms	HP	smf

- Tiefpunkt (TP)

Monotonieverhalten ändert sich von streng monoton fallend (smf) nach streng monoton steigend (sms).

Vorzeichenwechsel (VZW) der 1.Ableitung  $f'(x)$  von Minus nach Plus.

	$x <$	$x_1$	$< x$
$f'(x)$	-	0	+
Graph	smf	TP	sms

- Terrassenpunkt (TEP)

Monotonieverhalten ändert sich nicht. Kein Vorzeichenwechsel (VZW) der 1.Ableitung.

	$x <$	$x_1$	$< x$		$x <$	$x_1$	$< x$
$f'(x)$	+	0	+	$f'(x)$	-	0	-
Graph	sms	TEP	sms	Graph	smf	TEP	smf

Die Ränder des Definitionsbereichs (Definitionslücken) müssen in die Tabelle mit eingetragen werden.

$$f_1'(x) = \frac{-1}{(x+2)^2}$$

Zähler = 0  
keine Lösung

Nullstellen des Nenners aus  $f(x)$  übernehmen  
 $x_2 = -2$ ; 1-fache Nullstelle

	$x <$	$-2$	$< x$
$f'(x)$	-	0	-

$$x \in ]-\infty; -2[ \cup ]-2; \infty[ f'(x) < 0 \text{ smf}$$

**Wendepunkt und die 3.Ableitung**

Im Wendepunkt und im Flachpunkt ist das Krümmungsverhalten gleich Null.

- $f''(x) = 0$  (Notwendige Bedingung)

Die Nullstellen der 2. Ableitung bestimmen  $(x_0, x_1..)$ .

Einsetzen der Nullstellen  $x_0, x_1..$  in die 3. Ableitung (Hinreichende Bedingung)

- $f'''(x_0) \neq 0 \Rightarrow$  Wendepunkt

### Wendepunkte und das Krümmungsverhalten

Im Wendepunkt und im Flachpunkt ist das Krümmungsverhalten gleich Null.

- $f''(x) = 0$  (Notwendige Bedingung)

Die Nullstellen der 2. Ableitung bestimmen ( $x_0, x_1..$ ). Zur Unterscheidung zwischen Wendepunkt und Flachpunkt werden die Nullstellen in die Vorzeichen-tabelle eintragen. (Hinreichende Bedingung) Einen Wert kleiner bzw. größer als die Nullstelle wählen und das Vorzeichen von  $f''(x)$  in die Tabelle eintragen.

- Wendepunkt (WP)

Das Krümmungsverhalten ändert sich von rechtsgekrümmt (RK) nach linksgekrümmt (LK) oder von linksgekrümmt nach rechtsgekrümmt.

Vorzeichenwechsel (VZW) der 2.Ableitung  $f''(x)$  von Plus nach Minus oder von Minus nach Plus.

	$x <$	$x_1$	$< x$		$x <$	$x_1$	$< x$
$f''(x)$	+	0	-	$f''(x)$	-	0	+
Graph	LK	WP	RK	Graph	RK	WP	LK

- Flachpunkt (FP)

Krümmungsverhalten ändert sich nicht

Kein Vorzeichenwechsel (VZW) der 2.Ableitung

	$x <$	$x_1$	$< x$		$x <$	$x_1$	$< x$
$f''(x)$	+	0	+	$f''(x)$	-	0	-
Graph	LK	FP	LK	Graph	RK	FP	RK

Die Ränder des Definitionsbereichs (Definitionslücken) müssen in die Tabelle mit eingetragen werden.

• Krümmung  
 $f''(x) = \frac{2}{(x+2)^3}$   
 Zähler = 0  
 keine Lösung

Nullstelle des Nenners aus  $f(x)$  übernehmen  
 $x_3 = -2$ ; 1-fache Nullstelle

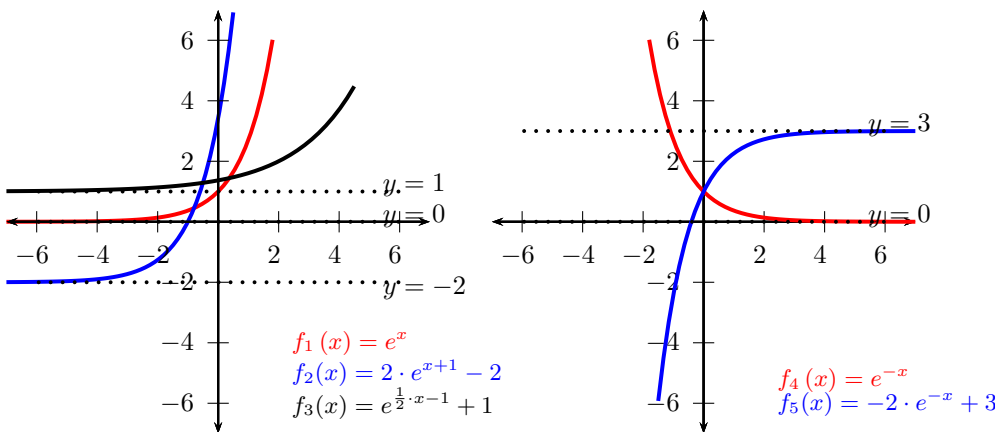
	$x <$	$-2$	$< x$
$f''(x)$	-	0	+

$x \in ] -2; \infty[$   $f''(x) > 0$  linksgekrümmt

$x \in ] -\infty; -2[$   $f''(x) < 0$  rechtsgekrümmt

Interaktive Inhalte: [Graph \(JS\)](#) - [Graph](#) - [Kurvendiskussion](#) -

### 4.4.3 Exponentialfunktion (Basis e)



### Formen der Exponentialfunktion

Exponentialfunktion

$f(x) = e^x$

Allgemeine Exponentialfunktion

$f(x) = a e^{b(x-c)} + d$

(siehe Funktionen - Exponentialfunktion)

$f_2(x) = 2 \cdot e^{x+1} - 2$

$f_4(x) = e^{-x}$

$f_5(x) = -2 \cdot e^{-x} + 3$

**Definitions- und Wertebereich**

$$f(x) = e^x$$

$$\mathbb{D} = \mathbb{R} \quad \mathbb{W} = \mathbb{R}^+$$

$$f(x) = ae^{b(x-c)} + d$$

$$\mathbb{D} = \mathbb{R}$$

$$a > 0 \quad \mathbb{W} = [d; \infty[$$

$$a < 0 \quad \mathbb{W} = ]-\infty; d]$$

$$f_2(x) = 2 \cdot e^{x+1} - 2 \quad \mathbb{D} = \mathbb{R} \quad \mathbb{W} = [-2; \infty[$$

$$f_4(x) = e^{-x} \quad \mathbb{D} = \mathbb{R} \quad \mathbb{R}^+$$

$$f_5(x) = -2 \cdot e^{-x} + 3 \quad \mathbb{D} = \mathbb{R} \quad \mathbb{W} = ]-\infty; 3]$$

**Schnittpunkte mit der x-Achse - Nullstellen**

$$f(x) = e^x \quad e^x > 0 \Rightarrow \text{keine Nullstellen}$$

$$f(x) = ae^{b(x-c)} + d$$

$$ae^{b(x-c)} + d = 0 \quad / -d$$

$$ae^{b(x-c)} = -d \quad / : a$$

$$e^{b(x-c)} = \frac{-d}{a} \quad / \ln$$

$$\frac{-d}{a} > 0$$

$$b(x-c) = \ln\left(\frac{-d}{a}\right) \quad / : b \quad / +c$$

$$x = \frac{\ln\left(\frac{-d}{a}\right)}{b} + c$$

$$\frac{-d}{a} \leq 0 \quad \text{keine Nullstellen}$$

$$f_2(x) = 2 \cdot e^{x+1} - 2$$

$$2 \cdot e^{(x+1)} - 2 = 0$$

$$2 \cdot e^{(x+1)} - 2 = 0 \quad / +2$$

$$2 \cdot e^{(x+1)} = +2 \quad / : 2$$

$$e^{(x+1)} = 1 \quad / \ln$$

$$x + 1 = \ln(1) \quad / -1$$

$$x = -1$$

$$f_3(x) = e^{\frac{1}{2} \cdot x - 1} + 1$$

$$e^{\frac{1}{2} \cdot x - 1} + 1 = 0 \quad / -1$$

$$e^{\frac{1}{2} \cdot x - 1} = -1$$

$$-1 < 0 \Rightarrow \text{keine Nullstellen}$$

**Grenzwert - Asymptoten**

$$f(x) = e^x$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \Rightarrow \text{horizontale Asymptote } y=0$$

$$f(x) = ae^{b(x-c)} + d$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} ae^{b(x-c)} + d$$

Schrittweise Berechnung für  $b > 0$  und  $a > 0$ :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} b(\infty - c) = \infty \quad \lim_{x \rightarrow \infty} e^\infty = \infty \quad \lim_{x \rightarrow \infty} a\infty + d = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} b(-\infty - c) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-\infty} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a \cdot 0 + d = d \Rightarrow \text{HA: } y = d$$

a	b	Grenzwert $\rightarrow +\infty$	Asymptote
+	+	$\lim_{x \rightarrow \infty} ae^{b(x-c)} + d = \infty$	keine
-	+	$\lim_{x \rightarrow \infty} ae^{b(x-c)} + d = -\infty$	keine
+	-	$\lim_{x \rightarrow \infty} ae^{b(x-c)} + d = d$	$y = d$
-	-	$\lim_{x \rightarrow \infty} ae^{b(x-c)} + d = d$	$y = d$

a	b	Grenzwert $\rightarrow -\infty$	Asymptote
+	+	$\lim_{x \rightarrow -\infty} ae^{b(x-c)} + d = d$	$y = d$
-	+	$\lim_{x \rightarrow -\infty} ae^{b(x-c)} + d = d$	$y = d$
+	-	$\lim_{x \rightarrow -\infty} ae^{b(x-c)} + d = \infty$	keine
-	-	$\lim_{x \rightarrow -\infty} ae^{b(x-c)} + d = -\infty$	keine

$$f_2(x) = 2 \cdot e^{x+1} - 2$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 2 \cdot e^{x+1} - 2 = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \infty + 1 = \infty \quad \lim_{x \rightarrow \infty} e^\infty = \infty \quad \lim_{x \rightarrow \infty} 2 \cdot \infty - 2 = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 2 \cdot e^{x+1} - 2 = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 2 \cdot e^{x+1} - 2 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (-\infty + 1) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-\infty} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 2 \cdot 0 - 2 = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 2 \cdot e^{x+1} - 2 = -2 \quad \text{HA: } y = -2$$

$$f_4(x) = e^{-x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} = 0 \quad \text{HA: } y = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$$

$$f_5(x) = -2 \cdot e^{-x} + 3$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} -2 \cdot e^{-x} + 3 = 3 \quad \text{HA: } y = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} -2 \cdot e^{-x} + 3 = +\infty$$

**Ableitung**

$$f(x) = e^x \quad f'(x) = e^x \quad f''(x) = e^x$$

Ableitung mit der Kettenregel

$$f(x) = e^{bx} \quad f'(x) = be^{bx} \quad f''(x) = b^2e^{bx}$$

$$f(x) = ae^{b(x-c)} + d \quad f'(x) = a \cdot be^{b(x-c)}$$

$$f''(x) = a \cdot b^2e^{b(x-c)}$$

$$f_2(x) = 2 \cdot e^{x+1} - 2 \quad f_2'(x) = 2 \cdot e^{x+1} \quad f_2''(x) = 2 \cdot e^{x+1}$$

$$f_4(x) = e^{-x} \quad f_4'(x) = -e^{-x} \quad f_4''(x) = e^{-x}$$

$$f_5(x) = -2 \cdot e^{-x} + 3 \quad f_5'(x) = 2 \cdot e^{-x}$$

$$f_3(x) = e^{\frac{1}{2} \cdot x - 1} + 1 \quad f_3'(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2} \cdot x - 1}$$

$$f_3''(x) = \frac{1}{4}e^{\frac{1}{2} \cdot x - 1}$$

**Monotonieverhalten**

$$f(x) = e^x \quad f'(x) = e^x$$

$e^x > 0 \Rightarrow$  streng monoton steigend

$$f(x) = ae^{b(x-c)} + d$$

$$f'(x) = a \cdot be^{b(x-c)}$$

$$e^{b(x-c)} > 0$$

$a \cdot b > 0 \Rightarrow$  streng monoton steigend (sms)

$a \cdot b < 0 \Rightarrow$  streng monoton fallend (smf)

a	b	Monotonieverhalten
+	+	sms
-	+	smf
+	-	smf
-	-	sms

$$f_2'(x) = 2 \cdot e^{x+1} > 0 \Rightarrow \text{sms}$$

$$f_4'(x) = -e^{-x} < 0 \Rightarrow \text{smf}$$

$$f_5'(x) = 2 \cdot e^{-x} > 0 \Rightarrow \text{sms}$$

$$f_3'(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2} \cdot x - 1} > 0 \Rightarrow \text{sms}$$

**Ableitung**

$$f(x) = e^x \quad f'(x) = e^x$$

Ableitung mit Kettenregel

$$f(x) = e^{ax} \quad f'(x) = ae^{ax}$$

$$f(x) = ae^{b(x-c)} + d \quad f'(x) = a \cdot be^{b(x-c)}$$

$$f_2(x) = 2 \cdot e^{x+1} - 2 \quad f_2'(x) = 2 \cdot e^{x+1}$$

$$f_4(x) = e^{-x} \quad f_4'(x) = -e^{-x}$$

$$f_5(x) = -2 \cdot e^{-x} + 3 \quad f_5'(x) = 2 \cdot e^{-x}$$

**Krümmungsverhalten**

$$f(x) = e^x \quad f''(x) = e^x$$

$e^x > 0 \Rightarrow$  linksgekrümmt (LK)

$$f(x) = ae^{b(x-c)} + d$$

$$f''(x) = a \cdot b^2 e^{b(x-c)}$$

$$e^{b(x-c)} > 0$$

$a > 0 \Rightarrow$  linksgekrümmt (LK)

$a < 0 \Rightarrow$  rechtsgekrümmt (RK)

$$f_2''(x) = 2 \cdot e^{x+1} > 0 \Rightarrow \text{LK}$$

$$f_4''(x) = e^{-x} > 0 \Rightarrow \text{LK}$$

$$f_5''(x) = -2 \cdot e^{-x} < 0 \Rightarrow \text{RK}$$

$$f_3''(x) = \frac{1}{4}e^{\frac{1}{2} \cdot x - 1} > 0 \Rightarrow \text{LK}$$

**Stammfunktion von f(x) - unbestimmtes Integral**

$$f(x) = e^x \quad F(x) = e^x + k$$

$$f(x) = ae^{b(x-c)} \quad F(x) = \frac{a}{b}e^{b(x-c)} + k$$

$$f_2(x) = 2 \cdot e^{x+1} - 2 \quad F_2(x) = 2 \cdot e^{x+1} - 2x + c$$

$$f_4(x) = e^{-x} \quad F_4(x) = -e^{-x} + c$$

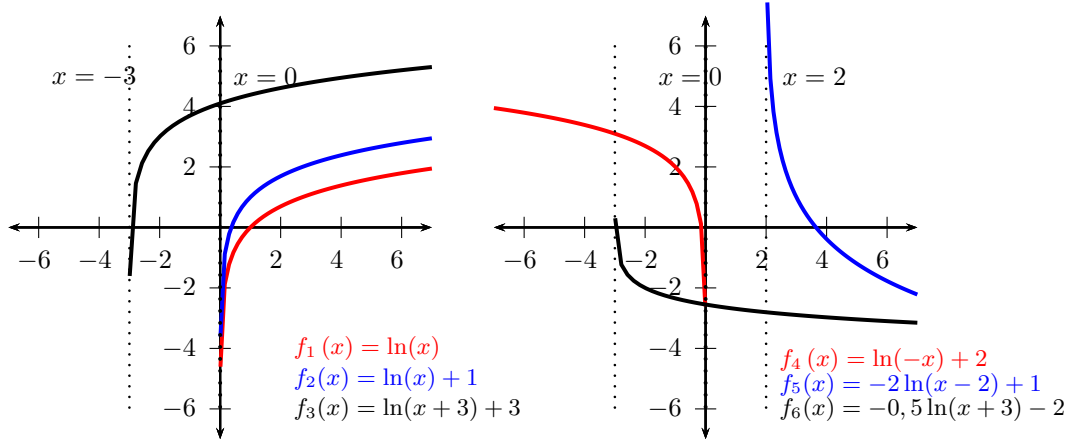
$$f_5(x) = -2 \cdot e^{-x} + 3 \quad F_5(x) = 2 \cdot e^{-x} + 3x + c$$

$$f_3(x) = e^{\frac{1}{2} \cdot x - 1} + 1$$

$$F_3(x) = \frac{1}{\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{2} \cdot x - 1} + x + c = 2e^{\frac{1}{2} \cdot x - 1} + x + c$$

Interaktive Inhalte: [Graph \(JS\)](#) - [Graph](#) -

### 4.4.4 Logarithmusfunktion (Basis e)



#### Formen der Logarithmusfunktion

Logarithmusfunktion

$$f(x) = \ln x$$

Allgemeine Logarithmusfunktion

$$f(x) = a \ln(b(x - c)) + d$$

(siehe Funktionen - Logarithmusfunktion)

$$f_1(x) = \ln(x)$$

$$f_2(x) = \ln(x) + 1$$

$$f_3(x) = \ln(x + 3) + 3$$

$$f_4(x) = \ln(-x) + 2$$

$$f_5(x) = -2 \ln(x - 2) + 1$$

$$f_6(x) = -0,5 \ln(x + 3) - 2$$

#### Definitions- und Wertebereich

$$f(x) = \ln x$$

$$\mathbb{W} = \mathbb{R}$$

$$\mathbb{D} = \mathbb{R}^+$$

$$f(x) = a \ln b(x - c) + d$$

$$\mathbb{W} = \mathbb{R}$$

Definitionsbereich:  $bx - c > 0$

- $b > 0 \quad \mathbb{D} = ]c; \infty[$

- $b < 0 \quad \mathbb{D} = ]-\infty; c[$

$$f_1(x) = \ln(x) \quad \mathbb{D} = \mathbb{R}^+$$

$$f_2(x) = \ln(x) + 1 \quad \mathbb{D} = \mathbb{R}^+$$

$$f_3(x) = \ln(x + 3) + 3 \quad \mathbb{D} = ]-3; \infty[$$

$$f_4(x) = \ln(-x) + 2 \quad \mathbb{D} = \mathbb{R}^-$$

$$f_5(x) = -2 \ln(x - 2) + 1 \quad \mathbb{D} = ]2; \infty[$$

$$f_6(x) = -0,5 \ln(x + 3) - 2 \quad \mathbb{D} = ]-3; \infty[$$

#### Schnittpunkte mit der x-Achse - Nullstellen

$$f(x) = \ln(x)$$

$$\ln(x) = 0 \quad /e$$

$$x = e^0$$

$$x = 1$$

$$f(x) = a \ln(b(x - c)) + d$$

$$a \ln(b(x - c)) + d = 0 \quad / -d$$

$$a \ln(b(x - c)) = -d \quad / : a$$

$$\ln(b(x - c)) = \frac{-d}{a} \quad /e$$

$$b(x - c) = e^{\left(\frac{-d}{a}\right)} \quad / : b \quad / + c$$

$$x = \frac{e^{\left(\frac{-d}{a}\right)}}{b} + c$$

$$f_3(x) = \ln(x + 3) + 3$$

$$\ln(x + 3) + 3 = 0$$

$$\ln(x + 3) + 3 = 0 \quad / -3$$

$$\ln(x + 3) = -3 \quad /e^{\cdot}$$

$$x + 3 = e^{-3} \quad / -3$$

$$x = e^{-3} - 3$$

$$x = -2,95$$

$$f_6(x) = -0,5 \ln(x + 3) - 2$$

$$-\frac{1}{2} \cdot \ln(x + 3) - 2 = 0$$

$$-\frac{1}{2} \cdot \ln(x + 3) - 2 = 0 \quad / +2$$

$$-\frac{1}{2} \cdot \ln(x + 3) = +2 \quad / : -\frac{1}{2}$$

$$\ln(x + 3) = -4 \quad /e^{\cdot}$$

$$x + 3 = e^{-4} \quad / -3$$

$$x = e^{-4} - 3$$

$$x = -2,98$$

**Grenzwert - Asymptoten**

$$f(x) = \ln(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty \Rightarrow \text{vertikale Asymptote: } x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln(x) = \infty$$

$$f(x) = a \ln(b(x - c)) + d$$

Schrittweise Berechnung für  $b > 0$  und  $a > 0$ :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} b(\infty - c) = \infty \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \infty = \infty \quad \lim_{x \rightarrow \infty} a\infty + d = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow c^+} b(c^+ - c) = 0^+ \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln 0^+ = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} a \cdot (-\infty) + d = -\infty \Rightarrow \text{VA: } x = c$$

a	b	Grenzwert $\rightarrow \pm\infty$	Asymptote
+	+	$\lim_{x \rightarrow \infty} a \ln b(x - c) + d = \infty$	keine
-	+	$\lim_{x \rightarrow \infty} a \ln b(x - c) + d = -\infty$	keine
+	-	$\lim_{x \rightarrow -\infty} a \ln b(x - c) + d = \infty$	keine
-	-	$\lim_{x \rightarrow -\infty} a \ln b(x - c) + d = -\infty$	keine

a	b	Grenzwert $\rightarrow c$	Asymptote
+	+	$\lim_{x \rightarrow c^+} a \ln b(x - c) + d = -\infty$	$x = c$
-	+	$\lim_{x \rightarrow c^+} a \ln b(x - c) + d = \infty$	$x = c$
+	-	$\lim_{x \rightarrow c^-} a \ln b(x - c) + d = -\infty$	$x = c$
-	-	$\lim_{x \rightarrow c^-} a \ln b(x - c) + d = \infty$	$x = c$

$$f_5(x) = -2 \ln(x - 2) + 1 \quad \mathbb{D} = ]2; \infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} -2 \ln(x - 2) + 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \infty - 2 = \infty \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \infty = \infty \quad \lim_{x \rightarrow \infty} -2 \cdot \infty + 1 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} -2 \ln(x - 2) + 1 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} -2 \ln(x - 2) + 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} (2^+ - 2) = 0^+ \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} \ln 0^+ = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} -2 \cdot (-\infty) - 2 = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} -2 \ln(x - 2) + 1 = \infty \quad \text{VA: } x = 2$$

$$f_4(x) = \ln(-x) + 2 \quad \mathbb{D} = \mathbb{R}^-$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(-x) + 2 = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \ln(-x) + 2 = -\infty \quad \text{VA: } x = 0$$

**Ableitung**

$$f(x) = \ln(x) \quad f'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$$

$$f''(x) = -x^{-2} = \frac{-1}{x^2}$$

Ketten- und Quotientenregel :

$$f(x) = \ln bx \quad f'(x) = \frac{b}{bx} = \frac{1}{x}$$

$$f''(x) = -x^{-2} = \frac{-1}{x^2}$$

$$f(x) = a \ln(b(x - c)) + d \quad f'(x) = \frac{a \cdot b}{b(x - c)}$$

$$f''(x) = \frac{-a \cdot b^2}{(b(x - c))^2}$$

$$f_2(x) = \ln(x) + 1 \quad f'_2(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$$

$$f''_2(x) = -x^{-2} = \frac{-1}{x^2}$$

$$f_3(x) = \ln(x + 3) + 3 \quad f'_3(x) = \frac{1}{x + 3} = (x + 3)^{-1}$$

$$f''_3(x) = -(x + 3)^{-2} = \frac{-1}{(x + 3)^2}$$

$$f_4(x) = \ln(-x) + 2 \quad f'_4(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$$

$$f''_4(x) = -x^{-2} = \frac{-1}{x^2}$$

$$f_5(x) = -2 \ln(x - 2) + 1 \quad f'_5(x) = \frac{-2}{(x - 2)} = -2(x - 2)^{-1}$$

$$f''_5(x) = 2(x - 2)^{-2} = \frac{2}{(x - 2)^2}$$

**Monotonieverhalten**

$$f(x) = \ln(x) \quad f'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$$

$$\frac{1}{x} \Rightarrow \text{streng monoton steigend} \quad \mathbb{D} = \mathbb{R}^+$$

$$f(x) = a \ln(b(x - c)) + d \quad f'(x) = \frac{a \cdot b}{b(x - c)}$$

$$b(x - c) > 0$$

a	b	Monotonieverhalten
+	+	sms
-	+	smf
+	-	smf
-	-	sms

$$f'_2(x) = \frac{1}{x} > 0 \Rightarrow \text{sms}$$

$$f'_3(x) = \frac{1}{x + 3} > 0 \Rightarrow \text{sms}$$

$$f'_5(x) = \frac{-2}{(x - 2)} < 0 \Rightarrow \text{smf}$$

**Krümmungsverhalten**

$$f(x) = \ln(x) \quad f''(x) = -x^{-2} = \frac{-1}{x^2}$$
$$\frac{-1}{x^2} < 0 \Rightarrow \text{rechtsgekrümmt (RK)}$$

$$f(x) = a \ln(b(x-c)) + d \quad f''(x) = \frac{-a \cdot b^2}{(b(x-c))^2}$$
$$(b(x-c))^2 > 0$$

$$a > 0 \Rightarrow \text{rechtsgekrümmt (RK)}$$

$$a < 0 \Rightarrow \text{linkssgekrümmt (LK)}$$

$$f_2''(x) = -x^{-2} = \frac{-1}{x^2} < 0 \Rightarrow \text{RK}$$

$$f_3''(x) = -(x+3)^{-2} = \frac{-1}{(x+3)^2} < 0 \Rightarrow \text{RK}$$

$$f_5''(x) = 2(x-2)^{-2} = \frac{2}{(x-2)^2} > 0 \Rightarrow \text{LK}$$

**Stammfunktion von f(x) - unbestimmtes Integral**

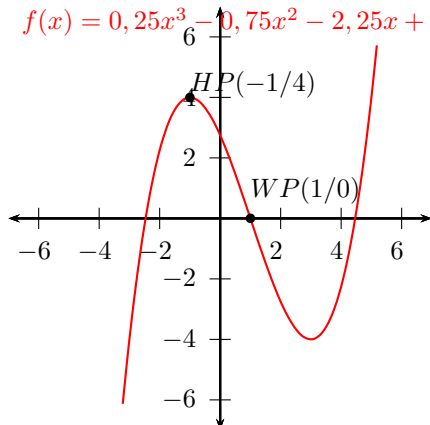
$$f(x) = \ln(x) \quad F(x) = x \ln(x) - x + c$$

Interaktive Inhalte: [Graph \(JS\)](#) - [Graph](#) -

## 4.5 Aufstellen von Funktionsgleichungen

### 4.5.1 Ganzrationale Funktion

$$f(x) = 0,25x^3 - 0,75x^2 - 2,25x + 2,75$$



Eine ganzrationale Funktion vom Grad  $n$  ist durch  $n+1$  Bedingungen eindeutig festgelegt.

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} \dots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0$$

Um die  $n+1$  Koeffizienten  $(a_n, a_{n-1}, \dots, a_0)$  berechnen zu können, sind  $n+1$  Gleichungen ( $n+1$  Bedingungen) nötig.

Funktion vom Grad 2

Um die 3 Koeffizienten  $(a, b, c)$  berechnen zu können, sind 3 Gleichungen (3 Bedingungen) nötig.

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$f'(x) = 2ax + b$$

Funktion vom Grad 3

Um die 4 Koeffizienten  $(a, b, c, d)$  berechnen zu können, sind 4 Gleichungen (4 Bedingungen) nötig.

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$f''(x) = 6ax + 2b$$

Funktion vom Grad 4

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

$$f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$$

$$f''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c$$

Gesucht ist ein Polynom 3. Grades, das bei  $x = 1$  einen Wendepunkt hat, im Punkt  $P(-1/4)$  ein Extremum besitzt und bei  $x = 1$  die  $x$ -Achse schneidet.

Polynom 3. Grades

$$f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$$

$$f'(x) = 3a \cdot x^2 + 2b \cdot x + c$$

$$f''(x) = 6a \cdot x + 2b$$

Um die 4 Koeffizienten  $(a, b, c, d)$  berechnen zu können, sind 4 Gleichungen nötig.

1. Bedingung: Wendepunkt bei  $x = 1$

$$f''(1) = 0 \quad 6a \cdot 1 + 2b = 0$$

2. Bedingung: Punkt  $P(-1/4)$

$$f(-1) = 4 \quad a \cdot (-1)^3 + b \cdot (-1)^2 + c \cdot (-1) + d = 4$$

3. Bedingung: Extremwert an der Stelle  $x_0 = 1$

$$f'(-1) = 0 \quad 3a \cdot (-1)^2 + 2b \cdot (-1) + c = 0$$

4. Bedingung: Nullstelle an der Stelle  $x_0 = 1$

$$f(1) = 0 \quad a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + c \cdot 1 + d = 0$$

Lineares Gleichungssystem lösen:

$$6a + 2b = 0$$

$$-a + b - c + d = 4$$

$$3a - 2b + c = 0$$

$$a + b + c + d = 0$$

$$a = \frac{1}{4}$$

$$b = -\frac{3}{4}$$

$$c = -2\frac{1}{4}$$

$$d = 2\frac{3}{4}$$

Funktionsgleichung:

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{4}x^2 - 2\frac{1}{4}x + 2\frac{3}{4}$$



Bedingungen für die Funktion	Gleichung
Punkt $P(x_0/y_0)$	$f(x_0) = y_0$
Nullstelle an der Stelle $x_0$	$f(x_0) = 0$
Punkt auf der y-Achse $y_0$	$f(0) = y_0$
Extremwert an der Stelle $x_0$	$f'(x_0) = 0$
Horizontale Tangente an der Stelle $x_0$	$f'(x_0) = 0$
Berührungspunkt der x-Achse an der Stelle $x_0$	$f(x_0) = 0$ $f'(x_0) = 0$
Tangente: $y = mx + t$ in $x_0$	$y_0 = mx_0 + t$ $f(x_0) = y_0$ $f'(x_0) = m$
Normale: $y = mx + t$ in $x_0$	$y_0 = mx_0 + t$ $f(x_0) = y_0$ $f'(x_0) = -\frac{1}{m}$
Wendepunkt an der Stelle $x_0$	$f''(x_0) = 0$
Terrassenpunkt an der Stelle $x_0$	$f'(x_0) = 0$ $f''(x_0) = 0$
Steigung m an der Stelle $x_0$	$f'(x_0) = m$
Hoch-/Tiefpunkt( $x_0/y_0$ )	$f(x_0) = y_0$ $f'(x_0) = 0$
Terrassenpunkt( $x_0/y_0$ )	$f(x_0) = y_0$ $f'(x_0) = 0$ $f''(x_0) = 0$
Wendepunkt( $x_0/y_0$ )	$f(x_0) = y_0$ $f''(x_0) = 0$
Wendetangente: $y = mx + t$ in $x_0$	$y_0 = mx_0 + t$ $f(x_0) = y_0$ $f'(x_0) = m$ $f''(x_0) = 0$
Steigung m im Punkt $P(x_0/y_0)$	$f(x_0) = y_0$ $f'(x_0) = m$
Achsensymmetrie $f(x) = f(-x)$	Glieder mit ungeraden Exponenten entfallen
Punktsymmetrie $f(x) = -f(-x)$	Glieder mit geraden Exponenten entfallen

Interaktive Inhalte: [Graph \(JS\)](#) - [Graph](#) - [hier klicken](#)