

# Formelsammlung Funktionen

<http://www.fersch.de>

©Klemens Fersch

14. Mai 2017

## Inhaltsverzeichnis

<b>3 Funktionen</b>	<b>3</b>
3.1 Grundlagen	3
3.1.1 Definition	3
3.1.2 Umkehrfunktion	4
3.2 Lineare Funktion	5
3.2.1 Ursprungsgerade	5
3.2.2 Graph und Eigenschaften	5
3.2.3 Geradengleichung aufstellen	7
3.2.4 Gerade - Gerade	7
3.3 Quadratische Funktion	9
3.3.1 Graph und Eigenschaften	9
3.3.2 Parabelgleichung aufstellen und umformen	11
3.3.3 Parabel - Gerade	12
3.3.4 Parabel - Parabel	13
3.4 Eigenschaften von Funktionen	14
3.4.1 Symmetrie	14
3.4.2 Monotonie	14
3.4.3 Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen	15
3.4.4 Asymptote	16
3.4.5 Verknüpfung von Funktionen	17
3.4.6 Abbildung von Funktionen	17
3.5 Potenzfunktion	19
3.5.1 Parabeln vom Grad $n$ - gerader Exponent	19
3.5.2 Parabeln vom Grad $n$ - ungerader Exponent	19
3.5.3 Hyperbeln vom Grad $n$ - gerader Exponent	20
3.5.4 Hyperbeln vom Grad $n$ - ungerader Exponent	21
3.5.5 Wurzelfunktion - rationaler, positiver Exponent	22
3.5.6 Wurzelfunktion - rationaler, negativer Exponent	22
3.6 Exponentialfunktion	24
3.6.1 Graph und Eigenschaften	24
3.7 Logarithmusfunktion	25
3.7.1 Graph und Eigenschaften	25
3.8 Sinusfunktion	26
3.8.1 Graph und Eigenschaften	26
3.9 Kosinusfunktion	27
3.9.1 Graph und Eigenschaften	27
3.10 Tangensfunktion	28
3.10.1 Graph und Eigenschaften	28
3.11 Betragsfunktion	29
3.11.1 Graph und Eigenschaften	29
3.12 Wachstumsfunktionen	30
3.12.1 Lineares Wachstum	30
3.12.2 Exponentielles Wachstum	31



### 3 Funktionen

#### 3.1 Grundlagen

##### 3.1.1 Definition

Jedem Element  $x$  aus der Definitionsmenge  $D$  wird **genau** ein Element  $y$  aus der Wertemenge  $W$  zugeordnet.

$x$  - unabhängige Variable

$y$  - abhängige Variable

Zu jeder Funktion gehört ein Definitionsbereich.

Ein Tafel Schokolade kostet 2,- Euro.  
Wieviel kosten 1, 2, 3, 4, 5 Tafeln ?

$x$  = Anzahl der Tafeln

$y$  = Preis

$x$	1	2	3	4	5
$y$	2	4	6	8	10

$$D = \{1; 2; 3; 4; 5\}$$

$$W = \{2; 4; 6; 8; 10\}$$

Funktionsgleichung:  $y = 2 \cdot x$

$x$	1	2	3	4	4
$y$	2	4	6	8	10

keine eindeutige Zordnung  $\Rightarrow$  keine Funktion

##### Schreibweise

$y = f(x)$  - Funktionsgleichung, Funktion

$f(x)$  - Funktionsterm

$f : x \mapsto y$        $x$ -Werte werden auf  $y$ -Werte abgebildet

$f : x \mapsto f(x)$        $x$ -Werte werden auf  $f(x)$  abgebildet

$$y = 2 \cdot x$$

$$f(x) = 2 \cdot x$$

$$f : x \mapsto 2 \cdot x$$

##### Definitions- und Wertebereich

- Definitionsbereich

Zahlenbereich der für  $x$  (unabhängige Variable) eingesetzt werden darf.

Einschränkungen des Definitionsbereichs sind nötig bei:

- Textaufgaben, bei denen nur bestimmte  $x$ -Wert möglich sind.
- Bruchfunktionen: Division durch Null ist nicht erlaubt. (Nenner  $\neq 0$ )
- Wurzelfunktionen: unter der Wurzel (Radikant) dürfen keine negativen Zahlen stehen. (Radikant  $\geq 0$ )
- Logarithmusfunktionen: das Argument muss positiv sein. (Argument  $> 0$ )

- Wertebereich

Zahlenbereich den  $y$  (abhängige Variable Funktionswert) annehmen kann.

$$y = (x+3)^{-1} + 1 = \frac{1}{x+3} + 1 \quad D = \mathbb{R} \setminus \{-3\} \quad W = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

$$y = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x} \quad D = \mathbb{R}_0^+ \quad W = \mathbb{R}_0^+$$

$$y = \log_3(x) \quad D = \mathbb{R}^+ \quad W = \mathbb{R}$$

### 3.1.2 Umkehrfunktion

#### Definition

Jedem Element  $y$  aus der Wertemenge  $W$  wird **genau** ein Element  $x$  aus der Definitionsmenge  $D$  zugeordnet.

$y$  - unabhängige Variable

$x$  - abhängige Variable

Funktionen sind umkehrbar, wenn sie im Definitionsbereich streng monoton steigen oder streng monoton fallen.

#### Schreibweise

$x = f^{-1}(y)$  - Umkehrfunktion

$f : y \mapsto x$   $y$ -Werte werden auf  $x$ -Werte abgebildet

Nach dem Vertauschen der Variablen:

$y = f^{-1}(x)$  - Umkehrfunktion

#### Ermitteln der Umkehrfunktion

Graphisch: Funktionsgraph an der Winkelhalbierenden  $y = x$  spiegeln.

Algebraisch: Funktionsgleichung nach  $x$  auflösen und die Variablen  $x$  und  $y$  vertauschen.

$$y = 2 \cdot x - 3 \quad /+3 \quad /:2$$

$$\frac{y+3}{2} = x$$

$$\frac{1}{2} \cdot y + \frac{3}{2} = x$$

$$x = \frac{1}{2} \cdot y + \frac{3}{2}$$

$$f^{-1}(y) = \frac{1}{2} \cdot y + \frac{3}{2}$$

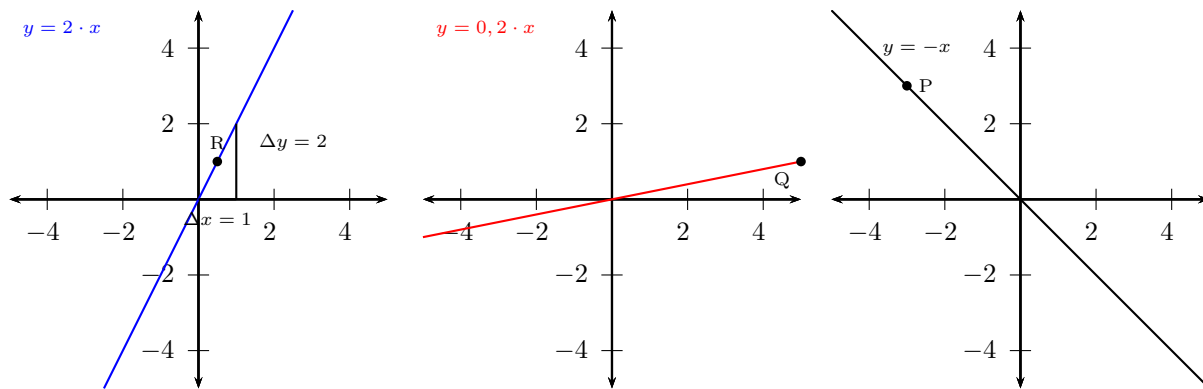
Vertauschen der Variablen:

$$y = \frac{1}{2} \cdot x + \frac{3}{2}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{2} \cdot x + \frac{3}{2}$$

### 3.2 Lineare Funktion

#### 3.2.1 Ursprungsgerade



#### Ursprungsgerade

$y = m \cdot x$   
 Steigung-Proportionalitätsfaktor:  $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$   
 $m > 0$  steigend  
 $m = 0$   $y = 0$  entspricht der x-Achse  
 $m < 0$  fallend  
 Winkelhalbierende des I und III Quadranten:  $y = x$   
 Winkelhalbierende des II und IV Quadranten:  $y = -x$

$y = m \cdot x$   
 $y = 2 \cdot x$   $m = 2$   
 $R(\frac{1}{2}/y)$   $x = \frac{1}{2}$   
 $y = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$   $R(\frac{1}{2}/1)$

---

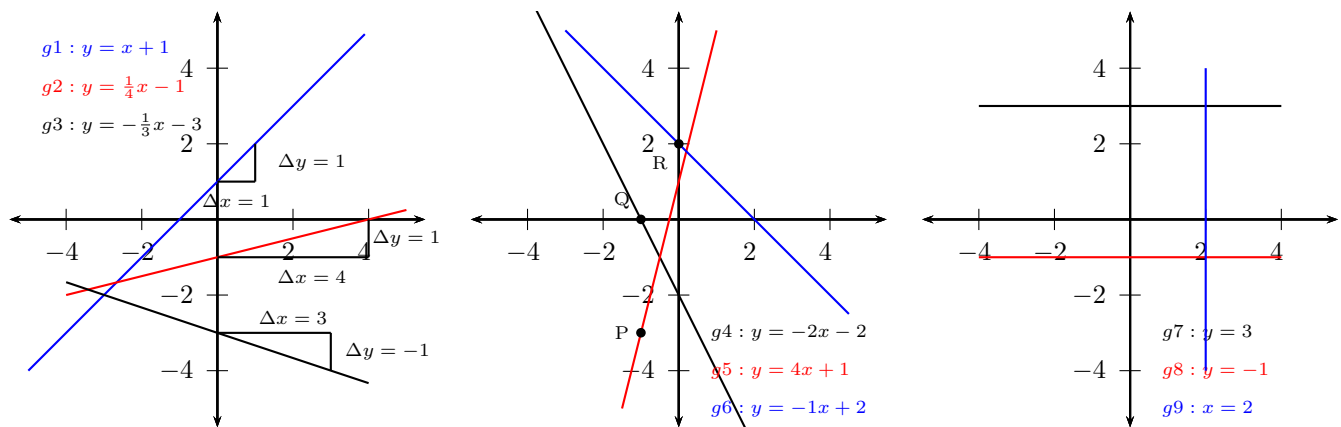
$m = \frac{y}{x}$   
 $Q(5/1)$   $y = 1$   $x = 5$   
 $m = \frac{1}{5}$   $y = \frac{1}{5}x$

---

$x = \frac{y}{m}$   
 $P(x/3)$   $y = -1 \cdot x$   
 $m = -1$   $y = 3$   
 $3 = -1 \cdot x$   
 $x = -3$   $P(-3/3)$

Interaktive Inhalte: [Graph \(JS\)](#) - [Graph](#) -  $y = m \cdot x$  -  $x = \frac{y}{m}$  -  $m = \frac{y}{x}$  -

#### 3.2.2 Graph und Eigenschaften



**Gerade - lineare Funktion**

$y = m \cdot x + t$       $f(x) = m \cdot x + t$       $\mathbb{D} = \mathbb{R}$     $\mathbb{W} = \mathbb{R}$   
 Steigung:      $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$   
 $m > 0$      steigend  
 $m = 0$      parallel zur x-Achse  
 $m < 0$      fallend  
 y-Achsenabschnitt:      $t$   
 Besondere Geraden:  
 $y = 0$      x-Achse  
 $y = t$      Parallele zur x-Achse im Abstand  $t$   
 $x = 0$      y-Achse  
 $x = k$      Parallele zur y-Achse im Abstand  $k$

$g1 : y = x + 1$   
 Steigung:  $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{1} = 1$   
 $m > 0$      steigend  
 y-Achsenabschnitt:  $t = 1$   
 $g2 : y = \frac{1}{4}x - 1$   
 Steigung:  $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{4}$   
 $m > 0$      steigend  
 y-Achsenabschnitt:  $t = -1$   
 $g3 : y = -\frac{1}{3}x - 3$   
 Steigung:  $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1}{3}$   
 $m < 0$      fallend  
 y-Achsenabschnitt:  $t = -3$   
 $g5 : y = 4x + 1$   
 Steigung:  $m = 4$   
 $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4}{1}$   
 y-Achsenabschnitt:  $t = 1$   
 $P(-1/y) \quad x = 1$   
 $y = 4 \cdot (-1) + 1$   
 $y = -1 \quad P(-1/ - 3)$

**Schnittpunkt mit der x-Achse - Nullstelle**

$y = mx + t$   
 $y = 0 \quad mx + t = 0$   
 $x = \frac{-t}{m}$

$g4 : y = -2x - 2$   
 $0 = -2x - 2 \quad / + 2$   
 $2 = -2x \quad / : (-2)$   
 $x = -1 \quad Q(-1/0)$

**Schnittpunkt mit der y-Achse**

$x = 0 \quad y = m \cdot 0 + t$   
 $y = m \cdot 0 + t$   
 $y = t$

Schnittpunkt mit der y-Achse:  $x = 0$   
 $g5 : y = -x + 2$   
 $y = -1 \cdot 0 + 2$   
 $y = 2$

**Graph oberhalb/unterhalb der x-Achse**

Einen beliebigen Wert kleiner bzw. größer als die Nullstelle wählen und das Vorzeichen des Funktionswerts in die Vorzeichentabelle eintragen.

	$x <$	$x_1$	$< x$
$f(x)$	+	0	-

$+ f(x) > 0$  Graph oberhalb der x-Achse  
 $- f(x) < 0$  Graph unterhalb der x-Achse

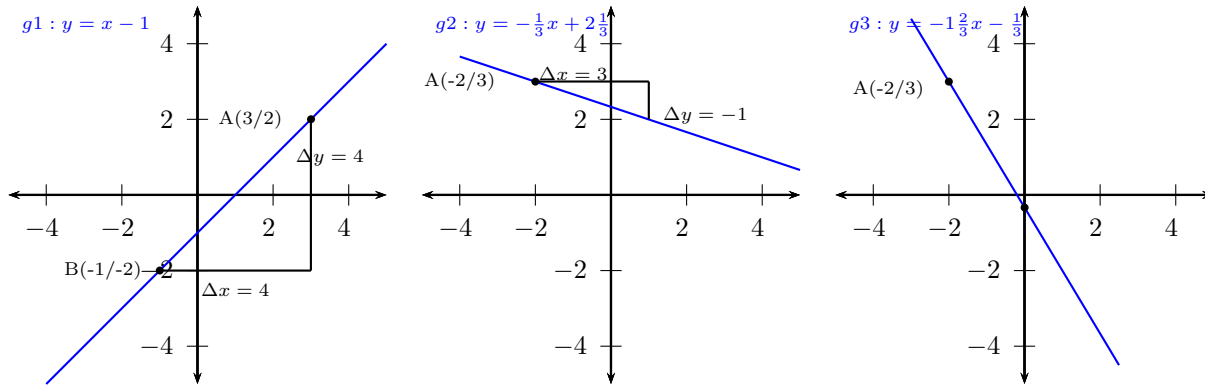
$g5 : y = 4x + 1 = 0$   
 $4x + 1 = 0 \quad / - 1$   
 $4x = -1 \quad / : 4$   
 $x = \frac{-1}{4}$   
 Wert kleiner als die Nullstelle wählen:  $x = -1$   
 $g5 : y = 4 \cdot (-1) + 1 = -3$   
 Minuszeichen eintragen  
 Wert größer als die Nullstelle wählen:  $x = 0$   
 $g5 : y = 4 \cdot (0) + 1 = +1$   
 Pluszeichen eintragen  
 Vorzeichentabelle:

	$x <$	$-\frac{1}{4}$	$< x$
$f(x)$	-	0	+

$+ f(x) > 0$  Graph oberhalb der x-Achse  
 $4x + 1 > 0$  für  $x \in ]-\frac{1}{4}; \infty[$   
 $- f(x) < 0$  Graph unterhalb der x-Achse  
 $4x + 1 < 0$  für  $x \in ]-\infty; -\frac{1}{4}[$

Interaktive Inhalte: [Graph \(JS\)](#) - [Graph](#) - [Eigenschaften](#) -  $y = m \cdot x + t$  -  $m = \frac{y-t}{x}$  -  $x = \frac{y-t}{m}$  -  $t = y - m \cdot x$  -

### 3.2.3 Geradengleichung aufstellen



#### Gerade durch 2 Punkte

$$y = m \cdot x + t$$

$$A(xa/ya) \quad B(xb/yb)$$

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{ya - yb}{xa - xb}$$

$$t = ya - m \cdot xa$$

$$A(3/2) \quad B(-1/-2)$$

$$m = \frac{2 + 2}{3 + 1}$$

$$m = 1$$

$$2 = 1 \cdot 3 + t$$

$$2 = 3 + t \quad / -3$$

$$t = 2 - 3$$

$$t = -1$$

$$g_1 : y = x - 1$$

#### Gerade durch den Punkt A mit der Steigung m

$$y = m \cdot x + t$$

$$A(xa/ya) \quad \text{Steigung: } m$$

$$t = ya - m \cdot xa$$

$$A(-2/3) \quad m = -\frac{1}{3}$$

$$3 = -\frac{1}{3} \cdot (-2) + t$$

$$3 = \frac{2}{3} + t \quad / -\frac{2}{3}$$

$$t = 3 - \frac{2}{3}$$

$$t = 2\frac{1}{3}$$

$$g_2 : y = -\frac{1}{3}x + 2\frac{1}{3}$$

#### Gerade durch den Punkt A und dem y-Achsenabschnitt t

$$A(xa/ya) \quad \text{y-Achsenabschnitt: } t$$

$$m = \frac{ya - t}{xa}$$

$$A(-2/3) \quad t = -\frac{1}{3}$$

$$3 = m \cdot (-2) - \frac{1}{3}$$

$$3 = m \cdot (-2) - \frac{1}{3} \quad / +\frac{1}{3}$$

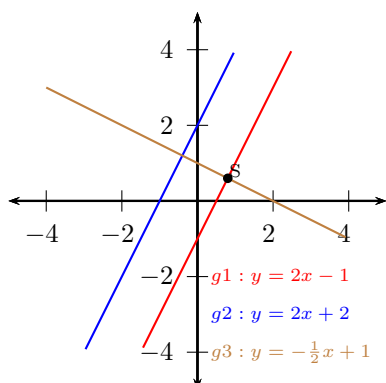
$$3 + \frac{1}{3} = m \cdot (-2) \quad / : -2$$

$$m = -1\frac{2}{3}$$

$$g_3 : y = -1\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$$

Interaktive Inhalte: [2 Punkte](#) - [Punkt und Steigung](#) - [Punkt und y-Achsenabschnitt](#) -

### 3.2.4 Gerade - Gerade



**Parallele Geraden**

$$g1 : y = m_1x + t_1 \quad g2 : y = m_2x + t_2$$

$$m_1 = m_2 \Rightarrow g1 \parallel g2$$

$$g1 : y = 2x - 1 \quad g2 : y = 2x + 2$$

$$m_1 = m_2$$

$$2 = 2$$

$$\Rightarrow g1 \parallel g2$$

**Senkrechte Geraden**

$$g1 : y = m_1x + t_1 \quad g3 : y = m_3x + t_3$$

$$m_1 \cdot m_2 = -1 \Rightarrow g1 \perp g3$$

$$g1 : y = 2x - 1 \quad g3 : y = -\frac{1}{2}x + 1$$

$$m_1 \cdot m_2 = -1$$

$$2 \cdot -\frac{1}{2} = -1$$

$$\Rightarrow g1 \perp g3$$

**Schnittpunkt zweier Geraden**

$$g1 : y = m_1x + t_1 \quad g3 : y = m_3x + t_3$$

- Terme gleichsetzen:

$$m_1x + t_1 = m_2x + t_2$$

- x-Wert durch umformen berechnen

- x-Wert in eine der beiden Funktionen einsetzen, um den y-Wert zu berechnen

$$g1 : y = 2x - 1 \quad g2 : y = -\frac{1}{2}x + 1$$

$$2x - 1 = -\frac{1}{2}x + 1$$

$$2x - 1 = -\frac{1}{2}x + 1 \quad / + \frac{1}{2}x$$

$$2\frac{1}{2}x - 1 = 1 \quad / + 1$$

$$2\frac{1}{2}x = 2 \quad / : 2\frac{1}{2}$$

$$x = \frac{4}{5}$$

$$g1 : y = 2 \cdot \frac{4}{5} - 1$$

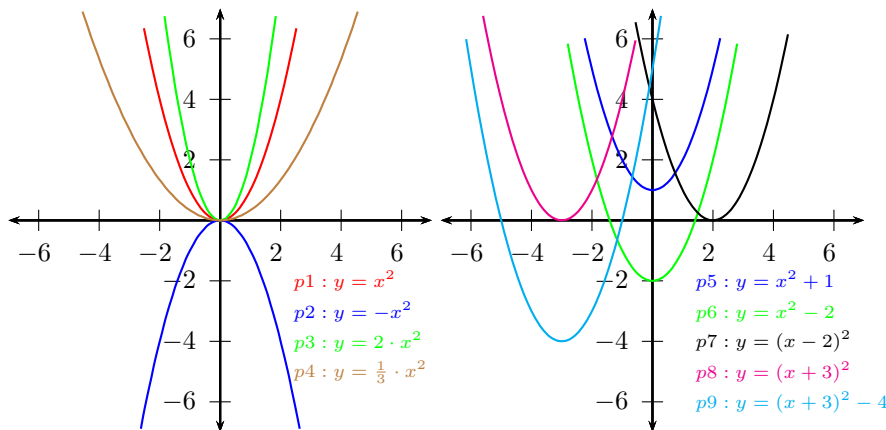
$$S(\frac{4}{5} / \frac{3}{5})$$

Interaktive Inhalte: [Graph \(JS\)](#) -  $y = m_1x + t_1$      $y = m_2x + t_2$  -



### 3.3 Quadratische Funktion

#### 3.3.1 Graph und Eigenschaften



#### Formen der Parabelgleichung

Normalparabel	$y = x^2$	$p1 : y = x^2 \quad S(0/0)$	Normalparabel nach oben geöffnet
Allgemeine Form	$y = ax^2 + bx + c$	$p2 : y = -x^2 \quad S(0/0)$	Normalparabel nach unten geöffnet
Scheitelform	$y = a(x - x_s)^2 + y_s$	$p3 : y = 2x^2 \quad S(0/0)$	$a = 2$ gestreckt
faktorierte Form	$y = a(x - x_1)(x - x_2)$	$p4 : y = \frac{1}{3}x^2 \quad S(0/0)$	$a = \frac{1}{3}$ gestaucht
$a$	Formfaktor	$p5 : y = x^2 + 1 \quad S(0/1)$	1 nach oben verschoben
$a > 0$	nach oben geöffnet	$p6 : y = x^2 - 2 \quad S(0/-2)$	2 nach unten verschoben
$a < 0$	nach unten geöffnet	$p7 : y = (x - 2)^2 \quad S(2/0)$	2 nach rechts verschoben
$ a  > 1$	gestreckt	$p8 : y = (x + 3)^2 \quad S(-3/0)$	3 nach links verschoben
$ a  < 1$	gestaucht	$p9 : y = (x + 3)^2 - 4 \quad S(-3/-4)$	3 nach links verschoben und 4 nach unten verschoben
$x_s$	Verschiebung in x-Richtung		
$y_s$	Verschiebung in y-Richtung		
$S(x_s/y_s)$	Scheitelkoordinaten		
$x_1, x_2$	Nullstellen		

#### Definitions- und Wertebereich

$\mathbb{D} = \mathbb{R}$	$p2 : y = -x^2 \quad S(0/0)$	$\mathbb{D} = \mathbb{R} \quad \mathbb{W} = ] - \infty; 0]$
$a > 0 \quad \mathbb{W} = [y\text{-Wert des Scheitels}; \infty[$	$p9 : y = (x + 3)^2 - 4 \quad S(-3/-4)$	$\mathbb{D} = \mathbb{R} \quad \mathbb{W} = [-4; \infty[$
$a < 0 \quad \mathbb{W} = ] - \infty; y\text{-Wert des Scheitels}]$		

## Schnittpunkt mit der x-Achse - Nullstellen

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$y = 0 \quad ax^2 + bx + c = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

$$\text{Diskriminante: } D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$$

$D = 0$  eine Nullstelle

$D > 0$  zwei Nullstellen

$D < 0$  keine Nullstelle

$$p9: y = x^2 + 6x + 5 = 0$$

$$1x^2 + 6x + 5 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1}$$

$$x_{1/2} = \frac{-6 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{-6 \pm 4}{2}$$

$$x_1 = \frac{-6 + 4}{2} \quad x_2 = \frac{-6 - 4}{2}$$

$$x_1 = -1 \quad x_2 = -5$$

$D > 0 \Rightarrow$  zwei Nullstellen

$$p9: y = x^2 + 6x + 5 = (x + 5)(x + 1)$$

$$p5: y = x^2 + 1 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-0 \pm \sqrt{0^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1}$$

$$x_{1/2} = \frac{-0 \pm \sqrt{-4}}{2}$$

$D < 0 \Rightarrow$  keine Nullstelle

$$p8: y = x^2 + 6x + 9 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9}}{2 \cdot 1}$$

$$x_{1/2} = \frac{-6 \pm \sqrt{0}}{2}$$

$$x_{1/2} = \frac{-6 \pm 0}{2}$$

$$x_{1/2} = -3$$

$D = 0 \Rightarrow$  eine Nullstellen

## Schnittpunkt mit der y-Achse

$$p: y = ax^2 + bx + c$$

$$x = 0 \quad p: y = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c$$

$$p(x) = c \quad Q(0/c)$$

$$p9: y = x^2 + 6x + 5$$

$$y = 0^2 + 6 \cdot 0 + 5$$

$$y = 5 \quad Q(0/5)$$

## Allgemeine Form in Scheitelform

Allgemeine Form

$$y = ax^2 + bx + c$$

Scheitelform

$$y = a(x - x_s)^2 + y_s$$

Quadratische Ergänzung:

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$y = a(x^2 + \frac{b}{a}x) + c$$

$$y = a(x^2 + \frac{b}{a}x + (\frac{b}{2a})^2 - (\frac{b}{2a})^2) + c$$

$$y = a[(x + \frac{b}{2a})^2 - (\frac{b}{2a})^2] + c$$

$$y = a(x + \frac{b}{2a})^2 - a \cdot \frac{b^2}{4a^2} + c$$

$$y = a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a} + c$$

$$x_s = -\frac{b}{2 \cdot a}$$

$$y_s = c - \frac{b^2}{4 \cdot a}$$

Scheitelformel:

$$S(x_s/y_s)$$

$$S(-\frac{b}{2 \cdot a}/c - \frac{b^2}{4 \cdot a})$$

quadratische Ergänzung

$$p9: y = x^2 + 6x + 5$$

$$p9: y = (x^2 + 6x + 5)$$

$$p9: y = (x^2 + 6x + 3^2 - 3^2 + 5)$$

$$p9: y = [(x + 3)^2 - 3^2 + 5]$$

$$p9: y = [(x + 3)^2 - 9 + 5]$$

$$p9: y = [(x + 3)^2 - 4]$$

$$p9: y = (x + 3)^2 - 4$$

Scheitel(-3/-4)

Scheitelformel

$$y = x^2 + 6x + 5$$

$$x_s = -\frac{6}{2 \cdot 1}$$

$$x_s = -3$$

$$y_s = 5 - \frac{6^2}{4 \cdot 1}$$

$$y_s = -4$$

Scheitel(-3/-4)

$$p9: y = (x + 3)^2 - 4$$

Interaktive Inhalte: [Graph \(JS\)](#) - [Graph](#) - [y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c](#) - [Eigenschaften](#) -

### 3.3.2 Parabelgleichung aufstellen und umformen

#### Parabelgleichung aus 2 Punkten und dem Formfaktor

Gegeben: Formfaktor  $a$  und Punkte  $A(x_a/y_a)$  und  $B(x_b/y_b)$

- Formfaktor  $a$  und Punkt  $A(x_a/y_a)$  in die Funktionsgleichung einsetzen.

$$y_a = ax_a^2 + bx_a + c$$

- Formfaktor  $a$  und Punkt  $B(x_b/y_b)$  in die Funktionsgleichung einsetzen.

$$y_b = ax_b^2 + bx_b + c$$

siehe Lösung von linearen Gleichungssystemen

$$a = -2 \quad A(2/-1) \quad B(-1/4)$$

Formfaktor  $a$  einsetzen:

$$y = -2x^2 + bx + c$$

I) Punkt A einsetzen

$$-1 = -2 \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c$$

$$-1 = -8 + 2b + c \quad / + 8 \quad / - 2b$$

$$-1 + 8 - 2b = c$$

$$7 - 2b = c$$

II) Punkt B einsetzen

$$4 = -2 \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c$$

$$4 = -2 - 1b + c$$

I in II

$$4 = -2 - 1b + 7 - 2b$$

$$4 = 5 - 3b \quad / - 5 \quad / : (-3)$$

$$b = \frac{4-5}{-3}$$

$$b = \frac{1}{3}$$

$$c = 7 - 2 \cdot \frac{1}{3}$$

$$c = 6\frac{1}{3}$$

$$y = -2x^2 + \frac{1}{3}x + 6\frac{1}{3}$$

#### Parabelgleichung aus Formfaktor und dem Scheitel

Formfaktor  $a$  und Scheitel in Scheitelform einsetzen:

$$y = a(x - xs)^2 + ys$$

Binomische Formel auflösen:

$$y = a(x^2 - 2 \cdot x \cdot xs + xs^2) + ys$$

$$y = a \cdot x^2 - 2 \cdot a \cdot x \cdot xs + a \cdot xs^2 + ys$$

$$\text{Formfaktor: } a = -\frac{1}{2} \quad S(2/-3)$$

$$y = a(x - xs)^2 + ys$$

$$y = -\frac{1}{2}(x - 2)^2 - 3$$

$$y = -\frac{1}{2}(x^2 - 4x + 2^2) - 3$$

$$y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 5$$

#### Parabelgleichung aus einem Punkt und dem Scheitel

Punkt  $A(x_a/y_a)$  und Scheitel  $S(x_s/y_s)$  in die Scheitelform einsetzen und nach  $a$  auflösen.  $y_a = a(x_a - xs)^2 + ys$

$$A(2/-4) \quad S(1/2)$$

$$y = a(x - xs)^2 + ys$$

$$-4 = a(2 - 1)^2 + 2$$

$$-4 = 1 \cdot a + 2 \quad / - 2 \quad / : 1$$

$$a = \frac{-4-2}{1}$$

$$a = -6$$

$$y = -6(x - 1)^2 + 2$$

$$y = -6(x^2 - 2x + 1^2) + 2$$

$$y = -6x^2 + 12x - 4$$

#### Parabelgleichung aus Formfaktor und Nullstellen

Formfaktor  $a$  und Nullstellen in die faktorisierte Form einsetzen

$$P(x_1/0) \quad Q(x_2/0) \quad a$$

$$y = a(x - x_1)(x - x_2)$$

$$y = a(x^2 - x_1 \cdot x - x_2 \cdot x + x_1 \cdot x_2)$$

$$y = ax^2 - a \cdot x_1 \cdot x - a \cdot x_2 \cdot x + a \cdot x_1 \cdot x_2$$

$$\text{Nullstellen } x_1 = 1 \quad x_2 = -4 \quad a = 7$$

$$P(1/0) \quad Q(-4/0) \quad a = 7$$

$$y = a(x - x_1)(x - x_2)$$

$$y = 7(x - 1)(x + 4)$$

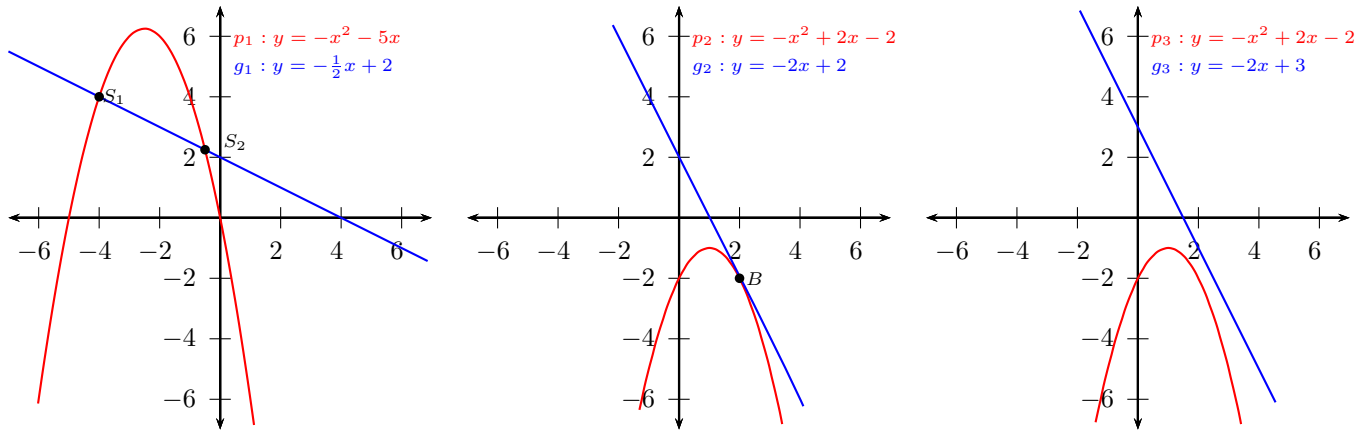
$$y = 7(x^2 + 4x - 1x - 4)$$

$$y = 7(x^2 + 3x - 4)$$

$$y = 7x^2 + 21x - 28$$

**Interaktive Inhalte:** [Graph \(JS\)](#) - [Graph](#) - [2 Punkte und Formfaktor](#) - [Scheitel und Formfaktor](#) - [Scheitel und Punkt](#) - [Nullstellen](#) - [Faktorisierte Form](#) -

### 3.3.3 Parabel - Gerade



$$p : y = ax^2 + bx + c \quad g : y = mx + t$$

Terme gleichsetzen:  $ax^2 + bx + c = mx + t$

Term nach Null umformen:  $ax^2 + (b - m)x + c - t = 0$

Lösung der quadratischen Gleichung:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

Diskriminante:

$$D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$$

$D = 0$  Gerade ist Tangente - Berührungspunkt

$D > 0$  Gerade ist Sekante - zwei Schnittpunkte

$D < 0$  Gerade ist Passante - keinen Schnittpunkt

x-Wert(e) in eine der beiden Funktionen einsetzen, um den y-Wert zu berechnen

$$p_1 : y = -x^2 - 5x \quad g_1 : y = -\frac{1}{2}x + 2$$

$$-1x^2 - 5x = -\frac{1}{2}x + 2 \quad / + \frac{1}{2}x / -2$$

$$-1x^2 - 5x + \frac{1}{2}x - 2 = 0$$

$$-1x^2 - 4\frac{1}{2}x - 2 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{+4\frac{1}{2} \pm \sqrt{(-4\frac{1}{2})^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-2)}}{2 \cdot (-1)}$$

$$x_{1/2} = \frac{+4\frac{1}{2} \pm \sqrt{12\frac{1}{4}}}{-2}$$

$$x_{1/2} = \frac{4\frac{1}{2} \pm 3\frac{1}{2}}{-2}$$

$$x_1 = \frac{4\frac{1}{2} + 3\frac{1}{2}}{-2} \quad x_2 = \frac{4\frac{1}{2} - 3\frac{1}{2}}{-2}$$

$$x_1 = -4 \quad x_2 = -\frac{1}{2}$$

$D > 0$  Gerade ist Sekante - zwei Schnittpunkte

$$y = -1(-4)^2 - 5(-4) = 4 \quad S_1(-4/4)$$

$$y = -\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}) + 2 = 2\frac{1}{4} \quad S_2(-\frac{1}{2}/2\frac{1}{4})$$

$$p_2 : y = -x^2 + 2x - 2 \quad g_2 : y = -2x + 2$$

$$-x^2 + 2x - 2 = -2x + 2$$

$$-x^2 + 2x - 2 + 2x - 2 = 0$$

$$-x^2 + 4x - 4 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-4)}}{2 \cdot (-1)}$$

$$x_{1/2} = \frac{-4 \pm \sqrt{0}}{-2} = \frac{-4 \pm 0}{-2}$$

$$x_{1/2} = \frac{-4 + 0}{-2} \quad x_2 = \frac{-4 - 0}{-2}$$

$$x_{1/2} = 2$$

$D = 0$  Gerade ist Tangente - Berührungspunkt

$$y = -2$$

$$B(2/-2)$$

$$p_3 : y = -x^2 + 2x - 2 \quad g_3 : y = -2x + 3$$

$$-x^2 + 2x - 2 = -2x + 3$$

$$-x^2 + 2x - 2 + 2x - 3 = 0$$

$$-x^2 + 4x - 5 = 0$$

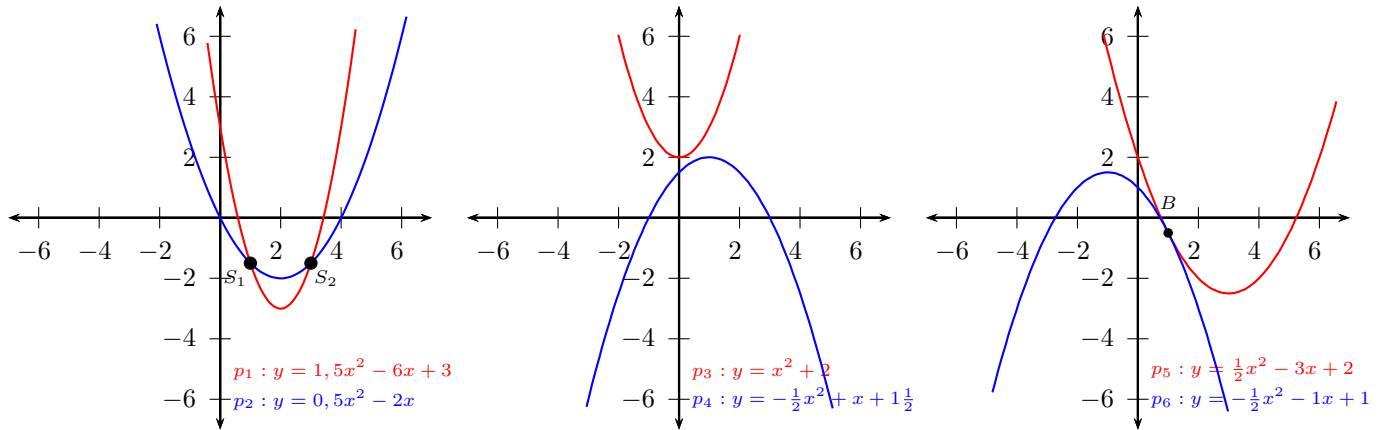
$$x_{1/2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-5)}}{2 \cdot (-1)}$$

$$x_{1/2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-4}}{-2}$$

$D < 0$  Gerade ist Passante - keinen Schnittpunkt

Interaktive Inhalte: [Graph \(JS\)](#) - [Graph](#) - [Parabel-Gerade](#) -

### 3.3.4 Parabel - Parabel



$$p_1 : y = a_1x^2 + b_1x + c_1$$

$$p_2 : y = a_2x^2 + b_2x + c_2$$

Terme gleichsetzen:

$$a_1x^2 + b_1x + c_1 = a_2x^2 + b_2x + c_2$$

Term nach Null umformen:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Lösung der quadratischen Gleichung:

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

$$\text{Diskriminante: } D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$$

$D = 0$  Berührungspunkt

$D > 0$  zwei Schnittpunkte

$D < 0$  keinen Schnittpunkt

x-Wert(e) in eine der beiden Funktionen einsetzen, um den y-Wert zu berechnen

$$p_1 : y = 1\frac{1}{2}x^2 - 6x + 3 \quad p_2 : y = \frac{1}{2}x^2 - 2x$$

$$1\frac{1}{2}x^2 - 6x + 3 = \frac{1}{2}x^2 - 2x$$

$$1\frac{1}{2}x^2 - 6x + 3 - (\frac{1}{2}x^2 - 2x) = 0$$

$$1x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{+4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1}$$

$$x_{1/2} = \frac{+4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2}$$

$$x_1 = \frac{4+2}{2} \quad x_2 = \frac{4-2}{2}$$

$$x_1 = 3 \quad x_2 = 1$$

$D > 0$  zwei Schnittpunkte

$$y = 1\frac{1}{2} \cdot 3^2 - 6 \cdot 3 + 3 = -1\frac{1}{2} \quad S_1(3 / -1\frac{1}{2})$$

$$y = 1\frac{1}{2} \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 + 3 = -1\frac{1}{2} \quad S_2(1 / -1\frac{1}{2})$$

$$p_3 : y = x^2 + 2 \quad p_4 : y = -\frac{1}{2}x^2 + x + 1\frac{1}{2}$$

$$x^2 + 2 - (-\frac{1}{2}x^2 + x + 1\frac{1}{2}) = 0$$

$$1\frac{1}{2}x^2 - 1x + \frac{1}{2} = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{+1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}}{2 \cdot 1\frac{1}{2}}$$

$$x_{1/2} = \frac{+1 \pm \sqrt{-2}}{3}$$

$D < 0$  keinen Schnittpunkt

$$p_5 : y = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 2 \quad p_6 : y = -\frac{1}{2}x^2 - 1x + 1$$

$$y = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 2 = -\frac{1}{2}x^2 - 1x + 1$$

$$\frac{1}{2}x^2 - 3x + 2 - (-\frac{1}{2}x^2 - 1x + 1) = 0$$

$$1x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{+2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1}$$

$$x_{1/2} = \frac{+2 \pm \sqrt{0}}{2}$$

$$x_{1/2} = \frac{2 \pm 0}{2}$$

$$x_1 = \frac{2+0}{2} \quad x_2 = \frac{2-0}{2}$$

$$x_1 = 1 \quad x_2 = 1$$

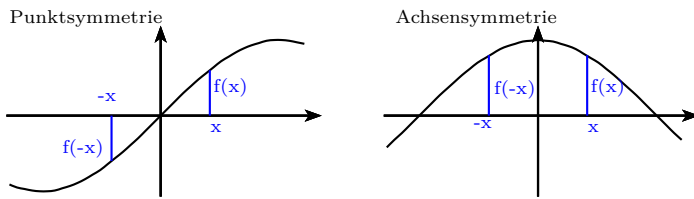
$D = 0$  Berührungspunkt

$$B(1 / -\frac{1}{2})$$

Interaktive Inhalte: [Graph \(JS\)](#) - [Graph](#) - [Parabel-Parabel](#) -

### 3.4 Eigenschaften von Funktionen

#### 3.4.1 Symmetrie



##### Punktsymmetrie zum Ursprung - ungerade Funktion

$$f(-x) = -f(x) \Rightarrow f(x) \text{ ist eine ungerade Funktion}$$

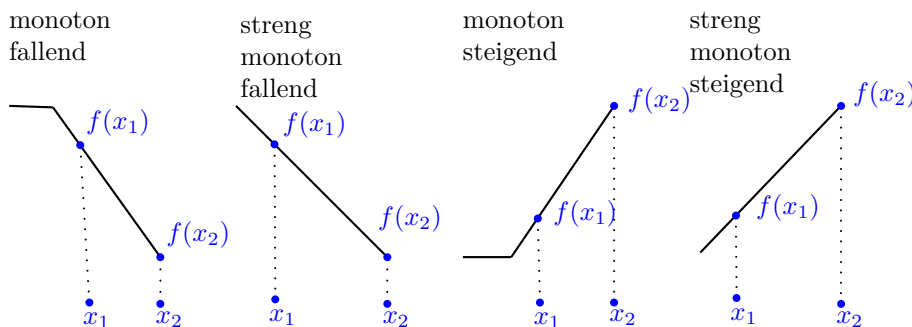
$$\begin{aligned} f(x) &= -2x^5 + 3x^3 \\ f(-x) &= -2 \cdot (-x)^5 + 3 \cdot (-x)^3 \\ f(-x) &= -(-2 \cdot x^5 + 3 \cdot x^3) \\ f(-x) &= -f(x) \end{aligned}$$

##### Achsensymmetrie zur y-Achse - gerade Funktion

$$f(-x) = f(x) \Rightarrow f(x) \text{ ist eine gerade Funktion}$$

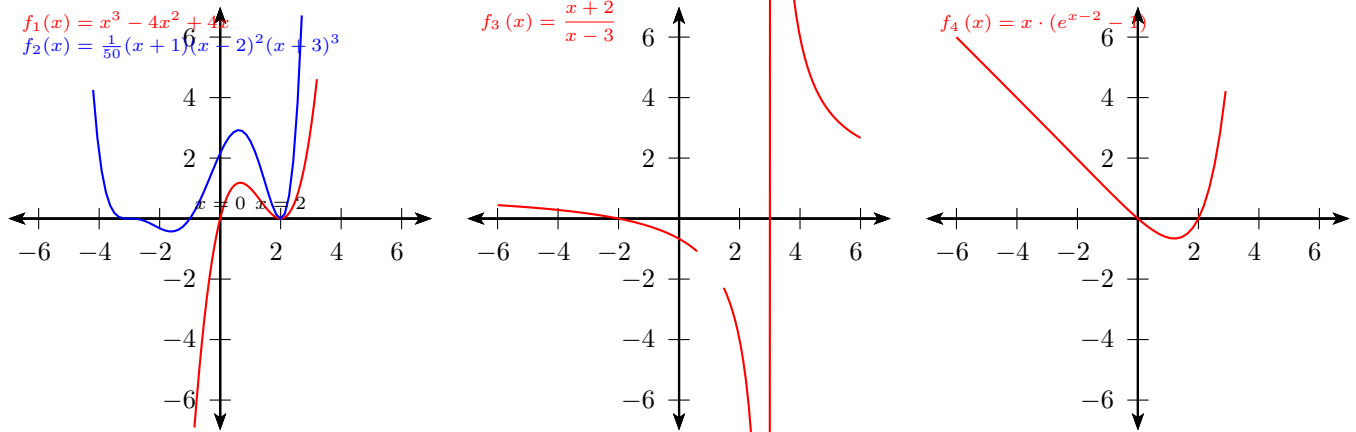
$$\begin{aligned} f(x) &= x^4 + 2 \cdot x^2 + 1 \\ f(-x) &= (-x)^4 + 2 \cdot (-x)^2 + 1 \\ f(-x) &= x^4 + 2 \cdot x^2 + 1 \\ f(-x) &= f(x) \end{aligned}$$

#### 3.4.2 Monotonie



$x_1 < x_2$		
monoton steigend		$f(x_1) \leq f(x_2)$
streng monoton steigend	sms	$f(x_1) < f(x_2)$
monoton fallend		$f(x_1) \geq f(x_2)$
streng monoton fallend	smf	$f(x_1) > f(x_2)$

### 3.4.3 Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen



#### Schnittpunkte mit der x-Achse - Nullstellen

Funktionsterm gleich Null setzen und die Gleichung lösen.

$$f(x) = 0 \quad (\text{siehe Algebra-Gleichungen})$$

- Vielfachheit der Nullstelle gerade
  - Nullstelle ohne Vorzeichenwechsel (VZW)
  - Berührungspunkt mit die x-Achse ( Hoch- oder Tiefpunkt )
- Vielfachheit der Nullstelle ungerade
  - Nullstelle mit Vorzeichenwechsel (VZW)
  - Schnittpunkt mit die x-Achse

Einfache Nullstelle mit VZW:  $f(x) = (x - x_1) \cdot \dots$

Zweifache Nullstelle ohne VZW:  $f(x) = (x - x_1)^2 \cdot \dots$

Dreifache Nullstelle mit VZW:  $f(x) = (x - x_1)^3 \cdot \dots$

Vierfache Nullstelle ohne VZW:  $f(x) = (x - x_1)^4 \cdot \dots$

$$f_1(x) = x^3 - 4x^2 + 4x = x(x^2 - 4x + 4) = x(x - 2)^2$$

Einfache Nullstelle mit VZW:  $x = 0 \quad N_1(0/0)$   
 Zweifache Nullstelle ohne VZW:  $x = 2 \quad N_2(2/0)$

$$f_2(x) = \frac{1}{50}(x + 1)(x - 2)^2(x + 3)^3$$

Einfache Nullstelle mit VZW:  $x = -1 \quad N_1(-1/0)$   
 Zweifache Nullstelle ohne VZW:  $x = 2 \quad N_2(2/0)$   
 Dreifache Nullstelle mit VZW:  $x = -3 \quad N_3(-3/0)$

$$f_4(x) = x \cdot (e^{x-2} - 1)$$

$$e^{(x-2)} - 1 = 0 \quad / + 1$$

$$e^{(x-2)} = 1 \quad / \ln$$

$$x - 2 = \ln(1) \quad / + 2$$

$$x = 2$$

#### Schnittpunkte mit der y-Achse

$x=0$  in den Funktionsterm einsetzen.

$$f_1(x) = x^3 - 4x^2 + 4x = x(x^2 - 4x + 4) = x(x - 2)^2$$

$$f_1(0) = 0^3 - 4 \cdot 0^2 + 4 \cdot 0 = 0$$

$$P(0/0)$$

$$f_2(x) = \frac{1}{50}(x + 1)(x - 2)^2(x + 3)^3$$

$$f_2(0) = \frac{1}{50}(0 + 1)(0 - 2)^2(0 + 3)^3 = 2,16$$

$$Q(0/2,16)$$

**Graph oberhalb/unterhalb der x-Achse**

Bei Funktionen kann sich das Vorzeichen nur an den Nullstellen oder den Definitionslücken ändern. Einen beliebigen Wert kleiner bzw. größer als die Nullstelle wählen und das Vorzeichen des Funktionswerts in die Tabelle eintragen.

Vorzeichentabelle mit f(x)

	$x <$	$x_1$	$< x$
$f(x)$	+	0	-
Graph	oberhalb	0	unterhalb

- +  $f(x) > 0$  Graph oberhalb der x-Achse
- $f(x) < 0$  Graph unterhalb der x-Achse

$$f_1(x) = x^3 - 4x^2 + 4x = x(x^2 - 4x + 4) = x(x - 2)^2$$

Nullstellen:  $x_1 = 0$   $x_2 = 2$

Wert kleiner als 0 wählen:  $-1 < 0$   $f_1(-1) = -1 < 0 \Rightarrow -$

Wert zwischen 0 und 2 wählen:

$0 < 1, 2 < 2$   $f_1(1, 2) = 0,768 > 0 \Rightarrow +$

Wert größer als 2 wählen:  $3 > 2$   $f_1(3) = 1 > 0 \Rightarrow +$

Vorzeichentabelle:

	$x <$	0	$< x <$	2	$< x$
$f(x)$	-	0	+	0	+

$x \in ]0; 2[ \cup ]2; \infty[$   $f(x) > 0$  oberhalb der x-Achse

$x \in ]-\infty; 0[$   $f(x) < 0$  unterhalb der x-Achse

$$f_3(x) = \frac{x + 2}{x - 3}$$

Definitionsbereich:  $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{3\}$

$x_1 = -2$  1-fache Nullstelle

Vorzeichentabelle:

	$x <$	-2	$< x <$	3	$< x$
$f(x)$	+	0	-	0	+

$x \in ]-\infty; -2[ \cup ]3; \infty[$   $f(x) > 0$  oberhalb der x-Achse

$x \in ]-2; 3[$   $f(x) < 0$  unterhalb der x-Achse

$$f_4(x) = x \cdot (e^{x-2} - 1)$$

$x_1 = 0$ ; 1-fache Nullstelle

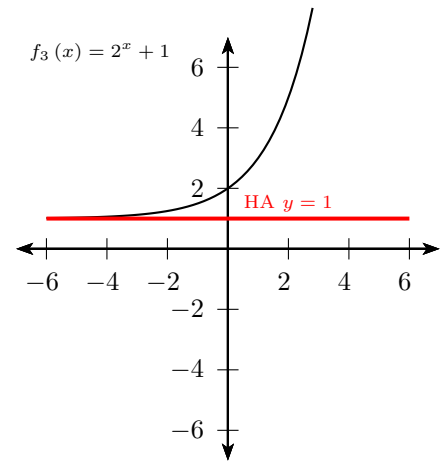
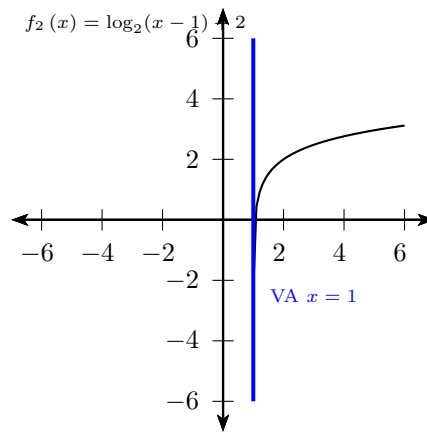
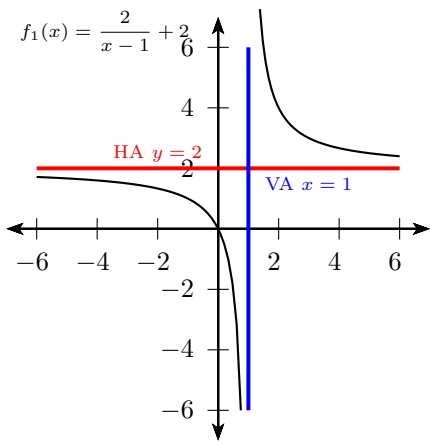
$x_2 = 2$ ; 1-fache Nullstelle

	$x <$	0	$< x <$	2	$< x$
$f(x)$	+	0	-	0	+

$x \in ]-\infty; 0[ \cup ]2; \infty[$   $f(x) > 0$  oberhalb der x-Achse

$x \in ]0; 2[$   $f(x) < 0$  unterhalb der x-Achse

**3.4.4 Asymptote**



HA - Horizontale (waagerechte) Asymptote; VA - Vertikale (senkrechte) Asymptote - Polstelle

**Definition**

Eine Asymptote ist eine Gerade, der sich eine Funktion beliebig weit annähert. (siehe Analysis - Grenzwerte)

$$f_1(x) = \frac{2}{x - 1} + 2$$

nicht kürzbare Nullstellen des Nenners

VA :  $x = 1$  HA :  $y = 2$

**Horizontale (waagerechte) Asymptote**

Funktionsgleichung:  $y = a$

$$f_3(x) = 2^x + 1$$

HA :  $y = 1$



**Vertikale (senkrechte) Asymptote - Polstelle**

Funktionsgleichung:  $x = b$

$f_2(x) = \log_2(x - 1) + 2$   
 $VA : x = 1$

**3.4.5 Verknüpfung von Funktionen**

**Addition von Funktionen**

$u(x) = f(x) + g(x)$

$f(x) = x^2$   
 $g(x) = e^x$   
 $u(x) = f(x) + g(x)$   
 $u(x) = x^2 + e^x$

**Subtraktion von Funktionen**

$u(x) = f(x) - g(x)$

$f(x) = x^2$   
 $g(x) = e^x$   
 $u(x) = f(x) - g(x)$   
 $u(x) = x^2 - e^x$

**Multiplikation von Funktionen**

$u(x) = f(x) \cdot g(x)$

$f(x) = x^2$   
 $g(x) = e^x$   
 $u(x) = f(x) \cdot g(x)$   
 $u(x) = x^2 \cdot e^x$

**Division von Funktionen**

$u(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

$f(x) = x^2$   
 $g(x) = e^x$   
 $u(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$   
 $u(x) = \frac{x^2}{e^x}$

**Verketten von Funktionen**

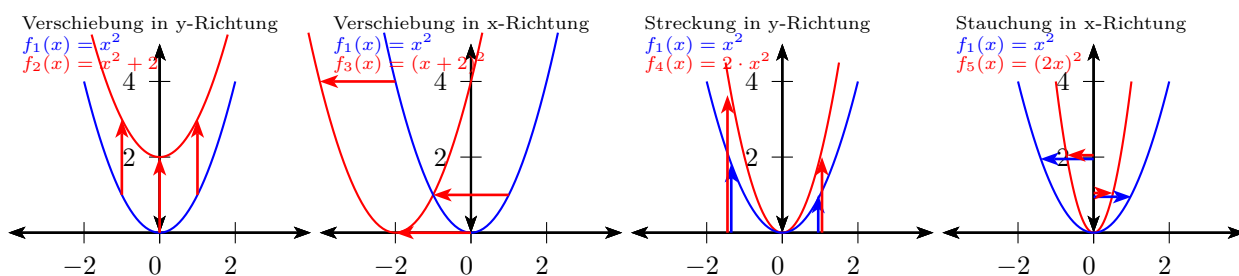
äußere Funktion  $f(x)$  - innere Funktion  $g(x)$   
 $u(x) = f(g(x))$  oder  $f \circ g = f(g(x))$  f nach g

äußere Funktion  $g(x)$  - innere Funktion  $f(x)$   
 $v(x) = g(f(x))$  oder  $g \circ f = g(f(x))$  g nach f

$f(x) = x^2$   
 $g(x) = e^x$   
 $u(x) = f(g(x))$   
 $u(x) = (e^x)^2$   
 $v(x) = g(f(x))$   
 $v(x) = e^{x^2}$

Interaktive Inhalte: [Graph \(JS\)](#) -

**3.4.6 Abbildung von Funktionen**



**Verschiebung des Graphen in y-Richtung**

$$y = f(x) + d$$

$$f_1(x) = x^2 \quad f_2(x) = x^2 + 2$$

Verschiebung um  $d=2$  in y-Richtung

$$g_1(x) = e^x \quad g_2(x) = e^x - 3$$

Verschiebung um  $d=-3$  in y-Richtung

**Verschiebung des Graphen in Richtung der x-Richtung**

$$y = f(x - c)$$

$$f_1(x) = x^2 \quad f_3(x) = (x - 2)^2$$

Verschiebung um  $c=2$  in x-Richtung

$$g_1(x) = e^x \quad g_3(x) = e^{x+3}$$

Verschiebung um  $c=-3$  in x-Richtung

**Streckung - Stauchung in y-Richtung**

$$y = a \cdot f(x)$$

$a > 1$  : Streckung in y-Richtung

$0 < a < 1$  : Stauchung in y-Richtung

$a = -1$  : Spiegelung an der x-Achse

$a < -1$  : Spiegelung an der x-Achse und Streckung in y-Richtung

$$f_1(x) = x^2 \quad f_4(x) = 2x^2$$

Streckung in y-Richtung mit  $a = 2$

$$g_1(x) = e^x \quad g_4(x) = \frac{1}{3}e^x$$

Stauchung in y-Richtung mit  $a = \frac{1}{3}$

$$f_5(x) = e^x \quad f_6(x) = -e^x$$

Spiegelung an der x-Achse

**Streckung - Stauchung in x-Richtung**

$$y = f(b \cdot x)$$

$b > 1$ : Stauchung in x-Richtung mit  $\frac{1}{b}$

$0 < b < 1$ : Streckung in x-Richtung mit  $\frac{1}{b}$

$b = -1$ : Spiegelung an der y-Achse

$b < -1$ : Spiegelung an der y-Achse und Stauchung in x-Richtung mit  $\frac{1}{b}$

$$f_1(x) = x^2 \quad f_5(x) = (2x)^2$$

$b = 2$  Stauchung in x-Richtung mit  $\frac{1}{2}$

$$g_1(x) = e^x \quad f_5(x) = e^{(\frac{1}{3}x)}$$

$b = \frac{1}{3}$  Streckung in x-Richtung mit 3

$$f_5(x) = e^x \quad f_6(x) = e^{-x}$$

Spiegelung an der y-Achse

**Zusammenfassung**

$$y = a \cdot f(b(x - c)) + d$$

$$y = a \cdot f(bx - cb) + d$$

$a$ : Streckung/Stauchung in y-Richtung

$\frac{1}{b}$ : Streckung/Stauchung in x-Richtung

$c$ : Verschiebung des Graphen in x-Richtung

$d$ : Verschiebung des Graphen in y-Richtung

$$f_1(x) = x^2 \quad f_2(x) = -3(2x - 6)^2 + 1 = -3[2(x - 3)]^2 + 1$$

Streckung in y-Richtung und Spiegelung an der x-Achse:  $a = -3$

Stauchung in x-Richtung:  $\frac{1}{b} = \frac{1}{2}$

Verschiebung des Graphen in x-Richtung:  $c = \frac{-6}{2} = 3$

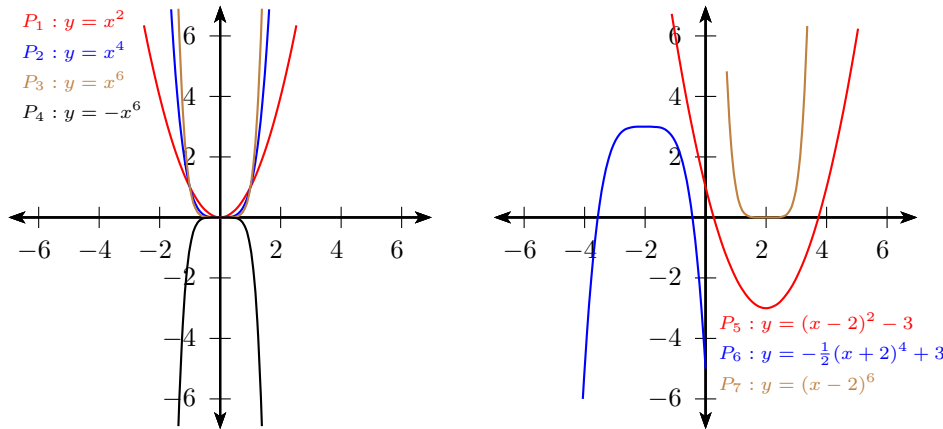
Verschiebung in y-Richtung:  $d = 1$

Verschiebung in x-Richtung: 3

Interaktive Inhalte: [Graph \(JS\)](#) -

### 3.5 Potenzfunktion

#### 3.5.1 Parabeln vom Grad n - gerader Exponent



#### Formen der Parabelgleichung - gerader Exponent

Exponent: 2, 4, 6..  
 Grundfunktion:  $y = x^n$   
 Funktion mit Formvariablen:  
 $y = a(x - c)^n + d$   
 $y = a(b(x - c))^n + d$

$P_1 : y = x^2$        $P_5 : y = (x - 2)^2 - 3$   
 Verschiebung um 2 in x-Richtung und um -3 in y-Richtung  
 $P_2 : y = x^4$        $P_6 : y = -\frac{1}{2}(x + 2)^4 + 3$   
 Verschiebung um -2 in x-Richtung und um 3 in y-Richtung  
 Spiegelung an der x-Achse und Stauchung um  $\frac{1}{2}$  in y-Richtung  
 $P_3 : y = x^6$        $P_9 : y = 2(x + 4)^4$   
 Streckung um 2 in y-Richtung und Verschiebung um -4 in x-Richtung  
 $P_4 : y = -x^6$        $P_7 : y = (x - 2)^6$   
 Verschiebung um 2 in x-Richtung

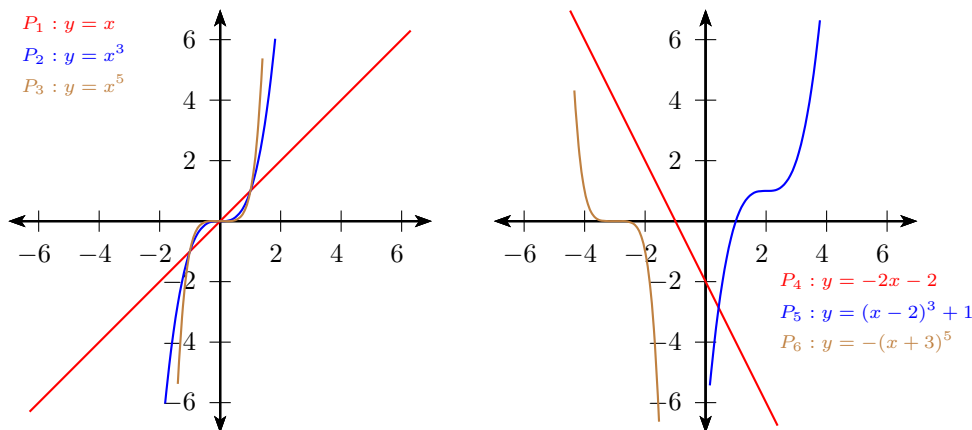
#### Definitions- und Wertebereich

$y = x^n$        $\mathbb{D} = \mathbb{R}$        $\mathbb{W} = \mathbb{R}_0^+$   
 $y = a(b(x - c))^n + d$        $\mathbb{D} = \mathbb{R}$   
 $a > 0$        $\mathbb{W} = [d; \infty[$   
 $a < 0$        $\mathbb{W} = ]-\infty; d]$

$P_2 : y = x^4$        $\mathbb{D} = \mathbb{R}$        $\mathbb{W} = \mathbb{R}_0^+$   
 $P_5 : y = (x - 2)^2 - 3$        $\mathbb{D} = \mathbb{R}$        $\mathbb{W} = [-3; \infty[$   
 $P_4 : y = -x^6$        $\mathbb{D} = \mathbb{R}$        $\mathbb{W} = \mathbb{R}_0^-$   
 $P_6 : y = -\frac{1}{2}(x + 2)^4 + 3$        $\mathbb{D} = \mathbb{R}$        $\mathbb{W} = ]-\infty; 3]$   
 $P_9 : y = 2(x + 4)^4$        $\mathbb{D} = \mathbb{R}$        $\mathbb{W} = \mathbb{R}_0^+$

Interaktive Inhalte: [Graph \(JS\)](#) - [Graph](#) -

#### 3.5.2 Parabeln vom Grad n - ungerader Exponent



### Formen der Parabelgleichung - ungerader Exponent

Exponent: 1, 3, 5..

Grundfunktion:  $y = x^n$

Funktion mit Formvariablen:

$$y = a(x - c)^n + d$$

$$y = a(b(x - c))^n + d$$

$$P_1 : y = x \quad P_4 : y = -2x - 2$$

Verschiebung um -2 in y-Richtung und Streckung um -2 in y-Richtung

$$P_2 : y = x^3 \quad P_5 : y = (x - 2)^3 + 1$$

Verschiebung um 2 in x-Richtung und um 1 in y-Richtung  $P_3 :$

$$y = x^5 \quad P_6 : y = -(x + 3)^5$$

Spiegelung an der x-Achse und Verschiebung um -3 in x-Richtung

### Definitions- und Wertebereich

$$y = x^n \quad \mathbb{D} = \mathbb{R} \quad \mathbb{W} = \mathbb{R}$$

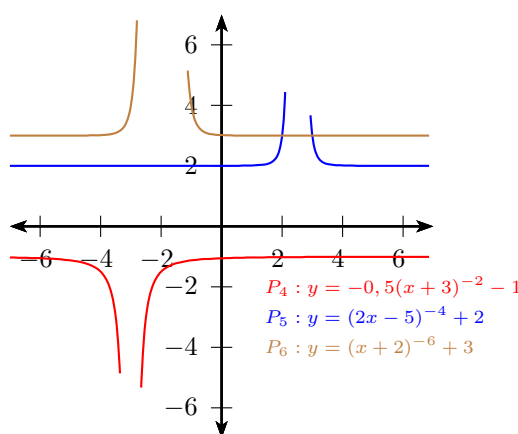
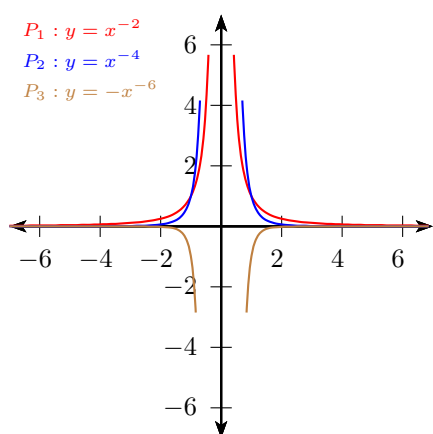
$$y = a(b(x - c))^n + d \quad \mathbb{D} = \mathbb{R} \quad \mathbb{W} = \mathbb{R}$$

$$P_2 : y = x^3 \quad \mathbb{D} = \mathbb{R} \quad \mathbb{W} = \mathbb{R}$$

$$P_5 : y = (x - 2)^3 + 1 \quad \mathbb{D} = \mathbb{R} \quad \mathbb{W} = \mathbb{R}$$

Interaktive Inhalte: [Graph \(JS\)](#) - [Graph](#) -

### 3.5.3 Hyperbeln vom Grad n - gerader Exponent



### Formen der Hyperbelgleichung - gerader Exponenten

Exponent: -2, -4, -6..

Grundfunktion:  $y = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$

Funktion mit Formvariablen:

$$y = a(x - c)^{-n} + d = \frac{a}{(x - c)^n} + d$$

$$y = a(b(x - c))^{-n} + d = \frac{a}{(b(x - c))^n} + d$$

$$P_1 : y = x^{-2} \quad P_4 : y = -0,5(x + 3)^{-2} - 1$$

Verschiebung um -3 in x-Richtung und um -1 in y-Richtung  
Streckung um -0,5 in y-Richtung

$$P_2 : y = x^{-4} \quad P_5 : y = (2x - 5)^{-4} + 2 = (2(x - 2,5))^{-4} + 2$$

Verschiebung um 2,5 in x-Richtung und um 2 in y-Richtung  
Stauchung um 2 in x-Richtung

$$y = x^{-6} \quad P_6 : y = (x + 2)^{-6} + 3$$

Streckung um -2 in x-Richtung und um 3 in y-Richtung

### Definitions- und Wertebereich

$$y = x^{-n} = \frac{1}{x^n} \quad \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \mathbb{W} = \mathbb{R}^+$$

$$y = a(b(x - c))^{-n} + d \quad \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{c\}$$

$$a > 0 \quad \mathbb{W} = ]d; \infty[$$

$$a < 0 \quad \mathbb{W} = ]-\infty; d[$$

$$P_1 : y = x^{-2} \quad \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \mathbb{W} = \mathbb{R}^+$$

$$P_4 : y = -0,5(x + 3)^{-2} - 1$$

$$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-3\} \quad \mathbb{W} = ]-\infty; -1[$$

$$P_6 : y = (x + 2)^{-6} + 3 \quad \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2\} \quad \mathbb{W} = ]3; \infty[$$

**Asymptoten**

$$y = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

Horizontale Asymptote (HA):  $y = 0$

Vertikale Asymptote (VA):  $x = 0$

$$y = a(b(x - c))^{-n} + d$$

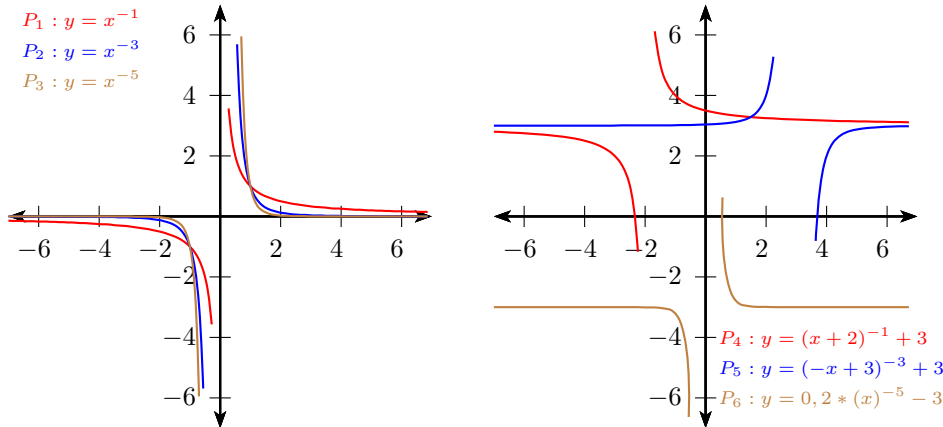
Horizontale Asymptote:  $y = d$

Vertikale Asymptote:  $x = c$

$$\begin{array}{lll}
 P_1 : y = x^{-2} & \text{HA: } y = 0 & \text{VA: } x = 0 \\
 P_4 : y = -0,5(x + 3)^{-2} - 1 & \text{HA: } y = -1 & \text{VA: } x = -3 \\
 P_6 : y = (x + 2)^{-6} + 3 & \text{HA: } y = 3 & \text{VA: } x = -2
 \end{array}$$

Interaktive Inhalte: [Graph \(JS\)](#) - [Graph](#) -

**3.5.4 Hyperbeln vom Grad n - ungerader Exponent**



**Formen der Hyperbelgleichung - ungerader Exponenten**

Exponent: -1, -3, -5..

Grundfunktion:  $y = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$

Funktion mit Formvariablen:

$$y = a(x - c)^{-n} + d = \frac{a}{(x - c)^n} + d$$

$$y = a(b(x - c))^{-n} + d = \frac{a}{(b(x - c))^n} + d$$

$$\begin{array}{ll}
 P_1 : y = x^{-1} & P_4 : y = (x + 2)^{-1} + 3 \\
 \text{Verschiebung um } -2 \text{ in } x\text{-Richtung um } 3 \text{ in } y\text{-Richtung} & \\
 P_2 : y = x^{-3} & P_5 : y = (-x + 3)^{-3} + 3 = (-1(x - 3))^{-3} + 3 \\
 \text{Verschiebung um } 3 \text{ in } x\text{-Richtung und um } 3 \text{ in } y\text{-Richtung} & \\
 \text{Spiegelung an der } y\text{-Achse} & \\
 P_3 : y = x^{-5} & P_6 : y = 0,2 * x^{-5} - 3 \\
 \text{Streckung um } -3 \text{ in } y\text{-Richtung und Stauchung um } 0,2 \text{ in } y\text{-Richtung} & 
 \end{array}$$

**Definitions- und Wertebereich**

$$\begin{array}{ll}
 y = x^{-n} & \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \mathbb{W} = \mathbb{R} \setminus \{0\} \\
 y = a(b(x - c))^{-n} + d & \\
 \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{c\} & \mathbb{W} = \mathbb{R} \setminus \{d\}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
 P_1 : y = x^{-1} & \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\} & \mathbb{W} = \mathbb{R} \setminus \{0\} \\
 P_4 : y = (x + 2)^{-1} + 3 & \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2\} & \mathbb{W} = \mathbb{R} \setminus \{3\} \\
 P_6 : y = 0,2 * x^{-5} - 3 & \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\} & \mathbb{W} = \mathbb{R} \setminus \{-3\}
 \end{array}$$

**Asymptoten**

$$y = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

Horizontale Asymptote (HA):  $y = 0$

Vertikale Asymptote (VA):  $x = 0$

$$y = a(b(x - c))^{-n} + d$$

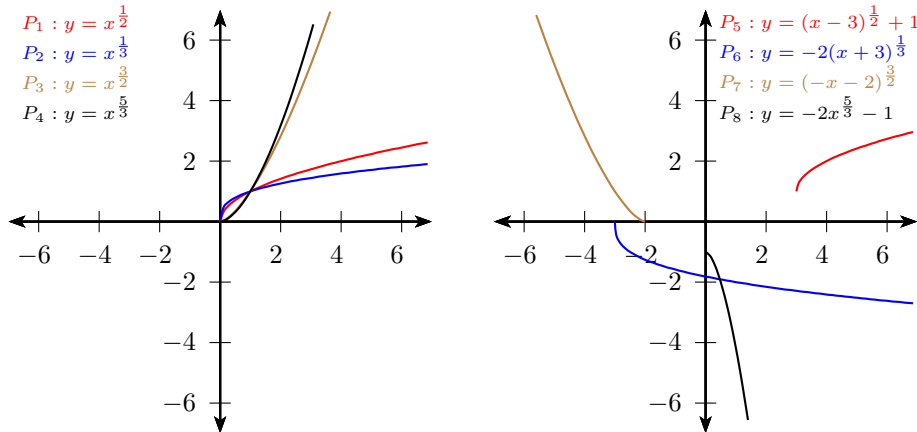
Horizontale Asymptote:  $y = d$

Vertikale Asymptote:  $x = c$

$$\begin{array}{lll}
 P_1 : y = x^{-1} & \text{HA: } y = 0 & \text{VA: } x = 0 \\
 P_4 : y = (x + 2)^{-1} + 3 & \text{HA: } y = 3 & \text{VA: } x = -2 \\
 P_6 : y = 0,2 * x^{-5} - 3 & \text{HA: } y = -3 & \text{VA: } x = 0
 \end{array}$$

Interaktive Inhalte: [Graph \(JS\)](#) - [Graph](#) -

### 3.5.5 Wurzelfunktion - rationaler, positiver Exponent



#### Formen der Wurzelfunktion - positiver Exponent

Quadratwurzelfunktion:  $y = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x} \quad x > 0$

Grundfunktion:  $y = x^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{x^n} \quad x > 0$

Funktion mit Formvariablen:

$y = a(x - c)^{\frac{n}{m}} + d = a \sqrt[m]{(x - c)^n} + d \quad x - c > 0$

$y = a(b(x - c))^{\frac{n}{m}} + d = a \sqrt[m]{(b(x - c))^n} + d \quad b(x - c) > 0$

$P_1 : y = x^{\frac{1}{2}} \quad P_5 : y = (x - 3)^{\frac{1}{2}} + 1$

Verschiebung um 3 in x-Richtung und um 1 in y-Richtung

$P_2 : y = x^{\frac{1}{3}} \quad P_6 : y = -2(x + 3)^{\frac{1}{3}}$

Verschiebung um -3 in x-Richtung und Streckung um -2 in y-Richtung

$P_3 : y = x^{\frac{2}{3}} \quad P_7 : y = (-x - 2)^{\frac{2}{3}} = (-(x + 2))^{\frac{2}{3}}$

Verschiebung um -2 in x-Richtung und Spiegelung an der y-Achse

$P_4 : y = x^{\frac{5}{3}} \quad P_8 : y = -2x^{\frac{5}{3}} - 1$

Verschiebung um -1 in y-Richtung und Streckung um -2 in y-Richtung

#### Definitions- und Wertebereich

$y = x^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{x^n} \quad \mathbb{D} = \mathbb{R}_0^+ \quad \mathbb{W} = \mathbb{R}_0^+$

$y = a(b(x - c))^{\frac{n}{m}} + d = a \sqrt[m]{(b(x - c))^n} + d$

$b > 0 \quad \mathbb{D} = [c; \infty[$

$b < 0 \quad \mathbb{D} = ] - \infty; c]$

$a > 0 \quad \mathbb{W} = [d; \infty[$

$a < 0 \quad \mathbb{W} = ] - \infty; d]$

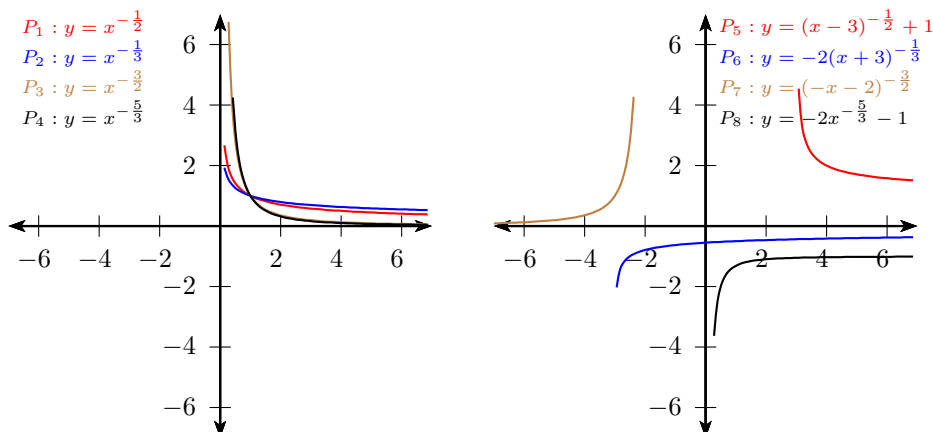
$P_2 : y = x^{\frac{1}{3}} \quad \mathbb{D} = \mathbb{R}_0^+ \quad \mathbb{W} = \mathbb{R}_0^+$

$P_5 : y = (x - 3)^{\frac{1}{2}} + 1 \quad \mathbb{D} = [3; \infty[ \quad \mathbb{W} = [1; \infty[$

$P_8 : y = -2x^{\frac{5}{3}} - 1 \quad \mathbb{D} = \mathbb{R}_0^+ \quad \mathbb{W} = ] - \infty; -1]$

Interaktive Inhalte: [Graph \(JS\)](#) - [Graph](#) -

### 3.5.6 Wurzelfunktion - rationaler, negativer Exponent



## Formen der Wurzelfunktion - negativer Exponent

$$y = x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x}} \quad x > 0$$

$$\text{Grundfunktion: } y = x^{-\frac{n}{m}} = \frac{1}{\sqrt[m]{x^n}} \quad x > 0$$

$$\text{Funktion mit Formvariablen: } y = a(x - c)^{-\frac{n}{m}} + d = \frac{a}{\sqrt[m]{(x - c)^n}} + d \quad x - c > 0$$

$$y = a(b(x - c))^{-\frac{n}{m}} + d = a \frac{1}{\sqrt[m]{(b(x - c))^n}} + d \quad b(x - c) > 0$$

$$P_1 : y = x^{-\frac{1}{2}}$$

$$P_5 : y = (x - 3)^{-\frac{1}{2}} + 1$$

Verschiebung um 3 in x-Richtung und um 1 in y-Richtung

$$P_2 : y = x^{-\frac{1}{3}} \quad P_6 : y = -2(x + 3)^{-\frac{1}{3}}$$

Verschiebung um -3 in x-Richtung und Streckung um -2 in y-Richtung

$$P_3 : y = x^{-\frac{3}{2}} \quad P_7 : y = (-x - 2)^{\frac{3}{2}} = (-(x + 2))^{-\frac{3}{2}}$$

Verschiebung um -2 in x-Richtung und Spiegelung an der y-Achse

$$P_4 : y = x^{-\frac{5}{3}} \quad P_8 : y = -2x^{-\frac{5}{3}} - 1$$

Verschiebung um -1 in y-Richtung und Streckung um -2 in y-Richtung

## Definitions- und Wertebereich

$$y = x^{-\frac{n}{m}} = \frac{1}{\sqrt[m]{x^n}}$$

$$\mathbb{D} = \mathbb{R}^+ \quad \mathbb{W} = \mathbb{R}^+$$

$$y = a(b(x - c))^{-\frac{n}{m}} + d = \frac{a}{\sqrt[m]{(b(x - c))^n}} + d$$

$$b > 0 \quad \mathbb{D} = ]c; \infty[$$

$$b < 0 \quad \mathbb{D} = ]-\infty; c[$$

$$a > 0 \quad \mathbb{W} = ]d; \infty[$$

$$a < 0 \quad \mathbb{W} = ]-\infty; d[$$

$$P_2 : y = x^{-\frac{1}{3}} \quad \mathbb{D} = \mathbb{R}^+ \quad \mathbb{W} = \mathbb{R}^+$$

$$P_5 : y = (x - 3)^{-\frac{1}{2}} + 1 \quad \mathbb{D} = ]3; \infty[ \quad \mathbb{W} = ]1; \infty[$$

$$P_8 : y = -2x^{-\frac{5}{3}} - 1 \quad \mathbb{D} = \mathbb{R}^+ \quad \mathbb{W} = ]-\infty; -1[$$

## Asymptoten

$$y = x^{-\frac{n}{m}} = \frac{1}{\sqrt[m]{x^n}}$$

Horizontale Asymptote (HA):  $y = 0$

Vertikale Asymptote (VA):  $x = 0$

$$y = a(b(x - c))^{-\frac{n}{m}} + d = \frac{a}{\sqrt[m]{(b(x - c))^n}} + d$$

Horizontale Asymptote:  $y = d$

Vertikale Asymptote:  $x = c$

$$[ P_2 : y = x^{-\frac{1}{3}} \quad \text{HA: } y = 0 \quad \text{VA: } x = 0$$

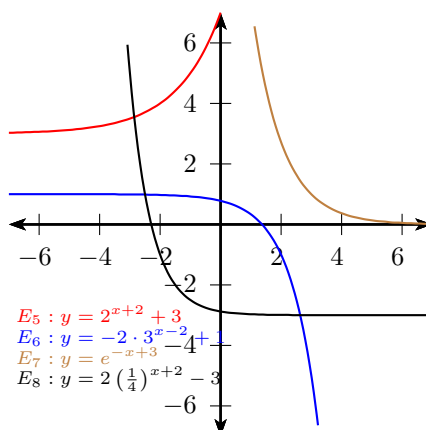
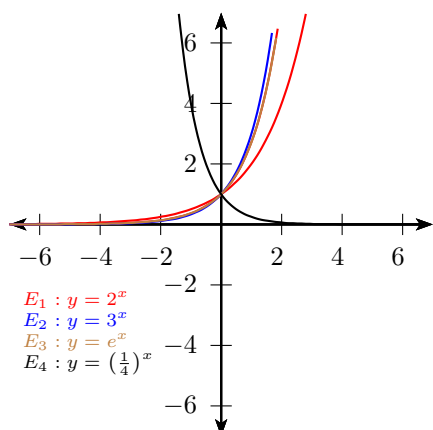
$$P_5 : y = (x - 3)^{-\frac{1}{2}} + 1 \quad \text{HA: } y = -1 \quad \text{VA: } x = 3$$

$$P_8 : y = -2x^{-\frac{5}{3}} - 1 \quad \text{HA: } y = -1 \quad \text{VA: } x = 0$$

Interaktive Inhalte: [Graph \(JS\)](#) - [Graph](#) -

### 3.6 Exponentialfunktion

#### 3.6.1 Graph und Eigenschaften



#### Formen der Exponentialfunktion

Grundfunktion:  $y = q^x \quad q > 0$

Funktion mit Formvariablen:

$$y = a \cdot q^{(x-c)} + d \quad q > 0$$

$$y = a \cdot q^{b(x-c)} + d \quad q > 0$$

Funktionen mit der Basis:  $e = 2,718..$

Grundfunktion:  $y = e^x$

Funktion mit Formvariablen:

$$y = a \cdot e^{(x-c)} + d$$

$$y = a \cdot e^{b(x-c)} + d$$

$E_1 : y = 2^x$        $E_5 : y = 2^{x+2} + 3$   
 Verschiebung um -2 in x-Richtung und um 3 in y-Richtung  
 $E_2 : y = 3^x$        $E_6 : y = -2 \cdot 3^{x-2} + 1$   
 Verschiebung um 2 in x-Richtung und um 1 in y-Richtung  
 Streckung um -2 in y-Richtung  
 $E_3 : y = e^x$        $E_7 : y = e^{-x+3} = e^{-(x-3)}$   
 Verschiebung um 3 in x-Richtung und Spiegelung an der y-Achse  
 $E_4 : y = \left(\frac{1}{4}\right)^x = 4^{-x}$        $E_8 : y = 2 \left(\frac{1}{4}\right)^{x+2} - 3$   
 Verschiebung um -2 in x-Richtung und um -3 in y-Richtung  
 Streckung um 2 in y-Richtung

#### Definitions- und Wertebereich

$$y = e^x \quad y = q^x$$

$$\mathbb{D} = \mathbb{R} \quad \mathbb{W} = \mathbb{R}^+$$

$$y = a \cdot q^{b(x-c)} + d \quad y = a \cdot e^{b(x-c)} + d$$

$$\mathbb{D} = \mathbb{R}$$

$$a > 0 \quad \mathbb{W} = ]d; \infty[$$

$$a < 0 \quad \mathbb{W} = ]-\infty; d[$$

$E_1 : y = 2^x \quad \mathbb{D} = \mathbb{R} \quad \mathbb{W} = \mathbb{R}^+$   
 $E_4 : y = \left(\frac{1}{4}\right)^x \quad \mathbb{D} = \mathbb{R} \quad \mathbb{W} = \mathbb{R}^+$   
 $E_5 : y = 2^{x+2} + 3 \quad \mathbb{D} = \mathbb{R} \quad \mathbb{W} = ]3; \infty[$   
 $E_6 : y = -2 \cdot 3^{x-2} + 1 \quad \mathbb{D} = \mathbb{R} \quad \mathbb{W} = ]-\infty; 1[$   
 $E_8 : y = 2 \left(\frac{1}{4}\right)^{x+2} - 3 \quad \mathbb{D} = \mathbb{R} \quad \mathbb{W} = ]-\infty; 3[$

#### Asymptoten

$$y = e^x \quad y = q^x$$

Horizontale Asymptote (HA):  $y = 0$

$$y = a \cdot q^{b(x-c)} + d \quad y = a \cdot e^{b(x-c)} + d$$

Horizontale Asymptote:  $y = d$

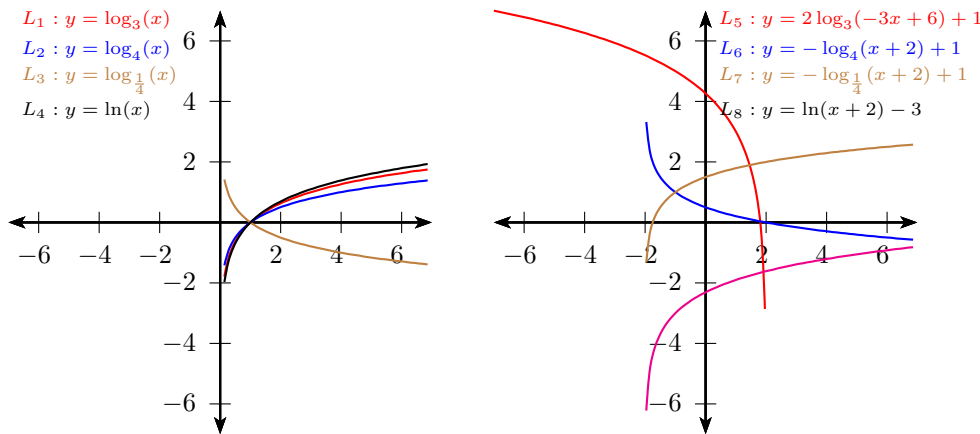
$[ E_1 : y = 2^x \quad \text{HA: } y = 0$   
 $E_5 : y = 2^{x+2} + 3 \quad \text{HA: } y = 3$   
 $E_8 : y = 2 \left(\frac{1}{4}\right)^{x+2} - 3 \quad \text{HA: } y = -3$

Interaktive Inhalte: [Graph \(JS\)](#) - [Graph](#) -



### 3.7 Logarithmusfunktion

#### 3.7.1 Graph und Eigenschaften



#### Formen der Logarithmusfunktion

Grundfunktion:  $y = \log_q x \quad q > 0$

Funktion mit Formvariablen:

$$y = a \log_q (x - c) + d \quad -\frac{d}{c} > 0$$

$$y = a \log_q (b(x - c)) + d$$

Funktionen mit der Basis:  $e = 2,718..$

Grundfunktion:  $y = \ln x$

Funktion mit Formvariablen:

$$y = a \ln (x - c) + d$$

$$y = a \ln (b(x - c)) + d$$

$$L_1 : y = \log_3(x) \quad L_5 : y = 2 \log_3(-3x + 6) + 1 = 2 \log_3(-3(x - 2)) + 1$$

Verschiebung um 2 in x-Richtung und um 1 in y-Richtung  
Streckung um 2 in y-Richtung und um -3 in x-Richtung

$$L_2 : y = \log_4(x) \quad L_6 : y = -\log_4(x + 2) + 1$$

Verschiebung um -2 in x-Richtung und um 1 in y-Richtung  
Spiegelung an der x-Achse

$$L_3 : y = \log_{\frac{1}{4}}(x) \quad L_7 : y = -\log_{\frac{1}{4}}(x + 2) + 1$$

Verschiebung um -2 in x-Richtung und um 1 in y-Richtung  
Spiegelung an der x-Achse

$$L_4 : y = \ln(x) \quad L_8 : y = \ln(x + 2) - 3$$

Verschiebung um -2 in x-Richtung und um -3 in y-Richtung

#### Definitions- und Wertebereich

$$y = \log_q x \quad y = \ln x \quad \mathbb{D} = \mathbb{R}^+ \quad \mathbb{W} = \mathbb{R}$$

$$y = a \log_q (b(x - c)) + d \quad y = a \ln (b(x - c)) + d$$

Definitionsbereich:  $b(x - c) > 0$

$$b > 0 \quad \mathbb{D} = ]c; \infty[$$

$$b < 0 \quad \mathbb{D} = ]-\infty; c[$$

$$\mathbb{W} = \mathbb{R}$$

$$L_5 : y = 2 \log_3(-3x + 6) \quad \mathbb{D} = ]-\infty; 2[ \quad \mathbb{W} = \mathbb{R}$$

$$L_6 : y = -\log_4(x + 2) + 1 \quad \mathbb{D} = ]-2; \infty[ \quad \mathbb{W} = \mathbb{R}$$

$$L_8 : y = \ln(x + 2) - 3 \quad \mathbb{D} = ]-2; \infty[ \quad \mathbb{W} = \mathbb{R}$$

#### Asymptoten

$$y = \log_q x \quad y = \ln x$$

Vertikale Asymptote (VA):  $x = 0$

$$y = a \log_q (b(x - c)) + d \quad y = a \ln (b(x - c)) + d$$

Vertikale Asymptote:  $x = c$

$$[ L_5 : y = 2 \log_3(-3x + 6) \quad \text{VA: } x = 2$$

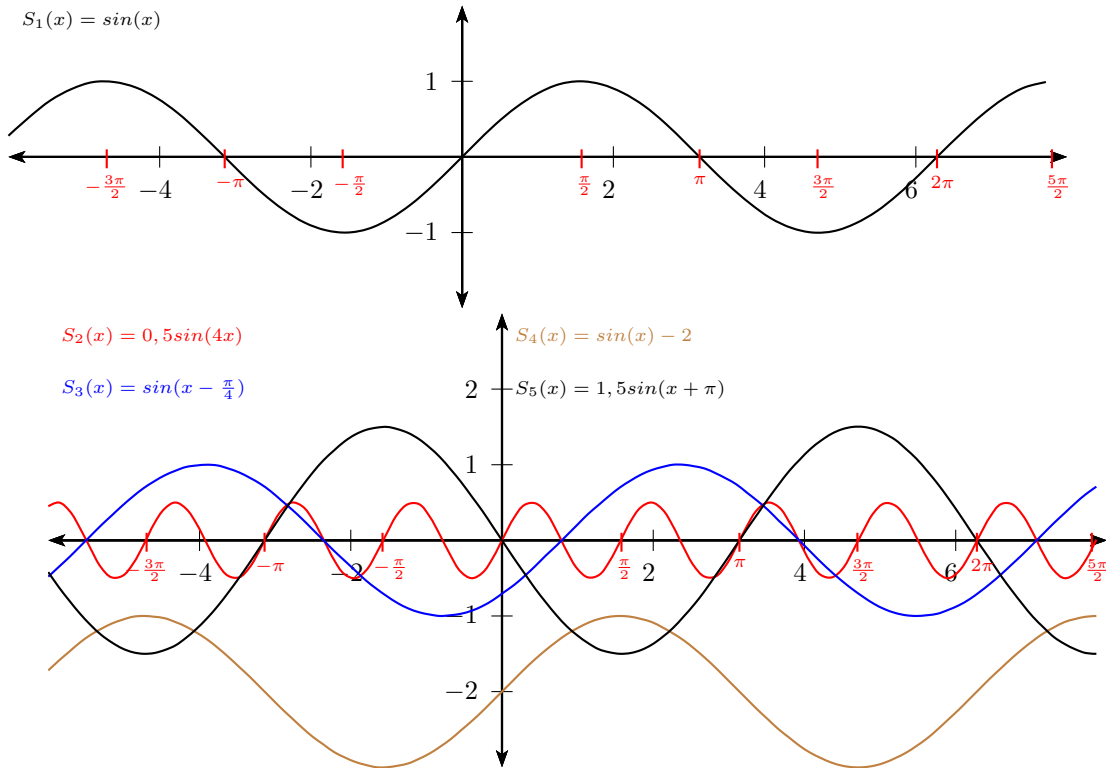
$$L_6 : y = -\log_4(x + 2) + 1 \quad \text{VA: } x = -2$$

$$L_8 : y = \ln(x + 2) - 3 \quad \text{VA: } x = -2$$

Interaktive Inhalte: [Graph \(JS\)](#) - [Graph](#) -

### 3.8 Sinusfunktion

#### 3.8.1 Graph und Eigenschaften



#### Formen der Sinusfunktion

Grundfunktion:  $f(x) = \sin x$   
 Amplitude: 1      Periode:  $2\pi$   
 Funktion mit Formvariablen:  
 $f(x) = a \sin(x - c) + d$   
 $f(x) = a \sin(b(x - c)) + d$   
 Amplitude:  $|a|$       Periode:  $\frac{2\pi}{b}$

$S_1(x) = \sin(x)$	$S_2(x) = 0,5\sin(4x)$
Stauchung um 0,5 in y-Richtung und $\frac{1}{4}$ in x-Richtung	
Amplitude: 0,5	Periode: $\frac{2\pi}{4}$
$S_1(x) = \sin(x)$	$S_3(x) = \sin(x - \frac{\pi}{4})$
Verschiebung um $\frac{\pi}{4}$ in x-Richtung	
Amplitude: 1	Periode: $2\pi$
$S_1(x) = \sin(x)$	$S_4(x) = \sin(x) - 2$
Verschiebung um -2 in y-Richtung	
Amplitude: 1	Periode: $2\pi$
$S_1(x) = \sin(x)$	$S_5(x) = 1,5\sin(x + \pi)$
Verschiebung um $-\pi$ in x-Richtung und Streckung um 1,5 in y-Richtung	
Amplitude: 1	Periode: $2\pi$

#### Definitions- und Wertebereich

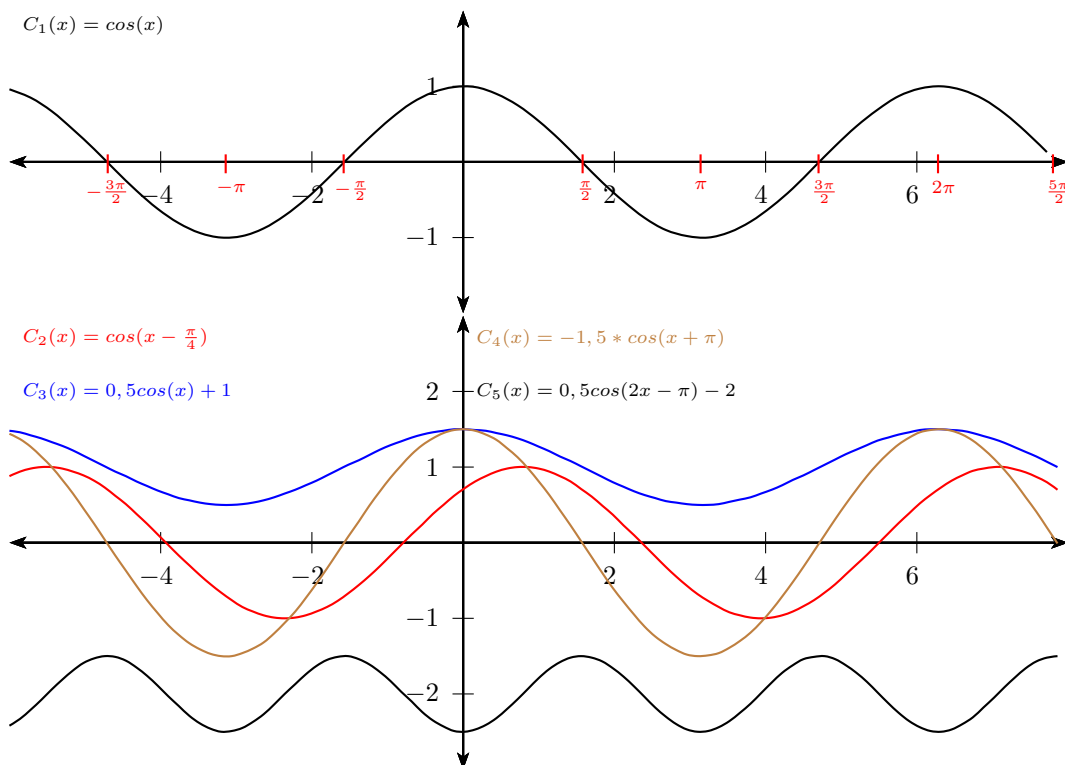
$f(x) = \sin(x)$   
 $\mathbb{D} = \mathbb{R}$        $\mathbb{W} = [-1; +1]$   
 $f(x) = a \sin(b(x - c)) + d$   
 $\mathbb{D} = \mathbb{R}$        $\mathbb{W} = [d - a; d + a]$

$S_2(x) = 0,5\sin(4x)$	$\mathbb{D} = \mathbb{R}$	$\mathbb{W} = [-0,5; +0,5]$
$S_3(x) = \sin(x - \frac{\pi}{4})$	$\mathbb{D} = \mathbb{R}$	$\mathbb{W} = [-1; 1]$
$S_4(x) = \sin(x) - 2$	$\mathbb{D} = \mathbb{R}$	$\mathbb{W} = [-1; -3]$

Interaktive Inhalte: [Graph \(JS\)](#) - [Graph](#) -

### 3.9 Kosinusfunktion

#### 3.9.1 Graph und Eigenschaften



#### Formen der Kosinusfunktion

Grundfunktion:  $f(x) = \cos x$   
 Amplitude: 1     Periode:  $2\pi$   
 Funktion mit Formvariablen:  
 $f(x) = a \cos(x - c) + d$   
 $f(x) = a \cos(b(x - c)) + d$   
 Amplitude:  $|a|$      Periode:  $\frac{2\pi}{b}$

$C_1(x) = \cos(x)$       $C_2(x) = \cos(x - \frac{\pi}{4})$   
 Verschiebung um  $\frac{\pi}{4}$  in x-Richtung  
 Amplitude: 1     Periode:  $2\pi$   
 $C_1(x) = \cos(x)$       $C_3(x) = 0,5\cos(x) + 1$   
 Verschiebung um 1 in y-Richtung und Stauchung um 0,5 in y-Richtung  
 Amplitude: 0,5     Periode:  $2\pi$   
 $C_1(x) = \cos(x)$       $C_4(x) = -1,5 * \cos(x + \pi)$   
 Verschiebung um  $-\pi$  in x-Richtung  
 Amplitude: 1,5     Periode:  $2\pi$   
 $C_1(x) = \cos(x)$       $C_5(x) = 0,5\cos(2x - \pi) - 2 = 0,5\cos(2(x - \frac{\pi}{2})) - 2$   
 Verschiebung um  $\frac{\pi}{2}$  in x-Richtung und Streckung um 0,5 in y-Richtung  
 Amplitude: 0,5     Periode:  $\frac{2\pi}{2}$

#### Definitions- und Wertebereich

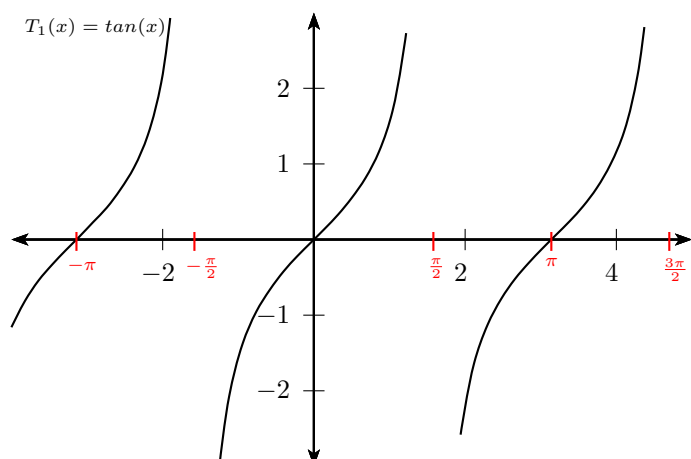
$f(x) = \cos(x)$   
 $\mathbb{D} = \mathbb{R}$       $\mathbb{W} = [-1; 1]$   
 $f(x) = a \cos(b(x - c)) + d$   
 $\mathbb{D} = \mathbb{R}$       $\mathbb{W} = [d - a; d + a]$

$C_2(x) = \cos(x - \frac{\pi}{4})$       $\mathbb{D} = \mathbb{R}$       $\mathbb{W} = [-1; 1]$   
 $C_3(x) = 0,5\cos(x) + 1$       $\mathbb{D} = \mathbb{R}$       $\mathbb{W} = [-0,5; 1,5]$   
 $C_5(x) = 0,5\cos(2x - \pi) - 2$       $\mathbb{D} = \mathbb{R}$       $\mathbb{W} = [-2,5; -1,5]$

Interaktive Inhalte: [Graph \(JS\)](#) - [Graph](#) -

## 3.10 Tangensfunktion

### 3.10.1 Graph und Eigenschaften



#### Formen der Tangensfunktion

Grundfunktion:  $f(x) = \tan x$

Periode:  $\pi$

Funktion mit Formvariablen:

$$f(x) = a \tan(x - c) + d$$

$$f(x) = a \tan(b(x - c)) + d$$

Periode:  $\frac{\pi}{b}$

#### Definitions- und Wertebereich

$$f(x) = \tan x$$

$$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{k \cdot \frac{\pi}{2}\} \quad \mathbb{W} = \mathbb{R} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$f(x) = a \tan b(x + c) + d$$

$$b(x - c) = k \frac{\pi}{2}$$

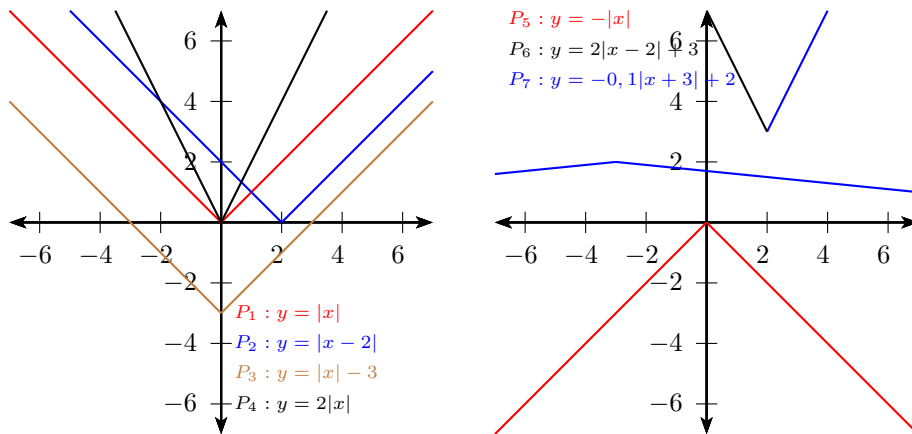
$$x = \frac{k\pi}{2b} + c$$

$$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{\frac{k\pi}{2b} + c\} \quad \mathbb{W} = \mathbb{R} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Interaktive Inhalte: [Graph \(JS\)](#) - [Graph](#) -

### 3.11 Betragsfunktion

#### 3.11.1 Graph und Eigenschaften



#### Formen der Betragsfunktion

- Aufspalten der Beträge in einzelne Intervalle.  
 Betragsstriche sind nicht nötig, wenn der Term des Betrags positiv ist.  
 Betragsstriche sind nicht nötig, wenn der Term des Betrags negativ ist und dafür zusätzlich ein Minuszeichen vor dem Term geschrieben wird.

Grundfunktion:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & x > 0 \\ -x & x < 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Funktion mit Formvariablen:

$$f(x) = a|b(x - c)| + d = \begin{cases} a(b(x - c)) + d & x > c \\ -a(b(x - c)) + d & x < c \\ d & x = c \end{cases}$$

$$P_6 : y = 2|x - 2| + 3 = \begin{cases} 2(x - 2) + 3 & x > 2 \\ -2(x - 2) + 3 & x < 2 \\ 3 & x = 2 \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} 2x - 1 & x > 2 \\ -2x + 7 & x < 2 \\ 3 & x = 2 \end{cases}$$

#### Definitions- und Wertebereich

$$f(x) = |x|$$

$$\mathbb{D} = \mathbb{R} \quad \mathbb{W} = \mathbb{R}_0^+$$

$$f(x) = a|b(x - c)| + d \quad \mathbb{D} = \mathbb{R}$$

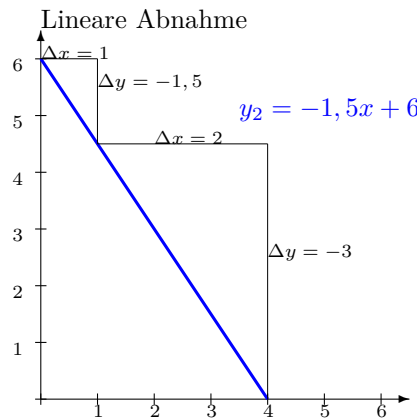
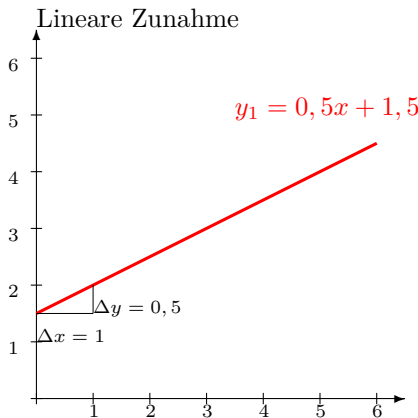
$$a > 0 \quad \mathbb{W} = [d; \infty[$$

$$a < 0 \quad \mathbb{W} = ]-\infty; d]$$

Interaktive Inhalte: [Graph \(JS\)](#) - [Graph](#) -

### 3.12 Wachstumsfunktionen

#### 3.12.1 Lineares Wachstum



- Zum Anfangswert  $t$  wird pro Zeiteinheit der gleiche Wert  $m$  addiert oder subtrahiert.

- Lineare Funktion:  $y = m \cdot x + t$   
 $x$  - Zeit in Stunden, Minuten usw.  
 $y$  - Funktionswert nach der Zeit  $x$   
 $t$  - Anfangswert

- $m$  - konstante Änderungsrate, Steigung  
 $m > 0$  positives lineares Wachstum (Zunahme)  
 $m < 0$  negatives lineares Wachstum (Abnahme)  
 $m = 0$  Nullwachstum

- Änderungsrate - Wachstumsgeschwindigkeit

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

- Umformungen:  $y = m \cdot x + t$

$$x = \frac{y-t}{m} \quad t = y - m \cdot x \quad m = \frac{y-t}{x}$$

- Schreibweisen

Funktion	Änderungsrate	Variable	Anfangswert
$y = m \cdot x + t$	$m$	$x$	$t$
$y = a \cdot x + b$	$a$	$x$	$b$
$y = a + b \cdot x$	$b$	$x$	$a$
$f(x) = a \cdot x + f_0$	$a$	$x$	$f_0$
$N(t) = a \cdot t + N_0$	$a$	$t$	$N_0$
$B(t) = k \cdot t + B_0$	$a$	$x$	$B_0$
$K(t) = q \cdot t + K_0$	$q$	$t$	$K_0$

#### Lineare Zunahme

Ein Wasserbecken enthält 1,5 Liter Wasser. Pro Minute fließen 0,5 Liter zu.

$x_1 =$ Minuten	$y_1 =$ Liter				
$t = 1,5$	0	1	2	3	4
$y_1$	1,5	1,5 + 0,5	2 + 0,5	2,5 + 0,5	3 + 0,5
$y_1$	1,5	2	2,5	3	3,5

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2-1,5}{1-0} = \frac{0,5}{1} = 0,5$$

$$y = 0,5x + 1,5$$

#### Lineare Abnahme

Ein Wasserbecken enthält 6 Liter Wasser. Pro Minute fließen 1,5 Liter ab.

$x_2 =$ Minuten	$y_2 =$ Liter				
	0	1	2	3	4
$y_2$	6	6 - 1,5	4,5 - 1,5	3 - 1,5	1,5 - 1,5
$y_2$	6	4,5	3	1,5	0

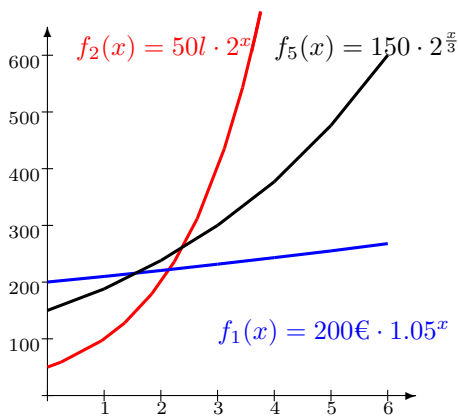
$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4,5-6}{1-0} = \frac{-1,5}{1} = -1,5$$

$$y = -1,5x + 6$$

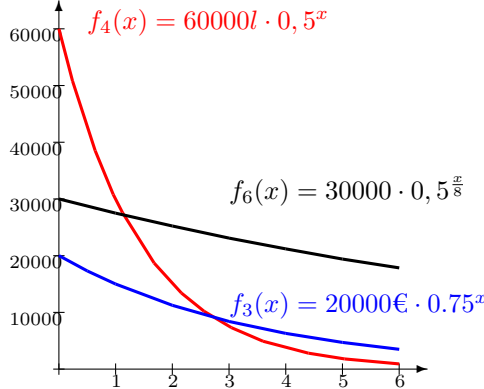
Interaktive Inhalte: [Graph \(JS\)](#) - [Graph](#) - [Eigenschaften](#) -  $y = m \cdot x + t$  -  $m = \frac{y-t}{x}$  -  $x = \frac{y-t}{m}$  -  $t = y - m \cdot x$  -

### 3.12.2 Exponentielles Wachstum

Exponentielles Wachstum



Exponentieller Zerfall



#### Wachstumsfaktor pro Zeiteinheit

- Der Anfangswert  $a$  wird pro Zeiteinheit mit den gleichen Faktor  $q$  multipliziert.

• Funktion:  $f(x) = a \cdot q^x$

$x$  - Zeit in Stunden, Minuten usw.

$y = f(x)$  - Funktionswert nach der Zeit  $x$

$a$  - Anfangswert

$q$  - Wachstumsfaktor pro Zeiteinheit

$q > 1$  exponentielles Wachstum

$0 < q < 1$  exponentieller Zerfall

$q = 0$  Nullwachstum

- Prozentuale Zunahme  $p$  pro Zeiteinheit

$$f(x) = a \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^x = a \cdot q^x$$

$$q = 1 + \frac{p}{100} \quad p = (q - 1) \cdot 100$$

- Prozentuale Abnahme  $p$  pro Zeiteinheit

$$f(x) = a \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)^x = a \cdot q^x$$

$$q = 1 - \frac{p}{100} \quad p = (1 - q) \cdot 100$$

- Lokale Änderungsrate - Wachstumsgeschwindigkeit

1. Ableitung:  $f'(x) = a \cdot \ln(q) \cdot q^x$

- Umformungen  $y = f(x)$

$$y = a \cdot q^x \quad a = \frac{y}{q^x} \quad x = \log_q\left(\frac{y}{a}\right) \quad q = \sqrt[x]{\frac{y}{a}}$$

- Schreibweisen

Funktion	Wachstumsfaktor	Variable	Anfangswert
$f(t) = a \cdot q^t$	$q$	$t$	$a$
$y = a \cdot b^x$	$b$	$x$	$a$
$y = b \cdot a^t$	$a$	$t$	$b$
$K(t) = K_0 \cdot q^t$	$q$	$t$	$N_0$
$N(t) = N_0 \cdot q^t$	$q$	$t$	$N_0$

#### Exponentielle Zunahme

Ein Kapital von 200 € wird mit 5 % (pro Jahr) verzinst.

$$x_1 = \text{Jahr} \quad y_1 = \text{Euro} \quad p=5 \quad q = 1 + \frac{5}{100} = 1,05 \quad a = 200\text{€}$$

$x_1$	0	1	2	3	4
$y_1$	200	$200 \cdot 1,05$	$210 \cdot 1,05$	$220,5 \cdot 1,05$	$231,52 \cdot 1,05$
$y_1$	200	210	220,5	231,52	243,1

$$f_1(x) = 200\text{€} \cdot \left(1 + \frac{5}{100}\right)^x \quad f_1(x) = 200\text{€} \cdot 1,05^x$$

Kapital nach 10 Jahren:  $f_1(10) = 200\text{€} \cdot 1,05^{10} = 325,78\text{€}$

In jeder Minute verdoppelt sich die Wassermenge in einem Wasserbecken. Nach 4 Minuten enthält es 800 Liter Wasser.

$$q = 2 \quad f(4) = 800$$

Prozentuale Zunahme:  $p = (2 - 1) \cdot 100\% = 100\%$

$$\text{Anfangswert: } a = \frac{y}{q^x} = \frac{800}{2^4} = 50l$$

$$f_2(x) = 50\text{€} \cdot 2^x \quad f_2(x) = 50 \cdot \left(1 + \frac{100}{100}\right)^x$$

#### Exponentielle Abnahme

Ein Auto kostet 20000 €. Der Wertverlust beträgt 25 % pro Jahr.

$x$	0	1	2	3	4
$y_3$	20000	$20000 \cdot 0,75$	$25000 \cdot 0,75$	$11250 \cdot 0,5$	$8437,50 \cdot 0,75$
$y_3$	20000	25000	11250	8437,50	6328,12

$$f_3(x) = 20000\text{€} \cdot \left(1 - \frac{25}{100}\right)^x \quad f_3(x) = 20000\text{€} \cdot 0,75^x$$

Wann ist das Auto nur noch 1000 € Wert?

$$x = \log_q\left(\frac{y}{a}\right) = \log_{0,75}\left(\frac{1000\text{€}}{20000\text{€}}\right) = 19,41 \text{ Jahren}$$

Ein Wasserbecken enthält 60000 Liter Wasser.

Pro Minute halbiert sich die Wassermenge.

$x_4$	0	1	2	3	4
$y_4$	60000	$60000 \cdot 0,5$	$30000 \cdot 0,5$	$15000 \cdot 0,5$	$7500 \cdot 0,5$
$y_4$	60000	30000	15000	7500	3750

$$f_4(x) = 60000l \cdot 0,5^x \quad f_4(x) = 60000l \cdot \left(1 - \frac{50}{100}\right)^x$$

### Wachstumsfaktor pro Periode

- Der Anfangswert  $a$  wird pro Periode mit den gleichen Faktor  $q$  multipliziert.

- Funktion:  $f(x) = a \cdot q^{\frac{x}{T}}$

$x$  - Zeit in Stunden, Minuten usw.

$y = f(x)$  - Funktionswert nach der Zeit  $x$

$a$  - Anfangswert

$T$  - Periode, Zeitintervall

$q$  - Wachstumsfaktor pro Periode

$q > 1$       exponentielles Wachstum

$0 < q < 1$       exponentieller Zerfall

$q = 0$       Nullwachstum

- Prozentuale Zunahme  $p$  pro Periode  $T$

$$f(x) = a \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{\frac{x}{T}}$$

$$q = 1 + \frac{p}{100} \quad p = (q - 1) \cdot 100$$

- Prozentuale Abnahme pro Periode  $T$

$$f(x) = a \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)^{\frac{x}{T}}$$

$$q = 1 - \frac{p}{100} \quad p = (1 - q) \cdot 100$$

- Umformungen  $y = f(x)$

$$y = a \cdot q^{\frac{x}{T}} \quad a = \frac{y}{q^{\frac{x}{T}}} \quad x = T \cdot \log_q\left(\frac{y}{a}\right) \quad q = \sqrt[\frac{x}{T}]{\frac{y}{a}}$$

#### Exponentielles Wachstum

Zu Beginn der Beobachtung sind 150 Bakterien vorhanden. Die Anzahl der Bakterien verdoppelt sich alle 3 Stunden.

$$q=2 \quad T=3 \quad a = 150$$

$x_5$  = Stunden       $y_5$  = Anzahl der Bakterien

$x_5$	0	3	6	9	12
$y_5$	150	$150 \cdot 2$	$300 \cdot 2$	$600 \cdot 2$	$1200 \cdot 2$
$y_1$	150	300	600	1200	2400

$$f_5(x) = 150 \cdot 2^{\frac{x}{3}}$$

Anzahl der Bakterien nach 2 Stunden:

$$f_5(2) = 150 \cdot 2^{\frac{2}{3}} = 238$$

Jod 131 hat eine Halbwertszeit von 8 Tagen. Am Anfang sind 30000 Atome vorhanden.

$$q=0,5 \quad T=8 \quad a = 30000$$

$x_6$  = Tage       $y_6$  = Anzahl der Atome

$x_6$	0	8	16	24	32
$y_6$	30000	$30000 \cdot 0,5$	$15000 \cdot 0,5$	$7500 \cdot 0,5$	$37500 \cdot 0,5$
$y_6$	30000	15000	7500	3750	1875

$$f_6(x) = 30000 \cdot 0,5^{\frac{x}{8}} \quad f_6(x) = 30000 \cdot \left(1 - \frac{50}{100}\right)^{\frac{x}{8}}$$



## Wachstumskonstante und e-Funktion

• Funktion:  $f(x) = a \cdot e^{k \cdot x}$

x - Zeit in Stunden, Minuten usw.

f(x) - Funktionswert nach der Zeit x

a - Anfangswert

k - Wachstumskonstante

$k > 0$       exponentielles Wachstum

$k < 0$       exponentieller Zerfall

• Wachstumsfaktor q pro Zeiteinheit

$$f(x) = a \cdot q^x = a \cdot e^{\ln(q^x)} = a \cdot e^{\ln(q) \cdot x} = a \cdot e^{k \cdot x}$$

$$k = \ln(q) \quad q = e^k$$

• Wachstumsfaktor q pro Periode T

$$f(x) = a \cdot q^{\frac{x}{T}} = a \cdot e^{\ln(q^{\frac{x}{T}})} = a \cdot e^{\ln(q) \cdot \frac{x}{T}} = a \cdot e^{k \cdot x}$$

$$k = \frac{\ln(q)}{T} \quad q = e^{k \cdot T}$$

• Lokale Änderungsrate - Wachstumsgeschwindigkeit

$$1. \text{Ableitung: } f'(x) = a \cdot k \cdot e^{k \cdot x} = k \cdot f(x)$$

• Umformungen  $y = f(x)$

$$y = a \cdot e^{k \cdot x} \quad a = \frac{y}{e^{k \cdot x}} \quad x = \frac{\ln(\frac{y}{a})}{k} \quad k = \frac{\ln(\frac{y}{a})}{x}$$

$$f_1(x) = 200\text{€} \cdot 1,05^x$$

$$k = \ln(q) = \ln(1,05) = 0,0488$$

$$f_1(x) = 200\text{€} \cdot e^{\ln(1,05)x} \quad f_1(x) = 200\text{€} \cdot e^{0,0488x}$$

$$f_1(10) = 200\text{€} \cdot e^{\ln(1,05)10} = 325,78$$

$$f_6(x) = 30000 \cdot 0,5^{\frac{x}{8}}$$

$$k = \frac{\ln(q)}{T} = \frac{\ln(0,5)}{8} = -0,087$$

$$f_6(x) = 30000 \cdot e^{\frac{\ln(0,5)}{8}x} \quad f_6(x) = 30000 \cdot e^{-0,087x}$$

Interaktive Inhalte:  $p = (q - 1) \cdot 100$  -  $q = 1 + \frac{p}{100}$  -  $f(x) = a \cdot q^x$  -  $a = \frac{f(x)}{q^x}$  -  $x = \log_q(\frac{y}{a})$  -  $q = \sqrt[x]{\frac{y}{a}}$  -