

Formelsammlung Mathematik

<http://www.fersch.de>

©Klemens Fersch

14. Mai 2017

Inhaltsverzeichnis

1 Algebra	5		
1.1 Grundlagen	5	1.2.7 Polynomdivision	14
1.1.1 Mengen	5	1.3 Gleichungen	15
1.1.2 Mengenoperationen	5	1.3.1 Grundlagen	15
1.1.3 Zahlenmengen	5	1.3.2 Lineare Gleichung	15
1.1.4 Primfaktoren - ggT - kgV	6	1.3.3 Quadratische Gleichung	15
1.1.5 Grundrechnungen	6	1.3.4 Kubische Gleichungen	16
1.1.6 Grundrechenregeln	6	1.3.5 Gleichungen höheren Grades	16
1.1.7 Vorzeichenregel	7	1.3.6 Bruchgleichung	17
1.1.8 Brüche	7	1.3.7 Exponentialgleichungen	17
1.1.9 Dezimalbruch	8	1.3.8 Logarithmusgleichungen	17
1.1.10 Bruchteile - Prozent - Promille	8	1.3.9 Betragsgleichung	18
1.1.11 Prozentrechnung	9	1.4 Ungleichungen	18
1.1.12 Promillerechnung	9	1.4.1 Grundlagen	18
1.1.13 Prozentuale Ab- und Zunahme	9	1.4.2 Äquivalenzumformung	19
1.1.14 Potenzen	9	1.4.3 Lineare Ungleichung	19
1.1.15 Wurzeln	10	1.4.4 Quadratische Ungleichung	19
1.1.16 Logarithmen	10	1.4.5 Betragsgleichung	20
1.1.17 Proportionalität	11	1.5 Lineares Gleichungssystem	21
1.2 Terme	12	1.5.1 Einsetzverfahren (2)	21
1.2.1 Grundlagen	12	1.5.2 Gleichsetzungsverfahren (2)	21
1.2.2 Umformung von Termen	12	1.5.3 Additionsverfahren (2)	21
1.2.3 Binomische Formel	12	1.5.4 Determinantenverfahren (2)	21
1.2.4 Faktorisieren - Ausklammern	13	1.5.5 Determinantenverfahren (3)	21
1.2.5 Quadratische Ergänzung	13	1.6 Lineare Algebra	22
1.2.6 Bruchterme	13	1.6.1 Matrix	22
		1.6.2 Determinante	24
		1.6.3 Lineare Gleichungssysteme und Gauß-Algorithmus	24
		1.7 Finanzmathematik	26

1.7.1	Zinsrechnung - Jahreszins	26	2.6.6	Hohlzylinder	32
1.7.2	Zinsrechnung - Tageszins	26	2.6.7	Kreiskegel	32
1.7.3	Zinsrechnung - Monatszins	26	2.6.8	Kegelstumpf	33
1.7.4	Zinsfaktor	26	2.6.9	Kugel	33
1.7.5	Zinseszinsformel	26	2.7	Trigonometrie	33
1.7.6	Degressive Abschreibung	26	2.7.1	Gradmaß - Bogenmaß	33
2	Geometrie	27	2.7.2	Definition	33
2.1	Grundlagen	27	2.7.3	Quadrantenregel	34
2.1.1	Definitionen	27	2.7.4	Umrechnungen	34
2.1.2	Strahlensätze	27	2.7.5	Rechtwinkliges Dreieck	34
2.2	Dreieck	28	2.7.6	Sinussatz	35
2.2.1	Definitionen und Eigenschaften des Dreiecks	28	2.7.7	Kosinussatz	35
2.2.2	Kongruenzsätze	29	2.7.8	Kongruenzsätze - Berechnungen am Dreieck	35
2.2.3	Pythagoras - Höhensatz - Kathetensatz	29	3	Funktionen	37
2.2.4	Allgemeines Dreieck	30	3.1	Grundlagen	37
2.2.5	Gleichseitiges Dreieck	30	3.1.1	Definition	37
2.2.6	Gleichschenkliges Dreieck	30	3.1.2	Umkehrfunktion	37
2.2.7	Rechtwinkliges Dreieck	30	3.2	Lineare Funktion	38
2.3	Viereck	30	3.2.1	Ursprungsgerade	38
2.3.1	Quadrat	30	3.2.2	Graph und Eigenschaften	38
2.3.2	Rechteck	30	3.2.3	Geradengleichung aufstellen	39
2.3.3	Trapez	30	3.2.4	Gerade - Gerade	39
2.3.4	Parallelogramm	30	3.3	Quadratische Funktion	39
2.3.5	Raute	30	3.3.1	Graph und Eigenschaften	39
2.3.6	Drachen	30	3.3.2	Parabelgleichung aufstellen und umformen	40
2.4	Polygone (n-Ecken)	31	3.3.3	Parabel - Gerade	40
2.4.1	Regelmäßiges n-Eck	31	3.3.4	Parabel - Parabel	40
2.4.2	Sechseck	31	3.4	Eigenschaften von Funktionen	41
2.5	Kreis	31	3.4.1	Symmetrie	41
2.5.1	Kreis	31	3.4.2	Monotonie	41
2.5.2	Kreis Sektor (Grad)	31	3.4.3	Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen	41
2.5.3	Kreis Sektor (Bogenmaß)	31	3.4.4	Asymptote	41
2.5.4	Kreisring	31	3.4.5	Verknüpfung von Funktionen	41
2.6	Stereometrie	32	3.4.6	Abbildung von Funktionen	41
2.6.1	Prisma	32	3.5	Potenzfunktion	42
2.6.2	Würfel	32	3.5.1	Parabeln vom Grad n - gerader Exponent	42
2.6.3	Quader	32	3.5.2	Parabeln vom Grad n - ungerader Exponent	42
2.6.4	Pyramide	32	3.5.3	Hyperbeln vom Grad n - gerader Exponent	42
2.6.5	Kreiszyylinder	32	3.5.4	Hyperbeln vom Grad n - ungerader Exponent	43

3.5.5	Wurzelfunktion - rationaler, positiver Exponent	43	4.4.1	Ganzrationale Funktion	56
3.5.6	Wurzelfunktion - rationaler, negativer Exponent	43	4.4.2	Gebrochenrationale Funktion	58
3.6	Exponentialfunktion	44	4.4.3	Exponentialfunktion (Basis e)	60
3.6.1	Graph und Eigenschaften	44	4.4.4	Logarithmusfunktion (Basis e)	61
3.7	Logarithmusfunktion	45	4.5	Aufstellen von Funktionsgleichungen	62
3.7.1	Graph und Eigenschaften	45	4.5.1	Ganzrationale Funktion	62
3.8	Sinusfunktion	45	5	Stochastik	64
3.8.1	Graph und Eigenschaften	45	5.1	Statistik	64
3.9	Kosinusfunktion	46	5.1.1	Mittelwert - Median - Modalwert	64
3.9.1	Graph und Eigenschaften	46	5.2	Kombinatorik	65
3.10	Tangensfunktion	46	5.2.1	Grundlagen	65
3.10.1	Graph und Eigenschaften	46	5.2.2	Anzahl der Anordnungen - Permutation	65
3.11	Betragsfunktion	47	5.2.3	Auswahl mit Beachtung der Reihenfolge - Variation	65
3.11.1	Graph und Eigenschaften	47	5.2.4	Auswahl ohne Beachtung der Reihenfolge - Kombination	65
3.12	Wachstumsfunktionen	47	5.3	Wahrscheinlichkeit	65
3.12.1	Lineares Wachstum	47	5.3.1	Zufallsexperiment	65
3.12.2	Exponentielles Wachstum	47	5.3.2	Relative Häufigkeit	66
4	Analysis	49	5.3.3	Wahrscheinlichkeit	66
4.1	Grenzwert - Stetigkeit	49	5.3.4	Mehrstufige Zufallsexperimente	66
4.1.1	Grenzwert von $f(x)$ für x gegen x_0	49	5.3.5	Bedingte Wahrscheinlichkeit	67
4.1.2	Grenzwert von $f(x)$ für x gegen Unendlich	49	5.3.6	Vierfeldertafel	67
4.1.3	Stetigkeit	50	5.3.7	Binomialverteilung	68
4.1.4	Rechenregeln	50	5.3.8	Hypergeometrische Verteilung	70
4.2	Differentialrechnung	51	5.3.9	Erwartungswert - Varianz - Standardabweichung	70
4.2.1	Definition	51	5.4	Testen von Hypothesen	71
4.2.2	1. Ableitung - Monotonie - Extremwerte	51	5.4.1	Einseitiger Signifikanztest	71
4.2.3	Graph der 1. Ableitung	52	6	Analytische Geometrie	72
4.2.4	2. Ableitung - Krümmung - Wendepunkte	52	6.1	Vektorrechnung in der Ebene	72
4.2.5	Graph der 2. Ableitung	52	6.1.1	Vektor - Abstand - Steigung - Mittelpunkt	72
4.2.6	Ableitung der Grundfunktionen	53	6.1.2	Skalarprodukt - Fläche - Winkel	73
4.2.7	Ableitungsregeln	53	6.1.3	Abbildungen	73
4.2.8	Tangenten- und Normalengleichung	53	6.2	Vektor	75
4.2.9	Newtonsches Iterationsverfahren	54	6.2.1	Vektor - Abstand - Mittelpunkt	75
4.3	Integralrechnung	54	6.2.2	Winkel - Skalarprodukt - Vektorprodukt - Abhängigkeit	75
4.3.1	Definition	54	6.2.3	Spatprodukt - lineare Abhängigkeit - Basisvektoren - Komplanarität	76
4.3.2	Integration der Grundfunktionen	54	6.3	Gerade	77
4.3.3	Integrationsregeln	55	6.3.1	Gerade aus 2 Punkten	77
4.3.4	Graph der Stammfunktion	55	6.4	Ebene	77
4.4	Kurvendiskussion	56			

6.4.1	Parameterform - Normalenform	77
6.4.2	Ebenengleichung aufstellen	78
6.4.3	Parameterform - Koordinatenform	78
6.4.4	Koordinatenform - Parameterform	79
6.4.5	Koordinatenform - Hessesche Normalenform	79
6.5	Kugel	80
6.5.1	Kugelgleichung	80
6.6	Lagebeziehung	80
6.6.1	Punkt - Gerade	80
6.6.2	Gerade - Gerade	80
6.6.3	Punkt - Ebene (Koordinatenform)	81
6.6.4	Gerade - Ebene (Koordinatenform)	81
6.6.5	Ebene - Ebene	81

1 Algebra

1.1 Grundlagen

1.1.1 Mengen

Definition

Ein Menge (Großbuchstaben) besteht aus unterscheidbaren Elementen.

Mengen in aufzählender Form

$$\mathbb{A} = \{a; b; c\}$$

Mengen in beschreibender Form

$$\mathbb{M} = \{x|x \text{ hat die Eigenschaft } E\}$$

\in Element - \notin nicht Element

$$\mathbb{M} = \{a; b; c\}$$

$$b \in \mathbb{M}$$

$$e \notin \mathbb{M}$$

\subset Teilmenge - $\not\subset$ nicht Teilmenge

$$\mathbb{A} = \{a; b; c; d; e\}$$

$$\mathbb{B} = \{b; c\}$$

$$\mathbb{C} = \{b; c; f\}$$

$\mathbb{B} \subset \mathbb{A}$ Jedes Element von B ist auch Element von A

$\mathbb{C} \not\subset \mathbb{A}$ Nicht jedes Element von C ist auch Element von A

Gleichheit $A = B$

$$\mathbb{A} = \{a; b; c; d; e\}$$

$$\mathbb{B} = \{a; b; c; d; e\}$$

$\mathbb{A} = \mathbb{B}$ Jedes Element von A ist auch Element von B

Jedes Element von B ist auch Element von A

Leere Menge $\{\}$

$$\mathbb{A} = \{\} = \emptyset$$

Menge A enthält keine Elemente

1.1.2 Mengenoperationen

Schnittmenge \cap

$$\mathbb{A} = \{c; d; e\}$$

$$\mathbb{B} = \{a; b; c; d\}$$

$$\mathbb{A} \cap \mathbb{B} = \{c; d\}$$

Alle Elemente die in A und zugleich in B enthalten sind.

Vereinigungsmenge \cup

$$\mathbb{A} = \{c; d; e\}$$

$$\mathbb{B} = \{a; b; c; d\}$$

$$\mathbb{A} \cup \mathbb{B} = \{a; b; c; d; e\}$$

Alle Elemente die in A oder B enthalten sind.

Differenz \setminus

$$\mathbb{A} = \{c; d; e\}$$

$$\mathbb{B} = \{a; b; c; d\}$$

$$\mathbb{A} \setminus \mathbb{B} = \{e\}$$

Alle Elemente die in A, aber nicht in B enthalten sind.

1.1.3 Zahlenmengen

Natürlichen Zahlen

$$\mathbb{N} = \{1; 2; 3; 4; \dots\}$$

Natürlichen Zahlen und Null

$$\mathbb{N}_0 = \{0; 1; 2; 3; 4; \dots\}$$

$$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$$

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0$$

Ganzen Zahlen

$$\mathbb{Z} = \{\dots; -2; -1; 0; 1; 2; \dots\}$$

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z}$$

Rationalen Zahlen

Rationale Zahlen \mathbb{Q} sind

- Bruchzahlen
- endliche Dezimalzahlen
- unendliche periodische Dezimalzahlen

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z} \wedge q \in \mathbb{N} \right\}$$

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$$

Irrationale Zahlen

Irrationale Zahlen \mathbb{I} sind unendliche nicht periodische Dezimalzahlen.

Reellen Zahlen

Reelle Zahlen \mathbb{R} sind

- rationale Zahlen \mathbb{Q}
- irrationale Zahlen \mathbb{I}

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$

$\mathbb{R} = \{\text{jeder Punkt auf dem Zahlenstrahl}\}$

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Vergleichszeichen

$a = b$	a ist gleich b
$a \neq b$	a ist ungleich b
$a < b$	a ist kleiner als b
$a > b$	a ist größer als b
$a \leq b$	a ist kleiner oder gleich b
$a \geq b$	a ist größer oder gleich b

1.1.4 Primfaktoren - ggT - kgV**Primzahlen**

Eine Primzahl ist eine ganze Zahl, die nur durch eins und sich selbst teilbar ist.

Primfaktorenzerlegung

Zerlegung einer natürlichen Zahl als Produkt aus Primzahlen.

Teilbarkeitsregeln

Eine Zahl ist durch ...

2 teilbar, wenn ihre letzte Ziffer eine 2, 4, 6, 8 oder 0 ist.

3 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 3 teilbar ist.

4 teilbar, wenn ihre letzten 2 Stellen durch 4 teilbar sind.

5 teilbar, wenn ihre letzte Stelle eine 5 oder eine 0 ist.

6 teilbar, wenn sie durch 2 und durch 3 teilbar ist.

8 teilbar, wenn ihre letzten 3 Stellen durch 8 teilbar sind.

9 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 9 teilbar ist.

10 teilbar, wenn ihre letzte Stelle eine 0 ist.

12 teilbar, wenn sie durch 3 und durch 4 teilbar ist.

15 teilbar, wenn sie durch 3 und durch 5 teilbar ist.

18 teilbar, wenn sie durch 2 und durch 9 teilbar ist.

Die Quersumme einer Zahl, ist die Summe ihrer Ziffern.

Vielfachmenge $V(a)$

Alle Vielfachen von einer natürlichen Zahl a.

Teilmengen $T(a)$

Alle ganzzahligen Teiler einer Zahl a.

Größter gemeinsamer Teiler ggT(a,b)

Methode 1: Aus den Teilmengen von a und b den größten Teiler ablesen

Methode 2: Das Produkt der gemeinsamen Primfaktoren bilden.

Kleinstes gemeinsames Vielfaches kgV(a,b)

Methode 1: Aus den Vielfachmengen von a und b das kleinste Vielfache ablesen.

Methode 2: Das Produkt aller Primfaktoren von a und den zusätzlichen Primfaktoren von b bilden.

1.1.5 Grundrechnungen**Addition**

$$\begin{array}{rcccc} a & + & b & = & c \\ \text{1.Summand} & + & \text{2.Summand} & = & \text{Summe} \end{array}$$

Subtraktion

$$\begin{array}{rcccc} a & - & b & = & c \\ \text{Minuend} & - & \text{Subtrahend} & = & \text{Differenz} \end{array}$$

Multiplikation

$$\begin{array}{rcccc} a & \cdot & b & = & c \\ \text{1.Faktor} & \cdot & \text{2.Faktor} & = & \text{Produkt} \end{array}$$

Division

$$\begin{array}{rcccc} a & : & b & = & c \\ \text{Dividend} & : & \text{Divisor} & = & \text{Quotient} \end{array}$$

$$\frac{a}{b} = c \quad \frac{\text{Dividend}}{\text{Divisor}} = \text{Quotient}$$

1.1.6 Grundrechenregeln**Kommutativgesetz**

$$\begin{array}{l} a \cdot b = b \cdot a \\ a + b = b + a \end{array}$$

Assoziativgesetz

$$\begin{array}{l} (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \\ (a + b) + c = a + (b + c) \end{array}$$

Distributivgesetz

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Reihenfolge der Rechenarten

- Klammern vor
- Potenzierung vor
- Punktrechnung (Multiplikation und Division) vor
- Strichrechnung (Addition und Subtraktion)
- von links nach rechts

1.1.7 Vorzeichenregel

Vorzeichen und Klammern

$$+(+a) = +a$$

$$+(-a) = -a$$

$$-(+a) = -a$$

$$-(-a) = +a$$

Multiplikation

$$+a \cdot (+b) = +c$$

$$-a \cdot (-b) = +c$$

$$+a \cdot (-b) = -c$$

$$-a \cdot (+b) = -c$$

Division

$$\frac{+a}{+b} = +c$$

$$\frac{-a}{+b} = -c$$

$$\frac{+a}{-b} = -c$$

$$\frac{-a}{-b} = +c$$

$$\frac{+a}{+b} = +c$$

$$\frac{-a}{+b} = -c$$

$$\frac{+a}{-b} = -c$$

$$\frac{-a}{-b} = +c$$

Addition und Subtraktion

Bei gleichem Vorzeichen werden die Beträge addiert. Das Ergebnis erhält das gemeinsame Vorzeichen.

Bei verschiedenem Vorzeichen werden die Beträge subtrahiert. Das Ergebnis erhält das Vorzeichen der Zahl mit dem größeren Betrag.

Betrag einer Zahl

$$|x| = \begin{cases} x & x > 0 \\ -x & x < 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

1.1.8 Brüche

Bruch

Dividend : Divisor = Quotient

$$\frac{\text{Dividend}}{\text{Divisor}} = \frac{\text{Zähler}}{\text{Nenner}} = \frac{Z}{N} = \text{Wert des Bruchs}$$

Besondere Brüche

- Echter Bruch: Nenner größer als Zähler
- Unechter Bruch: Zähler größer als Nenner

- Gemischte Zahl: Ganze Zahl + Bruch
- Stammbrüche: Zähler ist 1
- Gleichnamige Brüche: Nenner ist gleich
- Ungleichnamige Brüche: Nenner ist verschieden
- Kehrwert: Zähler und Nenner vertauschen
- Scheinbrüche: Scheinbrüche sind natürliche Zahlen

Erweitern von Brüchen

Zähler und Nenner mit der gleichen Zahl multiplizieren

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c}$$

Kürzen von Brüchen

- Zähler und Nenner mit der gleichen Zahl dividieren

$$\frac{a}{b} = \frac{a : c}{b : c}$$

- Zähler und Nenner durch den ggT(Zähler;Nenner) teilen

$$ggT(a, b) = c$$

$$\frac{a}{b} = \frac{a : c}{b : c}$$

- Zähler und Nenner in Primfaktoren zerlegen und gleiche Primfaktoren kürzen

Addition und Subtraktion gleichnamiger Brüche

Zähler addieren bzw. subtrahieren

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

$$\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$$

Addition und Subtraktion ungleichnamiger Brüche

Brüche durch Erweitern gleichnamig machen

- Hauptnenner: Produkt der beiden Nenner

Erweiterungsfaktoren: d und b

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} + \frac{c \cdot b}{b \cdot d} = \frac{a \cdot d + c \cdot b}{b \cdot d}$$

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} - \frac{c \cdot b}{b \cdot d} = \frac{a \cdot d - c \cdot b}{b \cdot d}$$

- Hauptnenner: kgV(b,d)=c

Erweiterungsfaktoren: $\frac{c}{b}$ und $\frac{c}{d}$

Multiplikation von Brüchen

Zähler mal Zähler und Nenner mal Nenner

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

Division von Brüchen

Mit dem Kehrwert des Bruches multiplizieren

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

Bruch durch Zahl

$$\frac{a}{b} : e = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{e} = \frac{a}{b \cdot e}$$

Zahl durch Bruch

$$e : \frac{c}{d} = \frac{e}{1} \cdot \frac{d}{c} = \frac{e \cdot d}{c}$$

Doppelbruch

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

1.1.9 Dezimalbruch**Bruch - Dezimalbruch**

- Erweitern des Bruchs auf Zehntel, Hundertstel, Tausendstel usw. Werte in die Stellenwerttafel einsetzen.
- Schriftliches Dividieren

Dezimalbruch - Bruch

- Endlicher Dezimalbruch
Nachkommazahl (Dezimalen) als Zähler und im Nenner die entsprechende Stufenzahl (10, 100, 1000)
- Periodischer Dezimalbruch
- Periode beginnt direkt nach dem Komma
Nachkommazahl (Dezimalen) als Zähler und im Nenner den entsprechenden Bruch mit 9 (9, 99, 999)

Multiplizieren oder Dividieren mit Stufenzahl

Multiplizieren einer Dezimalzahl mit

- 10 - Komma um 1 Stelle nach rechts verschieben
- 100 - Komma um 2 Stellen nach rechts verschieben
- 1000 - Komma um 3 Stellen nach rechts verschieben

.....

Dividieren einer Dezimalzahl durch

- 10 - Komma um 1 Stelle nach links verschieben
- 100 - Komma um 2 Stellen nach links verschieben
- 1000 - Komma um 3 Stellen nach links verschieben

.....

Runden von Dezimalbrüchen

Ziffer der zu runden Stelle bestimmen.

- Ist die nachfolgende Ziffer 0,1,2,3,4, dann wird abgerundet. Die gerundete Stelle bleibt unverändert
- Ist die nachfolgende Ziffer 5,6,7,8,9, dann wird aufgerundet. Die gerundete Stelle wird um eins erhöht.
- Wenn nach dem Komma gerundet wird, werden die nachfolgenden Ziffern weggelassen.
- Wenn vor dem Komma gerundet wird, werden die nachfolgenden Ziffern durch Null ersetzt.

1.1.10 Bruchteile - Prozent - Promille**Bruchteile**

- Bruchteil (relativer Anteil) = $\frac{\text{absoluter Anteil}}{\text{Ganze}}$
- absoluter Anteil = Bruchteil · Ganze

$$\text{Ganze} = \frac{\text{absoluter Anteil}}{\text{Bruchteil}}$$

Prozent

$$\text{p}\% = \frac{p}{100} \quad \text{p Prozent} = \text{p Hundertstel}$$

$$\text{Prozentsatz} = \text{Bruchteil} \cdot 100\%$$

$$\text{Bruchteil} = \frac{\text{Prozentsatz}}{100\%}$$

p - Prozentzahl

p% - Prozentsatz

Promille

$$\text{p}\text{‰} = \frac{p}{1000} \quad \text{p Promille} = \text{p Tausendstel}$$

$$\text{Promillesatz} = \text{Bruchteil} \cdot 1000\text{‰}$$

$$\bullet \text{ Bruchteil} = \frac{\text{Promillesatz}}{1000\text{‰}}$$

p - Promillezahl

p‰ - Promillesatz

1.1.11 Prozentrechnung

Prozentrechnung

$$\bullet \text{ Verhältnisgleichung: } \frac{P_w}{p} = \frac{G}{100}$$

$$\bullet P_w = \frac{p \cdot G}{100} \quad P_w = p\% \cdot G$$

$$\bullet G = \frac{P_w \cdot 100}{p} \quad G = \frac{P_w}{p\%}$$

$$\bullet p = \frac{P_w \cdot 100}{G} \quad p\% = \frac{P_w}{G}$$

G - Grundwert

p - Prozentzahl

p‰ - Prozentsatz

P_w - Prozentwert

1.1.12 Promillerechnung

Promillerechnung

$$\bullet \text{ Verhältnisgleichung: } \frac{P_w}{p} = \frac{G}{1000}$$

$$\bullet P_w = \frac{p \cdot G}{1000} \quad P_w = p\text{‰} \cdot G$$

$$\bullet G = \frac{P_w \cdot 1000}{p} \quad G = \frac{P_w}{p\text{‰}}$$

$$\bullet p = \frac{P_w \cdot 1000}{G} \quad p\text{‰} = \frac{P_w}{G}$$

G - Grundwert

p - Promillezahl

p‰ - Promillesatz

P_w - Promillewert

1.1.13 Prozentuale Ab- und Zunahme

Prozentuale Ab- und Zunahme

• Endwert = Änderungsfaktor · Anfangswert

$$E = q \cdot A$$

$$\bullet q = \frac{E}{A}$$

$$\bullet A = \frac{E}{q}$$

• Prozentuale Zunahme $q > 1$

$$q = 1 + \frac{p}{100} \quad p = (q - 1) \cdot 100$$

Endwert = Anfangswert + Veränderung

• Prozentuale Abnahme $0 < q < 1$

$$q = 1 - \frac{p}{100} \quad p = (1 - q) \cdot 100$$

Endwert = Anfangswert - Veränderung

A - Anfangswert

E - Endwert

q - Änderungsfaktor

p - Prozentuale Zu- bzw. Abnahme

1.1.14 Potenzen

Definition

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n\text{-Faktoren}}$$

a = Basis n = Exponent

$$a^0 = 1 \quad a^1 = a$$

Basis: 10

$$10^0 = 1 \quad 10^1 = 10$$

Basis: e = 2,718.. (eulersche Zahl)

$$e^0 = 1 \quad e^1 = e$$

Potenzen multiplizieren

gleiche Basis - Exponenten addieren

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$10^m \cdot 10^n = 10^{m+n}$$

$$e^m \cdot e^n = e^{m+n}$$

Potenzen dividieren

gleiche Basis - Exponenten subtrahieren

$$a^m : a^n = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$10^m : 10^n = \frac{10^m}{10^n} = 10^{m-n}$$

$$e^m : e^n = \frac{e^m}{e^n} = e^{m-n}$$

Potenz ausklammern

gleicher Exponenten - Exponent ausklammern

$$a^n \cdot b^n = (ab)^n$$

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

Potenz in der Potenz

Exponenten multiplizieren

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

$$(10^n)^m = 10^{n \cdot m}$$

$$(e^n)^m = e^{n \cdot m}$$

Potenzen mit negativem Exponenten

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$10^{-n} = \frac{1}{10^n}$$

$$e^{-n} = \frac{1}{e^n}$$

Potenz - Wurzel

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \quad a > 0$$

$$10^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{10}$$

$$e^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{e}$$

Potenz mit rationalen Exponenten

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \quad a > 0$$

$$10^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{10^m}$$

$$e^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{e^m}$$

Potenzen mit rationalen (negativ) Exponenten

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} \quad a > 0$$

$$10^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{10^m}}$$

$$e^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{e^m}}$$

1.1.15 Wurzeln

Wurzel - Potenz

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

n - Wurzelexponent a - Radikand

$$\text{Quadratwurzel: } \sqrt{a}$$

$$\text{Kubikwurzel: } \sqrt[3]{a}$$

Wurzeln multiplizieren

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$

$$a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} = (ab)^{\frac{1}{n}}$$

gleiche Exponenten - Exponent ausklammern

Wurzeln dividieren

$$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

$$\frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}$$

gleiche Exponenten - Exponent ausklammern

Wurzel in der Wurzel

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$$

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{m \cdot n}}$$

Nenner rational machen

Wurzel (irrationale Zahl) aus dem Nenner entfernen

Erweitern des Bruchs mit der Wurzel

$$\frac{a}{b\sqrt{c}} = \frac{a\sqrt{c}}{b\sqrt{c}\sqrt{c}} = \frac{a\sqrt{c}}{b(\sqrt{c})^2} = \frac{a\sqrt{c}}{bc}$$

$$\frac{a}{b\sqrt{c+d}} = \frac{a\sqrt{c+d}}{b\sqrt{c+d}\sqrt{c+d}} = \frac{a\sqrt{c+d}}{b(\sqrt{c+d})^2} = \frac{a\sqrt{c+d}}{b(c+d)}$$

Erweitern mit der 3. Binomischen Formel

$$\frac{a}{b+\sqrt{c}} = \frac{a(b-\sqrt{c})}{(b+\sqrt{c})(b-\sqrt{c})} = \frac{a(b-\sqrt{c})}{b^2-(\sqrt{c})^2} = \frac{a(b-\sqrt{c})}{b^2-c}$$

1.1.16 Logarithmen

Definition

$$c = \log_b a \Leftrightarrow b^c = a$$

b = Basis a = Numerus

Basis: 10

$$\log_{10} x = \lg x$$

$$10^{\lg x} = x$$

$$\lg 10^x = x$$

Basis: e = 2,718.. (eulersche Zahl)

$$\log_e x = \ln x$$

$$e^{\ln x} = x$$

$$\ln e^x = x$$

Logarithmen addieren

$$\log_c a + \log_c b = \log_c(a \cdot b)$$

$$\lg a + \lg b = \lg(a \cdot b)$$

$$\ln a + \ln b = \ln(a \cdot b)$$

Logarithmen subtrahieren

$$\log_c a - \log_c b = \log_c \frac{a}{b}$$

$$\lg a - \lg b = \lg \frac{a}{b}$$

$$\ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b}$$

Logarithmus von der Potenz

$$\log_c a^n = n \log_c a$$

$$\log_a a^n = n \log_a a = n$$

$$\lg 10^n = n$$

$$\ln e^n = n$$

Basisumrechnung von Logarithmen

$$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b} = \frac{\lg a}{\lg b} = \frac{\ln a}{\ln b}$$

Logarithmus von der Wurzel

$$\log_c \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \log_c a$$

1.1.17 Proportionalität**Direkte Proportionalität**

y ist ein vielfaches von x

$$y = m \cdot x$$

Proportionalitätsfaktor: m

y ist direkt proportional zu x: $y \sim x$

Direkte Proportionalität = quotientengleich

Tabelle:

x_1	x_2	x_3	x_4	..
y_1	y_2	y_3	y_4	..

$$m = \frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \frac{y_3}{x_3} = \frac{y_4}{x_4} \dots$$

Funktionsgleichungen:

$$y = m \cdot x \quad x = \frac{y}{m} \quad m = \frac{y}{x}$$

Graph: Ursprungsgerade

Indirekte Proportionalität

y mal x ist konstant

$$k = y \cdot x$$

y ist indirekt proportional zu x: $y \sim \frac{1}{x}$

Indirekte Proportionalität = produktgleich

Tabelle:

x_1	x_2	x_3	x_4	..
y_1	y_2	y_3	y_4	..

$$k = y_1 \cdot x_1 = y_2 \cdot x_2 = y_3 \cdot x_3 = y_4 \cdot x_4 \dots$$

Funktionsgleichungen:

$$y = \frac{k}{x} \quad x = \frac{k}{y} \quad k = y \cdot x$$

Graph: Hyperbel

Dreisatz - Verhältnisgleichung

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} \quad \frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} \quad y_1 : x_1 = y_2 : x_2$$

$$y_1 \cdot x_2 = x_1 \cdot y_2$$

$$y_1 = \frac{y_2 \cdot x_1}{x_2} \quad y_2 = \frac{y_1 \cdot x_2}{x_1}$$

$$x_1 = \frac{x_2 \cdot y_1}{y_2} \quad x_2 = \frac{x_1 \cdot y_2}{y_1}$$

1.2 Terme

1.2.1 Grundlagen

Definition

Terme sind sinnvolle Verknüpfungen (+, -, ·, /) von Koeffizienten (Zahlen) und Variablen (Buchstaben: x, y, z, a..).

Eine Variable ist ein Platzhalter für eine Zahl.

Physikalische und geometrische Formeln sind Terme.

Terme können mit Hilfe des Kommutativgesetzes, Assoziativgesetzes und Distributivgesetzes umgeformt werden.

Schreibweisen

- Man darf das Malzeichen vor der Variablen und vor der Klammer weglassen.

$$a \cdot x = ax$$

$$a \cdot (x + b) = a(x + b)$$

- Den Faktor 1 vor einer Variablen kann man weglassen.

$$1 \cdot x = 1x = x$$

- Zahlen schreibt man vor die Variable

$$x \cdot a = ax$$

Termwert - Termname

Jedem Term kann man einen Namen zuweisen. In Klammern kann man die Variablen des Terms angeben.

Name(Variable 1, Variable 2...)=Term

Ersetzt man die Variablen eines Terms durch Zahlen, berechnet man den Wert des Terms.

1.2.2 Umformung von Termen

Addieren und Subtrahieren von Termen

Zwei Terme sind gleichartig, wenn sie aus den gleichen Variablen (Klammerausdrücke) mit den jeweiligen gleichen Exponenten bestehen. Gleichartige Terme kann man durch addieren (subtrahieren) der Koeffizienten zusammenfassen.

Multiplizieren und Dividieren von Termen

Die Zahlen multiplizieren (dividieren) und gleiche Variablen zusammenfassen (Potenzgesetze).

Addieren und Subtrahieren von Summentermen

- Vorzeichen vor Summenterm

$$+(a + b) = a + b \quad +(a - b) = a - b$$

$$-(a + b) = -a - b \quad -(a - b) = -a + b$$

- Summenterm und Summenterm

$$(a + b) + (c + d) = a + b + c + d$$

$$(a + b) - (c + d) = a + b - c - d$$

$$(a - b) - (c - d) = a - b - c + d$$

Multiplizieren von Summentermen - Ausmultiplizieren

Ein Produkt in eine Summe(Differenz) in umwandeln.

Jedes Glied mit jedem multiplizieren.

- Faktor mal Summenterm

$$c \cdot (a + b) = (a + b) \cdot c = ac + bc$$

- Summenterm mal Summenterm

$$(a + b) \cdot (c + d) = ac + ad + bc + bd$$

$$(a + b) \cdot (c + d + e) = ac + ad + ad + bc + bd + de$$

- 3 Faktoren

$$c \cdot (a + b) \cdot (d + e) = (ac + bc) \cdot (d + e) =$$

$$acd + ace + bcd + bce$$

$$(a + b) \cdot (c + d) \cdot (e + f) = (ac + ad + bc + bd) \cdot (e + f) =$$

$$ace + acf + ade + adf + bce + bcf + bde + bdf$$

1.2.3 Binomische Formel

1. Binomische Formel

$$(a + b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$$

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + a \cdot b + a \cdot b + b^2$$

$$(-a - b)^2 = (-1)^2(a + b)^2 = (a + b)^2$$

2. Binomische Formel

$$(a - b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2$$

$$(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - a \cdot b - a \cdot b + b^2$$

$$(-a + b)^2 = (-1)^2(a - b)^2 = (a - b)^2$$

3. Binomische Formel

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$$

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - a \cdot b + a \cdot b - b^2 = a^2 - b^2$$

Binomische Formel in der 3. Potenz

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Binomische Formel in der 4. Potenz

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

Binomische Formel mit höheren Potenzen

$$(a + b)^n = k_0 a^n b^0 + k_1 a^{n-1} b^1 + k_2 a^{n-2} b^2 + \dots + k_n a^0 b^n$$

Die Summe der Exponenten ist n.

$$n+0=n \quad n-1+1=n \quad n-2+2=n \dots$$

Koeffizienten($k_0, k_1..$) übers Pascal'sche Dreieck

$$\begin{array}{ccccccc}
 (a+b)^0 & & & & & & 1 \\
 (a+b)^1 & & & & 1 & & 1 \\
 (a+b)^2 & & & 1 & 2 & 1 & \\
 (a+b)^3 & & 1 & 3 & 3 & 1 & \\
 (a+b)^4 & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \\
 (a+b)^5 & 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\
 \dots & & & & & &
 \end{array}$$

oder über den binomischen Satz:

$$(a+b)^n =$$

$$\binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n}a^0 b^n$$

Binomialkoeffizient

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad n \text{ über } k$$

1.2.4 Faktorisieren - Ausklammern

Eine Summe(Differenz) in ein Produkt umwandeln.

- Ausklammern eines Faktors

$$ac + bc = c \cdot (a + b)$$

- Doppeltes Ausklammern

$$ac + ad + bc + bd = a \cdot (c + d) + b(c + d) =$$

$$(a + b) \cdot (c + d)$$

- Binomischen Formeln

$$a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 = (a + b)^2$$

$$a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 = (a - b)^2$$

$$a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$$

1.2.5 Quadratische Ergänzung

Maximalen oder minimalen Termwert bestimmen.

$$T(x) = ax^2 + bx + c$$

$$T(x) = a(x^2 + \frac{b}{a}x) + c$$

$$T(x) = a(x^2 + \frac{b}{a}x + (\frac{b}{2a})^2 - (\frac{b}{2a})^2) + c$$

$$T(x) = a[(x + \frac{b}{2a})^2 - (\frac{b}{2a})^2] + c$$

$$T(x) = a(x + \frac{b}{2a})^2 - a \cdot \frac{b^2}{4a^2} + c$$

$$T(x) = a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a} + c$$

oder

$$T(x) = ax^2 + bx + c$$

$$T(x) = a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a})$$

$$T(x) = a(x^2 + \frac{b}{a}x + (\frac{b}{2a})^2 - (\frac{b}{2a})^2 + \frac{c}{a})$$

$$T(x) = a[(x + \frac{b}{2a})^2 - (\frac{b}{2a})^2 + \frac{c}{a}]$$

$$T(x) = a(x + \frac{b}{2a})^2 - a \cdot \frac{b^2}{4a^2} + a \cdot \frac{c}{a}$$

$$T(x) = a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a} + c$$

$$a < 0$$

$$\text{Maximaler Termwert} = -\frac{b^2}{4 \cdot a} + c \text{ für } x = -\frac{b}{2 \cdot a}$$

$$a > 0$$

$$\text{Minimaler Termwert} = -\frac{b^2}{4 \cdot a} + c \text{ für } x = -\frac{b}{2 \cdot a}$$

1.2.6 Bruchterme

Definition und Definitionsbereich

Bei einem Bruchterm ist im Nenner eine Variable.

$$\frac{Z(x)}{N(x)}$$

$$N(x)$$

Die Nullstellen des Nenners müssen aus dem Definitionsbereich ausgeschlossen werden.

Nullstellen des Nenners bestimmen: $N(x) = 0$

Nullstellen aus den Definitionsbereich ausschließen:

$$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{x_1, x_2, \dots\}$$

Erweitern von Bruchtermen

Zähler und Nenner mit dem gleichen Term multiplizieren

$$\frac{a(x)}{b(x)} = \frac{a(x) \cdot c(x)}{b(x) \cdot c(x)}$$

$$\frac{a(x)}{b(x)} = \frac{a(x) \cdot c(x)}{b(x) \cdot c(x)}$$

Kürzen von Bruchtermen

Zähler und Nenner faktorisieren - gleiche Faktoren kürzen

$$\frac{a(x)}{b(x)} = \frac{a(x) : c(x)}{b(x) : c(x)}$$

$$\frac{a(x)}{b(x)} = \frac{a(x) : c(x)}{b(x) : c(x)}$$

Addition und Subtraktion gleichnamiger Bruchterme

Zähler addieren bzw. subtrahieren

$$\frac{a(x)}{c(x)} + \frac{b(x)}{c(x)} = \frac{a(x) + b(x)}{c(x)}$$

$$\frac{a(x)}{c(x)} - \frac{b(x)}{c(x)} = \frac{a(x) - b(x)}{c(x)}$$

Addition und Subtraktion ungleichnamiger Bruchterme

Brüche durch Erweitern gleichnamig machen

$$\frac{a(x)}{b(x)} + \frac{c(x)}{d(x)} = \frac{a(x) \cdot d(x)}{b(x) \cdot d(x)} + \frac{c(x) \cdot b(x)}{b(x) \cdot d(x)} = \frac{a(x) \cdot d(x) + c(x) \cdot b(x)}{b(x) \cdot d(x)}$$

$$\frac{a(x)}{b(x)} - \frac{c(x)}{d(x)} = \frac{a(x) \cdot d(x)}{b(x) \cdot d(x)} - \frac{c(x) \cdot b(x)}{b(x) \cdot d(x)} = \frac{a(x) \cdot d(x) - c(x) \cdot b(x)}{b(x) \cdot d(x)}$$

Multiplikation von Bruchtermen

Zähler mal Zähler und Nenner mal Nenner

$$\frac{a(x)}{b(x)} \cdot \frac{c(x)}{d(x)} = \frac{a(x) \cdot c(x)}{b(x) \cdot d(x)}$$

Division von Bruchtermen

Mit dem Kehrwert des Bruchterms multiplizieren

Bruchterm durch Bruchterm

$$\frac{a(x)}{b(x)} : \frac{c(x)}{d(x)} = \frac{a(x)}{b(x)} \cdot \frac{d(x)}{c(x)} = \frac{a(x) \cdot d(x)}{b(x) \cdot c(x)}$$

Bruch durch Term

$$\frac{\frac{a(x)}{b(x)}}{e(x)} = \frac{a(x)}{b(x)} : e(x) = \frac{a(x)}{b(x)} \cdot \frac{1}{e(x)} = \frac{a(x)}{b(x) \cdot e(x)}$$

Term durch Bruchterm

$$\frac{e(x)}{\frac{c(x)}{d(x)}} = e(x) : \frac{c(x)}{d(x)} = \frac{e(x)}{1} \cdot \frac{d(x)}{c(x)} = \frac{e(x) \cdot d(x)}{c(x)}$$

Doppelbruch

$$\frac{\frac{a(x)}{b(x)}}{\frac{c(x)}{d(x)}} = \frac{a(x)}{b(x)} : \frac{c(x)}{d(x)} = \frac{a(x)}{b(x)} \cdot \frac{d(x)}{c(x)} = \frac{a(x) \cdot d(x)}{b(x) \cdot c(x)}$$

1.2.7 Polynomdivision

Die Polynomdivision funktioniert ähnlich wie die schriftliche Division.

- Voraussetzung: Zählergrad \geq Nennergrad
- höchste Potenz des Zählers durch die höchste Potenz des Nenners teilen
- Nenner mit dem Ergebnis multiplizieren und abziehen
- höchste Potenz des Restpolynom durch die höchste Potenz des Nenners teilen usw.
- Wiederholen bis Zählergrad $<$ Nennergrad

1.3 Gleichungen

1.3.1 Grundlagen

Definition

Termwert der linken Seite $T_1(x)$ ist gleich dem Termwert der rechten Seite $T_2(x)$.

$$T_1(x) = T_2(x)$$

Äquivalenzumformung

Durch eine Äquivalenzumformung ändert sich die Lösungsmenge einer Gleichung nicht.

Äquivalenzumformungen von Gleichungen

- Vertauschen der beiden Seiten
- Addition des gleichen Terms (Zahl) auf beiden Seiten
- Subtraktion des gleichen Terms auf beiden Seiten
- Multiplikation mit dem gleichen Term (ungleich Null) auf beiden Seiten
- Division mit dem gleichen Term (ungleich Null) auf beiden Seiten

Quadrieren (Potenzieren mit einem geraden Exponenten) ist keine Äquivalenzumformung. Der berechnete Wert, muß durch das Einsetzen in die Ursprungsgleichung überprüft werden.

1.3.2 Lineare Gleichung

- Klammern auflösen
- Terme zusammenfassen
- Äquivalenzumformung: Alle Terme mit der Variablen auf die eine Seite und alle Terme ohne Variable auf die andere Seite.
- durch die Zahl vor der Variablen dividieren

$$a \cdot x = b$$

$$a \cdot x = b \quad / : a$$

$$x = \frac{b}{a}$$

$$x + a = b$$

$$x + a = b \quad / - a$$

$$x = b - a$$

$$a \cdot x + b = c$$

$$a \cdot x + b = c \quad / - b$$

$$a \cdot x = c - b \quad / : a$$

$$x = \frac{c - b}{a}$$

$$\frac{x}{a} = b$$

$$\frac{x}{a} = b \quad / \cdot a$$

$$x = b \cdot a$$

$$a - x = b$$

$$a - x = b \quad / - a$$

$$-x = b - a \quad / : (-1)$$

$$x = a - b$$

$$x - a = b$$

$$x - a = b \quad / + a$$

$$x = b + a$$

$$ax + b = cx + d \quad / - cx$$

$$ax - cx + b = d \quad / - b$$

$$(a - c)x = d - b \quad / : (a - c)$$

$$a - c \neq 0$$

$$x = \frac{d - b}{a - c}$$

1.3.3 Quadratische Gleichung

Umformen: $ax^2 + c = 0$

$$ax^2 + c = 0 \quad / - c$$

$$ax^2 = -c \quad / : a$$

$$x_{1/2} = \pm \sqrt{\frac{-c}{a}}$$

Diskriminante:

$$D = \frac{-c}{a}$$

$D = 0$ eine Lösung

$D > 0$ zwei Lösungen

$D < 0$ keine Lösung

Faktorisieren: $ax^2 + bx = 0$

$$ax^2 + bx = 0$$

$$x(ax + b) = 0$$

$$x_1 = 0 \quad \vee \quad x_2 = \frac{-b}{a}$$

Lösungsformel (Mitternachtsformel): $ax^2 + bx + c = 0$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

Diskriminante:

$$D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$$

$D = 0$ eine Lösung

$D > 0$ zwei Lösungen

$D < 0$ keine Lösung

p-q Formel: $x^2 + px + q = 0$

$$x^2 + px + q = 0$$

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Diskriminante:

$$D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$$

$D = 0$ eine Lösung

$D > 0$ zwei Lösungen

$D < 0$ keine Lösung

Satz von Vieta: $x^2 + px + q = 0$

$$x^2 + px + q = 0$$

x_1, x_2 sind die Lösungen der Gleichung

$$(x - x_1) \cdot (x - x_2) = 0$$

$$x^2 - x_2 \cdot x - x_1 \cdot x + x_1 \cdot x_2 = 0$$

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2 = 0$$

$$x_1 + x_2 = -p$$

$$x_1 \cdot x_2 = q$$

1.3.4 Kubische Gleichungen

Umformen: $ax^3 + b = 0$

$$ax^3 + b = 0$$

$$ax^3 + b = 0 \quad / -b$$

$$ax^3 = -b \quad / : a$$

$$x^3 = \frac{-b}{a}$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{-b}{a}}$$

$$\frac{-b}{a} > 0 \quad x = \sqrt[3]{\frac{-b}{a}}$$

$$\frac{-b}{a} < 0 \quad x = -\sqrt[3]{\left|\frac{-b}{a}\right|}$$

Faktorisieren: $ax^3 + bx = 0$

$$ax^3 + bx = 0$$

$$x(ax^2 + b) = 0$$

$$x_1 = 0 \quad \vee \quad (ax^2 + b) = 0$$

Faktorisieren: $ax^3 + bx^2 = 0$

$$ax^3 + bx^2 = 0$$

$$x^2(ax + b) = 0$$

$$x_{1/2} = 0 \quad \vee \quad (ax + b) = 0$$

Polynomdivision

$$ax^3 + bx^2 + d = 0$$

$$ax^3 + cx + d = 0$$

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

• Die ganzzahligen Faktoren von d in die Funktion einsetzen. Wird bei einem Faktor der Funktionswert Null, hat man eine Nullstelle x_0 gefunden.

• Wenn x_0 ein Nullstelle von f(x) ist, so ist f(x) durch $(x - x_0)$ ohne Rest teilbar.

• Mit dem Linearfaktor $(x - x_0)$ wird die Polynomdivision durchgeführt.

$$(ax^3 + bx^2 + cx + d) : (x - x_0) = fx^2 + dx + e$$

$$f(x) = (ax^3 + bx^2 + cx + d) = (x - x_0) \cdot (fx^2 + dx + e)$$

1.3.5 Gleichungen höheren Grades

Gerader Exponent: $ax^n + c = 0$

$$ax^n + c = 0 \quad / -c$$

$$ax^n = -c \quad / : a$$

$$x_{1/2} = \pm \sqrt[n]{\frac{-c}{a}}$$

Diskriminante:

$$D = \frac{-c}{a}$$

$D = 0$ eine Lösung

$D > 0$ zwei Lösungen

$D < 0$ keine Lösung

Ungerader Exponent: $ax^n + c = 0$

Umformen:

$$ax^n + b = 0$$

$$ax^n + b = 0 \quad / -b$$

$$ax^n = -b \quad / : a$$

$$x^n = \frac{-b}{a}$$

$$x = \sqrt[n]{\frac{-b}{a}}$$

$$\frac{-b}{a} > 0 \quad x = \sqrt[n]{\frac{-b}{a}}$$

$$\frac{-b}{a} < 0 \quad x = -\sqrt[n]{\left|\frac{-b}{a}\right|}$$

Biquadratische Gleichung

$$ax^4 + bx^2 + c = 0$$

$$\text{Substitution: } u = x^2 \quad u^2 = x^4$$

$$\text{Quadratische Gleichung: } au^2 + bu + c = 0$$

$$\text{Lösungen: } u_1 \quad u_2$$

$$\text{Resubstitution: } x^2 = u_1 \quad x^2 = u_2$$

1.3.6 Bruchgleichung**Überkreuzmultiplikation**

- Nullstellen des Nenners aus dem Definitionsbereich ausschließen.
- Das Produkt aus dem Zähler des linken Bruchs und dem Nenner des rechten Bruchs ist gleich dem Produkt aus dem Nenner des linken Bruchs und dem Zähler des rechten Bruchs.

- Gleichung lösen

- Lösungen müssen im Definitionsbereich enthalten sein.

$$\frac{a}{bx+c} = \frac{d}{ex+f} \quad a \cdot (ex+f) = d \cdot (bx+c)$$

Mit dem Hauptnenner durchmultiplizieren

- Nullstellen des Nenners aus dem Definitionsbereich ausschließen.
- Gleichung mit dem Hauptnenner durchmultiplizieren
- Gleichung lösen
- Lösungen müssen im Definitionsbereich enthalten sein.

1.3.7 Exponentialgleichungen

$$a \cdot b^{(cx+d)} + f = 0$$

$$a \cdot b^{(cx+d)} + f = 0$$

$$a \cdot b^{(cx+d)} + f = 0 \quad / -f$$

$$a \cdot b^{(cx+d)} = -f \quad / : a$$

$$b^{(cx+d)} = \frac{-f}{a} \quad / \log_b(\dots)$$

$$\frac{-f}{a} > 0 \Rightarrow$$

$$\log_b(b^{(cx+d)}) = \log_b\left(\frac{-f}{a}\right)$$

$$\text{Logarithmengesetz: } \log_b b^n = n \log_b b = n$$

$$(cx+d) \log_b(b) = \log_b\left(\frac{-f}{a}\right)$$

$$cx+d = \log_b\left(\frac{-f}{a}\right) \quad / -d \quad / : c$$

$$x = \frac{\log_b\left(\frac{-f}{a}\right) - d}{c}$$

$$\frac{-f}{a} \leq 0 \Rightarrow \text{keine Lösung}$$

1.3.8 Logarithmusgleichungen

$$a \log_b(cx+d) + f = 0$$

$$a \log_b(cx+d) + f = 0$$

$$a \log_b(cx+d) + f = 0 \quad / -f$$

$$a \log_b(cx+d) = -f \quad / : a$$

$$\log_b(cx+d) = \frac{-f}{a} \quad / b$$

$$b^{(\log_b(cx+d))} = b^{\left(\frac{-f}{a}\right)}$$

$$cx+d = b^{\left(\frac{-f}{a}\right)} \quad / -d \quad / : c$$

$$x = \frac{b^{\left(\frac{-f}{a}\right)} - d}{c}$$

$$\log_b x = 0$$

$$\log_b x = 0 \quad / b$$

$$x = b^0$$

$$x = 1$$

$$\lg x = 0 \quad / 10$$

$$x = 10^0$$

$$x = 1$$

$$\ln x = 0 \quad / e$$

$$x = e^0$$

$$x = 1$$

1.3.9 Betragsgleichung

$$|ax + b| = c$$

- Aufspalten der Beträge in einzelne Intervalle.

Betragsstriche sind nicht nötig, wenn der Term des Betrags positiv ist. $ax + b \geq 0$ für $x \geq \frac{-b}{a}$

Betragsstriche sind nicht nötig, wenn der Term des Betrags negativ ist und dafür zusätzlich ein Minuszeichen vor dem Term geschrieben wird. $ax + b < 0$ für $x < \frac{-b}{a}$

$$|ax + b| = \begin{cases} (ax + b) & x \geq \frac{-b}{a} \\ -(ax + b) & x < \frac{-b}{a} \end{cases}$$

- 1. Lösung für $x \geq \frac{-b}{a}$

$$ax + b = c$$

$$ax + b = c \quad / -b \quad / : a$$

$$x = \frac{c-b}{a}$$

- 1. Lösung ist die Schnittmenge aus $x \geq \frac{-b}{a} \wedge x = \frac{c-b}{a}$

- 2. Lösung für $x < \frac{-b}{a}$

$$-(ax + b) = c \quad / : (-1)$$

$$ax + b = -c$$

$$ax + b = -c \quad / -b \quad / : a$$

$$x = \frac{-c-b}{a}$$

- 2. Lösung ist die Schnittmenge aus $x < \frac{-b}{a} \wedge x = \frac{-c-b}{a}$

- Gesamtlösung aus Vereinigungsmenge von 1. Lösung und 2. Lösung

1.4 Ungleichungen

1.4.1 Grundlagen

Ungleichheitszeichen

$x < b$	kleiner als	weniger als
$x > b$	größer als	mehr als
$x \leq b$	kleiner oder gleich	höchstens
$x \geq b$	größer oder gleich	mindestens

Intervalle in der Mengenschreibweise

offenes Intervall

Intervall	Mengenschreibweise
$a < x < b$	$]a; b[= \{x \in \mathbb{R} a < x < b\}$
$x < b$	$] -\infty; b[= \{x \in \mathbb{R} x < b\}$
$x > a$	$]a; \infty[= \{x \in \mathbb{R} x > a\}$

halboffenes Intervall

Intervall	Mengenschreibweise
$a < x \leq b$	$]a; b] = \{x \in \mathbb{R} a < x \leq b\}$
$a \leq x < b$	$[a; b[= \{x \in \mathbb{R} a \leq x < b\}$
$x \leq b$	$] -\infty; b] = \{x \in \mathbb{R} x \leq b\}$
$x \geq a$	$[a; \infty[= \{x \in \mathbb{R} x \geq a\}$

abgeschlossenes Intervall

Intervall	Mengenschreibweise
$a \leq x \leq b$	$[a; b] = \{x \in \mathbb{R} a \leq x \leq b\}$

Schnittmenge \cap - und zugleich \wedge

$$a < b \quad \mathbb{G} = \mathbb{R}$$

Intervall		Mengen	
$x > a \wedge x > b$	$x > b$	$]a; \infty[\cap]b; \infty[$	$]b; \infty[$
$x < a \wedge x < b$	$x < a$	$] -\infty; a[\cap] -\infty; b[$	$] -\infty; a[$
$x > a \wedge x < b$	$a < x < b$	$]a; \infty[\cap] -\infty; b[$	$]a; b[$
$x < a \wedge x > b$	$\{\}$	$] -\infty; a[\cap]b; \infty[$	$\{\}$

Vereinigungsmenge \cup - oder auch \vee

$$a < b \quad \mathbb{G} = \mathbb{R}$$

Intervall		Mengen	
$x > a \vee x > b$	$x > a$	$]a; \infty[\cup]b; \infty[$	$]a; \infty[$
$x < a \vee x < b$	$x < b$	$] -\infty; a[\cup] -\infty; b[$	$] -\infty; b[$
$x > a \vee x < b$	$x \in \mathbb{R}$	$]a; \infty[\cup] -\infty; b[$	\mathbb{R}
$x < a \vee x > b$		$] -\infty; a[\cup]b; \infty[$	$\mathbb{R} \setminus [a; b]$

1.4.2 Äquivalenzumformung

Durch eine Äquivalenzumformung ändert sich die Lösungsmenge einer Ungleichung nicht. Äquivalenzumformungen von Ungleichungen

- **Vertauschen der beiden Seiten** \Rightarrow **Umdrehen des Ungleichheitszeichens**
- Addition des gleichen Terms (Zahl) auf beiden Seiten
- Subtraktion des gleichen Terms auf beiden Seiten
- Multiplikation mit dem gleichen Term (ungleich Null)
- **Multiplikation mit einer negativen Zahl** \Rightarrow **Umdrehen des Ungleichheitszeichens**
- Division durch mit dem gleichen Term (ungleich Null) auf beiden Seiten
- **Division mit einer negativen Zahl** \Rightarrow **Umdrehen des Ungleichheitszeichens**

1.4.3 Lineare Ungleichung

Algebraische Lösung

$$ax + b > 0 \quad (>, <, \leq, \geq)$$

- Klammern auflösen
- Terme zusammenfassen
- Äquivalenzumformung: Alle Terme mit der Variablen auf die linke Seite und alle Terme ohne Variable auf die rechte Seite.
- durch die Zahl vor der Variablen dividieren

Division oder Multiplikation mit einer negativen Zahl \Rightarrow **Umdrehen des Ungleichheitszeichens**

Graphische Lösung

$$ax + b > 0 \quad (>, <, \leq, \geq)$$

- Klammern auflösen
- Terme zusammenfassen
- Äquivalenzumformung: Alle Terme auf die linke Seite.
- Term als Funktion schreiben
- Nullstelle berechnen
- Graph der Funktion zeichnen
- Graph oberhalb der x-Achse $y > 0$
- Graph ist unterhalb der x-Achse $y < 0$
- x-Bereich aus dem Graphen ablesen

Vorzeichen-tabelle

$$ax + b > 0 \quad (>, <, \leq, \geq)$$

- Klammern auflösen
- Terme zusammenfassen

- Äquivalenzumformung: Alle Terme auf die linke Seite.
- Term als Funktion schreiben
- Nullstelle berechnen
- Vorzeichen-tabelle

Das Vorzeichen einer linearen Funktion kann sich nur an den Nullstellen ändern. Einen beliebigen Wert kleiner bzw. größer als die Nullstelle wählen und das Vorzeichen des Funktionswerts in die Vorzeichen-tabelle eintragen.

- x-Bereich aus der Vorzeichen-tabelle ablesen

	$x <$	x_1	$< x$
y	$+$	0	$-$
	$ax + b > 0$		$ax + b < 0$

	$x <$	x_1	$< x$
y	$-$	0	$+$
	$ax + b < 0$		$ax + b > 0$

1.4.4 Quadratische Ungleichung

Algebraische Lösung

$$ax^2 + bx + c > 0 \quad (>, <, \leq, \geq)$$

- 1. Methode
 - Ungleichung nach Null auflösen
 - quadratische Ergänzung
 - quadratischen Term alleinstellen
 - Wurzelziehen und Betrag schreiben
 - Betragsungleichung lösen

- 2. Methode
 - Ungleichung nach Null auflösen
 - Term faktorisieren

$$a(x - x_1)(x - x_2)$$

- Auspalten in lineare Ungleichungen

$$1. \text{ Fall} \quad a(x - x_1)(x - x_2) > 0$$

$$(+ \cdot + = +) \vee (- \cdot - = +)$$

$$(a(x - x_1) > 0 \wedge x - x_2 > 0) \vee$$

$$(a(x - x_1) < 0 \wedge x - x_2 < 0)$$

$$2. \text{ Fall} \quad a(x - x_1)(x - x_2) < 0$$

$$(+ \cdot - = -) \vee (- \cdot + = -)$$

$$(a(x - x_1) > 0 \wedge x - x_2 < 0) \vee$$

$$(a(x - x_1) < 0 \wedge x - x_2 > 0)$$

- Zusammenfassen der einzelnen Lösungen

Graphische Lösung

$$ax^2 + bx + c > 0 \quad (>, <, \leq, \geq)$$

- Äquivalenzumformung: Alle Terme auf die linke Seite.
- Term als Funktion schreiben
- Nullstelle berechnen
- Graph der Funktion zeichnen
- Graph oberhalb der x-Achse $f(x) > 0$
- Graph unterhalb der x-Achse $f(x) < 0$
- x-Bereich aus dem Graphen ablesen

Vorzeichentabelle

$$ax^2 + bx + c > 0 \quad (>, <, \leq, \geq)$$

- Äquivalenzumformung: Alle Terme auf die linke Seite.
- Term als Funktion schreiben
- Nullstelle berechnen
- Vorzeichentabelle

Das Vorzeichen einer quadratischen Funktion kann sich nur an den Nullstellen ändern. Einen beliebigen Wert kleiner bzw. größer als die Nullstelle wählen und das Vorzeichen des Funktionswerts in die Vorzeichentabelle eintragen.

- x-Bereich aus der Vorzeichentabelle ablesen

1.4.5 Betragsungleichung

$$|ax + b| > c$$

- Aufspalten der Beträge in einzelne Intervalle.

Betragsstriche sind nicht nötig, wenn der Term des Betrags positiv ist. $ax + b \geq 0$ für $x \geq \frac{-b}{a}$

Betragsstriche sind nicht nötig, wenn der Term des Betrags negativ ist und dafür zusätzlich ein Minuszeichen vor dem Term geschrieben wird. $ax + b < 0$ für $x < \frac{-b}{a}$

$$|ax + b| = \begin{cases} (ax + b) & x \geq \frac{-b}{a} \\ -(ax + b) & x < \frac{-b}{a} \end{cases}$$

- 1. Lösung für $x \geq \frac{-b}{a}$

$$ax + b > c$$

$$ax + b > c \quad / -b \quad / : a \quad (a > 0)$$

$$x > \frac{c-b}{a}$$

1. Lösung ist die Schnittmenge aus $x \geq \frac{-b}{a} \wedge x > \frac{c-b}{a}$

- 2. Lösung für $x < \frac{-b}{a}$

$$-(ax + b) > c \quad / : (-1)$$

$$ax + b < -c$$

$$ax + b < -c \quad / -b \quad / : a \quad (a > 0)$$

$$x < \frac{-c-b}{a}$$

2. Lösung ist die Schnittmenge aus $x < \frac{-b}{a} \wedge x < \frac{-c-b}{a}$

- Gesamtlösung aus Vereinigungsmenge von 1. Lösung und 2. Lösung

1.5 Lineares Gleichungssystem

1.5.1 Einsetzverfahren (2)

$$I \quad a1 \cdot x + b1 \cdot y = c1$$

$$II \quad a2 \cdot x + b2 \cdot y = c2$$

- Gleichung I oder II nach x oder y auflösen
- Term in die andere Gleichung einsetzen
- Gleichung nach der Unbekannten auflösen
- Zweite Unbekannte berechnen

1.5.2 Gleichsetzungsverfahren (2)

$$I \quad a1 \cdot x + b1 \cdot y = c1$$

$$II \quad a2 \cdot x + b2 \cdot y = c2$$

- beide Gleichungen nach x oder y auflösen
- Terme gleichsetzen
- Gleichung nach der Unbekannten auflösen
- Zweite Unbekannte berechnen

1.5.3 Additionsverfahren (2)

$$I \quad a1 \cdot x + b1 \cdot y = c1$$

$$II \quad a2 \cdot x + b2 \cdot y = c2$$

- Terme mit x und y müssen untereinander stehen
- Gleichungen multiplizieren, so dass die Variablen beim spaltenweisen addieren herausfallen
- Gleichung nach der Unbekannten auflösen
- Zweite Unbekannte berechnen

1.5.4 Determinantenverfahren (2)

$$I \quad a1 \cdot x + b1 \cdot y = c1$$

$$II \quad a2 \cdot x + b2 \cdot y = c2$$

$$D_h = \begin{vmatrix} a1 & b1 \\ a2 & b2 \end{vmatrix} = a1 \cdot b2 - b1 \cdot a2$$

$$D_x = \begin{vmatrix} c1 & b1 \\ c2 & b2 \end{vmatrix} = c1 \cdot b2 - b1 \cdot c2$$

$$D_y = \begin{vmatrix} a1 & c1 \\ a2 & c2 \end{vmatrix} = a1 \cdot c2 - c1 \cdot a2$$

- Eindeutige Lösung $D_h \neq 0$

$$x = \frac{D_x}{D_h}$$

$$y = \frac{D_y}{D_h}$$

- Keine Lösung $D_h = 0$

$$D_x \neq 0 \text{ oder } D_y \neq 0$$

- Unendlich viele Lösungen

$$D_h = D_x = D_y = 0$$

1.5.5 Determinantenverfahren (3)

$$a1x + b1y + c1z = d1$$

$$a2x + b2y + c2z = d2$$

$$a3x + b3y + c3z = d3$$

$$D_h = \begin{vmatrix} a1 & b1 & c1 \\ a2 & b2 & c2 \\ a3 & b3 & c3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a1 & b1 \\ a2 & b2 \\ a3 & b3 \end{vmatrix}$$

$$D_h = a1 \cdot b2 \cdot c3 + b1 \cdot c2 \cdot a3 + c1 \cdot a2 \cdot b3 - c1 \cdot b2 \cdot a3 - a1 \cdot c2 \cdot b3 - b1 \cdot a2 \cdot c3$$

$$D_x = \begin{vmatrix} d1 & b1 & c1 \\ d2 & b2 & c2 \\ d3 & b3 & c3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} d1 & b1 \\ d2 & b2 \\ d3 & b3 \end{vmatrix}$$

$$D_x = d1 \cdot b2 \cdot c3 + b1 \cdot c2 \cdot d3 + c1 \cdot d2 \cdot b3 - c1 \cdot b2 \cdot d3 - d1 \cdot c2 \cdot b3 - b1 \cdot d2 \cdot c3$$

$$D_y = \begin{vmatrix} a1 & d1 & c1 \\ a2 & d2 & c2 \\ a3 & d3 & c3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a1 & d1 \\ a2 & d2 \\ a3 & d3 \end{vmatrix}$$

$$D_y = a1 \cdot d2 \cdot c3 + d1 \cdot c2 \cdot a3 + c1 \cdot a2 \cdot d3 - c1 \cdot d2 \cdot a3 - a1 \cdot c2 \cdot d3 - d1 \cdot a2 \cdot c3$$

$$D_z = \begin{vmatrix} a1 & b1 & d1 \\ a2 & b2 & d2 \\ a3 & b3 & d3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a1 & b1 \\ a2 & b2 \\ a3 & b3 \end{vmatrix}$$

$$D_z = a1 \cdot b2 \cdot d3 + b1 \cdot d2 \cdot a3 + d1 \cdot a2 \cdot b3$$

$$-d1 \cdot b2 \cdot a3 - a1 \cdot d2 \cdot b3 - b1 \cdot a2 \cdot d3 = 0$$

- Eindeutige Lösung $D_h \neq 0$

$$x = \frac{D_x}{D_h}$$

$$y = \frac{D_y}{D_h}$$

$$z = \frac{D_z}{D_h}$$

- Keine Lösung $D_h = 0$

$$D_x \neq 0 \text{ oder } D_y \neq 0 \text{ oder } D_z \neq 0$$

- Unendlich viele Lösungen

$$D_h = D_x = D_y = D_z = 0$$

1.6 Lineare Algebra

1.6.1 Matrix

Definition

Eine $m \times n$ -Matrix ist ein rechteckiges Zahlenschema aus m Zeilen und n Spalten.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$A = (a_{ik})$$

a_{ik} : Elemente der Matrix

i : Zeilenindex

k : Spaltenindex

- Quadratische Matrix

Die Anzahl der Zeilen ist gleich der Anzahl der Spalten $m = n$.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Besondere Matrizen

- Einheitsmatrix

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Transponierte Matrix

Vertauschen von Zeilen- und Spaltenindex.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$A = (A^T)^T$$

Addition von Matrizen

Summe der Matrix $A = (a_{ik})$ und der Matrix $B = (b_{ik})$

Die Anzahl der Spalten (i) und der Zeilen(k) der beiden Matrizen müssen gleich sein.

$$A + B = a_{ik} + b_{ik}$$

- Summe 2×2 Matrix

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{bmatrix}$$

• Summe 3×3 Matrix

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} \\ a_{31} + b_{31} & a_{32} + b_{32} & a_{33} + a_{33} \end{bmatrix}$$

Multiplikation von Matrizen

• Produkt aus der Matrix $A = (a_{ik})$ mit einer Konstanten $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\lambda A = \lambda a_{ik}$$

2×2 Matrix

$$\lambda \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \end{bmatrix}$$

• Produkt aus Matrix $A = (a_{ij})$ und Matrix $B = (b_{jk})$

Anzahl der Zeilen von A muß gleich der Anzahl der Spalten von B sein.
 Zeilenelemente von A mal Spaltenelemente von B.

• Produkt zweier 2×2 Matrizen

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} & a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} \\ a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} & a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} \end{bmatrix}$$

Inverse Matrix

• Produkt aus der Matrix A und der inversen Matrix A^{-1} ist gleich der Einheitsmatrix.

$$AA^{-1} = E$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

• Die inverse Matrix ist nur möglich, wenn die Determinante von A ungleich Null ist.

$\det A \neq 0$

• Berechnung von A^{-1} mit dem Gauß-Jordan-Algorithmus

Matrix A und Einheitsmatrix E in der Form schreiben

$$\begin{array}{cc|cc} & A & & E \\ a_{11} & a_{12} & 1 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 1 \end{array}$$

Umformen durch:

- Multiplizieren oder Dividieren der Zeilen mit einer Zahl
- Addieren oder Subtrahieren der Zeilen
- Vertauschen der Zeilen

in die Form Einheitsmatrix und inverse Matrix A^{-1}

$$\begin{array}{cc|cc} & E & & A^{-1} \\ 1 & 0 & x_{11} & x_{12} \\ 0 & 1 & x_{21} & x_{22} \end{array}$$

Eigenwert und Eigenvektor

Gegeben: A - Matrix

Gesucht: x - Eigenvektor (Spaltenvektor)

λ - Eigenwert

Das Produkt aus Matrix A und Eigenvektor x ist gleich dem Produkt aus Eigenwert λ und Eigenvektor x.

$$Ax = \lambda x$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix}$$

• Eigenwert aus folgender Gleichung:

$$\det(A - \lambda \cdot E) = 0$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$\left| \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\left| \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$(a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}a_{21} = 0$$

charakteristisches Polynom

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22}) \cdot \lambda + a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12} = 0$$

• Eigenvektoren durch einsetzen der λ -Werte

$$(A - \lambda E)x = 0$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 = \lambda \cdot x_1$$

$$a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 = \lambda \cdot x_2$$

1.6.2 Determinante

Definiton

Aus quadratischen Matrix kann eine Determinante (Zahlenwert) berechnet werden.

$$D = \det A = |A|$$

Anwendung der Determinante:

- Lineare Gleichungssysteme
- Volumenberechnung im R3
- Flächenberechnungen im R2
- Spatprodukt
- Lineare Abhängigkeit von Vektoren - inverse Matrix

2-reihige Determinante

Determinante einer 2×2 Matrix

$$D = \det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$$

3-reihige Determinante

Determinante einer 3×3 Matrix

Methode 1

$$D = \det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}(a_{22} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a_{32}) - a_{12}(a_{21} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a_{31}) + a_{13}(a_{21} \cdot a_{32} - a_{22} \cdot a_{31})$$

Methode 2 (Regel von Sarrus)

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$D = a_1 \cdot b_2 \cdot c_3 + b_1 \cdot c_2 \cdot a_3 + c_1 \cdot a_2 \cdot b_3 - c_1 \cdot b_2 \cdot a_3 - a_1 \cdot c_2 \cdot b_3 - b_1 \cdot a_2 \cdot c_3$$

1.6.3 Lineare Gleichungssysteme und Gauß-Algorithmus

Lineare Gleichungssysteme in Matrixschreibweise

$$Ax = b \quad x = A^{-1}b$$

- A Koeffizientenmatrix
- b Spaltenvektor der rechten Seite
- x Lösungsvektor

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Inhomogenes Gleichungssystem

$$a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \cdots + a_{1n} \cdot x_n = b_1$$

$$a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \cdots + a_{2n} \cdot x_n = b_2$$

\vdots

$$a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \cdots + a_{mn} \cdot x_n = b_m$$

Homogenes Gleichungssystem

$$a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \cdots + a_{1n} \cdot x_n = 0$$

$$a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \cdots + a_{2n} \cdot x_n = 0$$

\vdots

$$a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \cdots + a_{mn} \cdot x_n = 0$$

Variablen: x_1, x_2, x_3

$$a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + a_{13} \cdot x_3 = b_1$$

$$a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + a_{23} \cdot x_3 = b_2$$

$$a_{31} \cdot x_1 + a_{32} \cdot x_2 + a_{33} \cdot x_3 = b_m$$

oder in der Schreibweise mit den Variablen: x, y, z

$$a1 \cdot x + b1 \cdot y + c1 \cdot z = d1$$

$$a2 \cdot x + b2 \cdot y + c2 \cdot z = d2$$

$$a3 \cdot x + b3 \cdot y + c3 \cdot z = d3$$

Erweiterte Koeffizientenmatrix

x	y	z	$ $	d
$a1$	$b1$	$c1$	$ $	$d1$
$a2$	$b2$	$c2$	$ $	$d2$
$a3$	$b3$	$c3$	$ $	$d3$

Gaußsches Eliminationsverfahren

$$a1 \cdot x + b1 \cdot y + c1 \cdot z = d1$$

$$a2 \cdot x + b2 \cdot y + c2 \cdot z = d2$$

$$a3 \cdot x + b3 \cdot y + c3 \cdot z = d3$$

Koeffizientenmatrix erstellen:

$$\begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ \hline a1 & b1 & c1 & d1 \\ a2 & b2 & c2 & d2 \\ a3 & b3 & c3 & d3 \\ \hline x & y & z & \\ \hline \text{Zeile1Spalte1} & z1s2 & z1s3 & z1s4 \\ & z2s1 & z2s2 & z2s3 & z2s4 \\ & z3s1 & z3s2 & z3s3 & z3s4 \end{array}$$

Die Lösungsmenge ändert sich nicht durch:

- Multiplizieren oder Dividieren der Zeilen mit einer Zahl
- Addieren oder Subtrahieren der Zeilen
- Vertauschen der Zeilen

Umformen in die Stufenform

- Eindeutige Lösung

$$\begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ \hline Z1S1 & z1s2 & z1s3 & z1s4 \\ & 0 & z2s2 & z2s3 & z2s4 \\ & 0 & 0 & z3s3 & z3s4 \end{array}$$

Rückwärtseinsetzen

$$z = \frac{z3s3}{z3s4}$$

z in die 2. Zeile einsetzen \Rightarrow y

z und y in die 1. Zeile einsetzen \Rightarrow x

- Keine Lösung

$$\begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ \hline Z1S1 & z1s2 & z1s3 & z1s4 \\ & 0 & z2s2 & z2s3 & z2s4 \\ & 0 & 0 & 0 & z3s4 \end{array}$$

- Unendlich viele Lösungen

$$\begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ \hline Z1S1 & z1s2 & z1s3 & z1s4 \\ & 0 & z2s2 & z2s3 & z2s4 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Gauß-Jordan-Algorithmus

$$a1 \cdot x + b1 \cdot y + c1 \cdot z = d1$$

$$a2 \cdot x + b2 \cdot y + c2 \cdot z = d2$$

$$a3 \cdot x + b3 \cdot y + c3 \cdot z = d3$$

Koeffizientenmatrix erstellen:

$$\begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ \hline a1 & b1 & c1 & d1 \\ a2 & b2 & c2 & d2 \\ a3 & b3 & c3 & d3 \\ \hline x & y & z & \\ \hline \text{Zeile1Spalte1} & z1s2 & z1s3 & z1s4 \\ & z2s1 & z2s2 & z2s3 & z2s4 \\ & z3s1 & z3s2 & z3s3 & z3s4 \end{array}$$

Die Lösungsmenge ändert sich nicht durch:

- Multiplizieren oder Dividieren der Zeilen mit einer Zahl
- Addieren oder Subtrahieren der Zeilen
- Vertauschen der Zeilen

Ziel ist das Umformen in die Diagonalenform

- Eindeutige Lösung

$$\begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ \hline z1s1 & 0 & 0 & z1s4 \\ & 0 & z2s3 & 0 & z2s4 \\ & 0 & 0 & z3s3 & z3s4 \end{array}$$

$$x = \frac{z1s4}{z1s1}$$

$$y = \frac{z2s4}{z2s3}$$

$$z = \frac{z3s3}{z3s4}$$

- Keine Lösung

$$\begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ \hline z1s1 & 0 & 0 & z1s4 \\ & 0 & z2s3 & 0 & z2s4 \\ & 0 & 0 & 0 & z3s4 \end{array}$$

- Unendlich viele Lösungen

$$\begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ \hline z1s1 & 0 & 0 & z1s4 \\ & 0 & z2s3 & 0 & z2s4 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

1.7 Finanzmathematik

1.7.1 Zinsrechnung - Jahreszins

$$z = \frac{K \cdot p \cdot t}{100}$$

1.7.2 Zinsrechnung - Tageszins

$$z = \frac{K \cdot p \cdot t}{100 \cdot 360}$$

1.7.3 Zinsrechnung - Monatszins

$$z = \frac{K \cdot p \cdot t}{100 \cdot 12}$$

1.7.4 Zinsfaktor

$$q = 1 + \frac{p}{100}$$

1.7.5 Zinseszinsformel

$$K_t = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^t$$

1.7.6 Degressive Abschreibung

$$B_t = B_0 \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)^t$$

2 Geometrie

2.1 Grundlagen

2.1.1 Definitionen

Strecke $[AB]$

Gerade Linie die durch 2 Endpunkte begrenzt wird

Länge einer Strecke AB

Entfernung zwischen den Punkten A und B

Gerade AB

Unbegrenzte gerade Linie durch 2 Punkte

Halbgerade - Strahl $[AB$

Einseitig begrenzte gerade Linie

Winkel

Zwei von einem Punkt (Scheitel) ausgehenden Halbgeraden (Schenkel) schließen einen Winkel ein.

$$\alpha = \angle ABC$$

Drehsinn entgegen dem Uhrzeigersinn = positiver Winkel

Drehsinn im Uhrzeigersinn = negativer Winkel

spitzer Winkel: $0^\circ < \alpha < 90^\circ$

rechter Winkel: $\alpha = 90^\circ$

stumpfer Winkel: $90^\circ < \alpha < 180^\circ$

gestreckter Winkel: $\alpha = 180^\circ$

überstumpfer Winkel: $180^\circ < \alpha < 360^\circ$

Vollwinkel: $\alpha = 360^\circ$

Winkel an sich schneidenden Geraden

Scheitelwinkel (Gegenwinkel) sind gleich groß.

Nebenwinkel ergänzen sich zu 180° .

Winkel an parallelen Geraden

Stufenwinkel (F-Winkel) und Wechselwinkel (Z-Winkel) sind gleich groß. Nachbarwinkel (E-Winkel) ergänzen sich zu 180° .

2.1.2 Strahlensätze

$$\overline{AB} \parallel \overline{A'B'} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\overline{ZA'}}{\overline{ZA}} = \frac{\overline{ZB'}}{\overline{ZB}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$$

$$\frac{\overline{ZA}}{\overline{AA'}} = \frac{\overline{ZB}}{\overline{BB'}}$$

2.2 Dreieck

2.2.1 Definitionen und Eigenschaften des Dreiecks

Winkel- und Seitenbeziehungen

- Innenwinkelsumme: $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$
- Außenwinkelsumme: $\alpha' + \beta' + \gamma' = 360^\circ$
 $\gamma' = \alpha + \beta; \beta' = \alpha + \gamma; \alpha' = \beta + \gamma;$
- Dreiecksungleichung:
 Die Summe zweier Dreiecksseiten ist größer als die dritte Seite.
 $a + b > c \quad a + c > b \quad b + c > a$
- Der längeren von zwei Seiten liegt der größere Winkel gegenüber.
 $a > b \Rightarrow \alpha > \beta \quad a < b \Rightarrow \alpha < \beta$
 $a > c \Rightarrow \alpha > \gamma \quad a < c \Rightarrow \alpha < \gamma$
 $b > c \Rightarrow \beta > \gamma \quad b < c \Rightarrow \beta < \gamma$
- Gleichlangen Seiten liegen gleiche Winkel gegenüber.
 $a = b \Rightarrow \alpha = \beta$
 $a = c \Rightarrow \alpha = \gamma$
 $b = c \Rightarrow \beta = \gamma$

Höhe

Das Lot von einem Eckpunkt des Dreiecks auf die gegenüberliegende Dreiecksseite. Höhen schneiden sich im Höhenschnittpunkt.

$$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h_b$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$$

$$h_a = c \cdot \sin \beta$$

$$h_b = a \cdot \sin \gamma$$

$$h_c = b \cdot \sin \alpha$$

Winkelhalbierende

Alle Punkte auf einer Winkelhalbierenden haben zu den Schenkeln den gleichen Abstand. Die Winkelhalbierenden schneiden sich im Inkreismittelpunkt. Der Inkreismittelpunkt hat von den drei Seiten des Dreiecks den gleichen Abstand.

Inkreisradius:

$$\rho = r_i = \frac{2 \cdot A}{U} = \frac{2 \cdot A}{a + b + c}$$

$$\delta_1 = 180^\circ - \beta - \frac{\alpha}{2} \quad w_\alpha = \frac{c \cdot \sin \beta}{\sin \delta_1}$$

$$\delta_2 = 180^\circ - \frac{\beta}{2} - \gamma \quad w_\beta = \frac{a \cdot \sin \gamma}{\sin \delta_2}$$

$$\delta_3 = 180^\circ - \alpha - \frac{\gamma}{2} \quad w_\gamma = \frac{b \cdot \sin \alpha}{\sin \delta_3}$$

Seitenhalbierende

Strecke vom einem Eckpunkt des Dreiecks zum Mittelpunkt der gegenüberliegenden Seite. Die Seitenhalbierenden schneiden sich im Schwerpunkt. Der Schwerpunkt teilt die Seitenhalbierenden im Verhältnis 2:1.

$$s_a = \frac{1}{2} \sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}$$

$$s_b = \frac{1}{2} \sqrt{2(a^2 + c^2) - b^2}$$

$$s_c = \frac{1}{2} \sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2}$$

Mittelsenkrechte

Alle Punkte auf einer Mittelsenkrechte haben von zwei Eckpunkten die gleiche Entfernung. Die Mittelsenkrechten schneiden sich im Umkreismittelpunkt. Der Umkreismittelpunkt hat von den drei Eckpunkten des Dreiecks die gleiche Entfernung.

$$\text{Umkreisradius: } r_u = \frac{a}{2 \cdot \sin \alpha} = \frac{b}{2 \cdot \sin \beta} = \frac{c}{2 \cdot \sin \gamma}$$

2.2.2 Kongruenzsätze

Seite - Seite - Seite (SSS)

Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in den drei Seiten übereinstimmen.

Seite	Seite	Seite
a	b	c

Seite - Winkel - Seite (SWS)

Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen.

Seite	Winkel	Seite
a	β	c
a	γ	b
b	α	c

Winkel - Seite - Winkel (WSW, WWS)

Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in zwei Winkeln und einer Seite übereinstimmen.

Winkel	Seite	Winkel	Winkel	Winkel	Seite
α	c	β	α	β	a
α	b	γ	α	β	b
β	a	γ	α	γ	a
			α	γ	c
			β	γ	b
			β	γ	c

Seite - Seite - Winkel (SsW)

Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in zwei Seiten und dem der längeren Seite gegenüber liegenden Winkel (Gegenwinkel) übereinstimmen.

Seite	Seite	Winkel	
a	b	α	a>b
a	b	β	b>a
a	c	α	a>c
a	c	γ	c>a
b	c	β	b>c
b	c	γ	c>b

2.2.3 Pythagoras - Höhensatz - Kathetensatz

Pythagoras

Die Katheten sind die am rechten Winkel anliegenden Seiten. Die Hypotenuse liegt dem rechten Winkel gegenüber.

- Die Summe der Kathetenquadrate ist gleich dem Hypotenusenquadrat.

für $\gamma = 90^\circ$ Katheten a und b Hypotenuse c

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Kathetensatz

Die Höhe h teilt die Hypotenuse in zwei Hypotenusenabschnitte.

- Die Kathete im Quadrat ist gleich dem Produkt aus dem zugehörigen Hypotenusenabschnitt und der Hypotenuse.

für $\gamma = 90^\circ$ $c = p + q$
 Katheten a und b Hypotenuse c
 Hypotenusenabschnitt p und q
 $a^2 = c \cdot p$ $b^2 = c \cdot q$

Höhensatz

Die Höhe h teilt die Hypotenuse in zwei Hypotenusenabschnitte.

- Die Höhe im Quadrat ist gleich dem Produkt der Hypotenusenabschnitte.

für $\gamma = 90^\circ$ $c = p + q$
 Hypotenusenabschnitte p und q

$$h^2 = p \cdot q$$

2.2.4 Allgemeines Dreieck

$$A = \frac{g \cdot h}{2}$$
$$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin(\gamma)$$
$$U = a + b + c$$

2.2.5 Gleichseitiges Dreieck

$$A = \frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{3}$$
$$h = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{3}$$

2.2.6 Gleichschenkliges Dreieck

Basiswinkel sind gleich $\alpha = \beta$
Schenkel sind gleich lang $a = b$

2.2.7 Rechtwinkliges Dreieck

$$A = \frac{a \cdot b}{2}$$

Phytagoras: $a^2 + b^2 = c^2$
Höhensatz: $h^2 = p \cdot q$
Kathetensatz: $a^2 = c \cdot p$ $b^2 = c \cdot q$

2.3 Viereck

2.3.1 Quadrat

$$A = a^2$$
$$U = 4 \cdot a$$
$$d = a \cdot \sqrt{2}$$

2.3.2 Rechteck

$$A = a \cdot b$$
$$U = 2 \cdot a + 2 \cdot b$$
$$d = \sqrt{a^2 + b^2}$$

2.3.3 Trapez

$$A = \frac{a+c}{2} \cdot h$$

2.3.4 Parallelogramm

$$A = g \cdot h$$

2.3.5 Raute

$$A = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f$$

2.3.6 Drachen

$$A = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f$$

2.4 Polygone (n-Ecken)

2.4.1 Regelmäßiges n-Eck

Seitenlänge n-Eck: $a = 2 \cdot r \sin \frac{\mu}{2}$

Mittelpunktswinkel: $\mu = \frac{360^\circ}{n}$

Innenwinkel: $\alpha = 180^\circ - \mu$

Fläche: $A = n \cdot A_D = \frac{n}{2} \cdot r^2 \cdot \sin \mu$

2.4.2 Sechseck

$$A = \frac{3 \cdot a^2}{2} \cdot \sqrt{3}$$

$$\rho = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{3}$$

2.5 Kreis

2.5.1 Kreis

$$d = 2 \cdot r$$

$$A = r^2 \cdot \pi$$

$$U = 2 \cdot r \cdot \pi$$

2.5.2 Kreissektor (Grad)

$$A = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot \alpha}{360}$$

$$b = \frac{2 \cdot r \cdot \pi \cdot \alpha}{360}$$

2.5.3 Kreissektor (Bogenmaß)

$$A = \frac{r^2 \cdot x}{2}$$

$$b = r \cdot x$$

2.5.4 Kreisring

$$A = (r_a^2 - r_i^2) \cdot \pi$$

2.6 Stereometrie

2.6.1 Prisma

$$V = G \cdot h$$

$$O = 2 \cdot G + M$$

2.6.2 Würfel

$$V = a^3$$

$$O = 6 \cdot a^2$$

$$d = a \cdot \sqrt{3}$$

2.6.3 Quader

$$V = a \cdot b \cdot c$$

$$O = 2 \cdot (a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c)$$

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

2.6.4 Pyramide

Volumen

$$V = \frac{1}{3} G \cdot h$$

Oberfläche

$$O = G + M$$

Quadratische Pyramide

$$\text{Pythagoras im } \triangle ABC \quad d^2 = a^2 + a^2 \quad d = a\sqrt{2}$$

$$\text{Pythagoras im } \triangle LMS \quad h_1^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2$$

$$\text{Pythagoras im } \triangle ALS \quad s^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 + h^2$$

$$\text{Mantelfläche} \quad M = 4 \cdot \frac{1}{2} a \cdot h_1$$

$$\text{Grundfläche} \quad G = a^2$$

$$\text{Oberfläche} \quad O = G + M$$

$$\text{Volumen} \quad V = \frac{1}{3} G \cdot h \quad V = \frac{1}{3} a^2 \cdot h$$

$$\text{Winkel zwischen der Seitenkante und der Grundfläche} \quad \angle CAS \quad \tan \eta = \frac{h}{\frac{1}{2}d}$$

$$\text{Winkel zwischen der Seitenfläche } \triangle BCS \text{ und der Grundfläche} \\ \angle SML \quad \tan \epsilon = \frac{h}{\frac{1}{2}a}$$

Rechteckige Pyramide

$$\text{Pythagoras im } \triangle ABC \quad d^2 = a^2 + b^2$$

$$\text{Pythagoras im } \triangle LM_1S \quad h_1^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2$$

$$\text{Pythagoras im } \triangle LM_2S \quad h_2^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + h^2$$

$$\text{Pythagoras im } \triangle ALS \quad s^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 + h^2$$

$$\text{Mantelfläche} \quad M = 2 \cdot \frac{1}{2} a \cdot h_2 + 2 \cdot \frac{1}{2} b \cdot h_1$$

$$\text{Grundfläche} \quad G = a \cdot b$$

$$\text{Oberfläche} \quad O = G + M$$

$$\text{Volumen} \quad V = \frac{1}{3} G \cdot h \quad V = \frac{1}{3} a \cdot b \cdot h$$

Winkel zwischen der Seitenkante und der Grundfläche

$$\angle CAS \quad \tan \eta = \frac{h}{\frac{1}{2}d}$$

Winkel zwischen der Seitenfläche $\triangle BCS$ und der Grundfläche

$$\angle SM_1L \quad \tan \epsilon = \frac{h}{\frac{1}{2}a}$$

Winkel zwischen der Seitenfläche $\triangle ABC$ und der Grundfläche

$$\angle SM_2L \quad \tan \mu = \frac{h}{\frac{1}{2}b}$$

2.6.5 Kreiszyylinder

$$V = r^2 \cdot \pi \cdot h$$

$$O = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot (r + h)$$

2.6.6 Hohlzylinder

$$V = (r_1^2 - r_2^2) \cdot \pi \cdot h$$

2.6.7 Kreiskegel

$$V = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot h$$

$$O = r \cdot \pi \cdot (r + s)$$

$$s = \sqrt{h^2 + r^2}$$

2.6.8 Kegelstumpf

Kegelstumpf

Strahlensatz

$\frac{h_2}{h_1} = \frac{r_2}{r_1}$	$\frac{s_2}{s_1} = \frac{r_2}{r_1}$
$h_1 = h_2 + h$	$s_1 = s_2 + s$
$\frac{h_2}{h_2 + h} = \frac{r_2}{r_1}$	$\frac{s_2}{s_2 + s} = \frac{r_2}{r_1}$
$h_2 \cdot r_1 = r_2 \cdot (h_2 + h)$	$s_2 \cdot r_1 = r_2 \cdot (s_2 + s)$
$h_2 \cdot r_1 = r_2 \cdot h_2 + r_2 \cdot h$	$s_2 \cdot r_1 = r_2 \cdot s_2 + r_2 \cdot s$
$h_2 \cdot r_1 - r_2 \cdot h_2 = r_2 \cdot h$	$s_2 \cdot r_1 - r_2 \cdot s_2 = r_2 \cdot s$
$h_2 \cdot (r_1 - r_2) = r_2 \cdot h$	$s_2 \cdot (r_1 - r_2) = r_2 \cdot s$
$h_2 = \frac{r_2 \cdot h}{r_1 - r_2}$	$s_2 = \frac{r_2 \cdot s}{r_1 - r_2}$
$h_1 = h_2 + h$	$s_1 = s_2 + s$

Pythagoras

$$s_2^2 = r_2^2 + h_2^2 \quad s_1^2 = r_1^2 + h_1^2$$

Mantelfläche $M = r_1 \cdot \pi \cdot s_1 - r_2 \cdot \pi \cdot s_2$
 Grund- und Deckfläche $G = r_1^2 \pi \quad D = r_2^2 \pi$
 Oberfläche $O = G + D + M$
 Volumen $V = \frac{1}{3} r_1^2 \cdot \pi \cdot h_1 - \frac{1}{3} r_2^2 \cdot \pi \cdot h_2$

2.6.9 Kugel

$$V = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi$$

$$O = 4 \cdot r^2 \cdot \pi$$

2.7 Trigonometrie

2.7.1 Gradmaß - Bogenmaß

Definiton Bogenmaß

Das Bogenmaß des Winkels x (rad), ist die Länge des Kreisbogens b durch Radius r .

$$x = \frac{b}{r}$$

Ist der Radius $r=1$ (Einheitskreis), ist das Bogenmaß des Winkels x (rad) die Länge des Kreisbogens b .

$$x = b$$

Umrechnung Gradmaß - Bogenmaß

$$\alpha = \frac{180}{\pi} \cdot x$$

$$x = \frac{\pi}{180} \cdot \alpha$$

Kreiszahl π
 α in Gradmaß $[^\circ]$
 x in Bogemaß $[rad]$

2.7.2 Definition

Definition

Punkt auf dem Einheitskreis:

$$P(\cos\alpha/\sin\alpha)$$

Steigung :

$$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = m$$

Komplementwinkel

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos(\alpha)$$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin(\alpha)$$

Negative Winkel

$$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$$

$$\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$$

$$\tan(-\alpha) = \frac{1}{\tan(\alpha)}$$

2.7.3 Quadrantenregel

α in Gradmaß

I. Quadrant $0^\circ < \alpha < 90^\circ$

$$\sin(\alpha) > 0 \quad \cos(\alpha) > 0 \quad \tan(\alpha) > 0$$

II. Quadrant $90^\circ < \alpha_2 < 180^\circ$

$$\sin(\alpha_2) > 0 \quad \cos(\alpha_2) < 0 \quad \tan(\alpha_2) < 0$$

$$\alpha_2 = 180^\circ - \alpha$$

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin(\alpha)$$

$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos(\alpha)$$

$$\tan(180^\circ - \alpha) = -\tan(\alpha)$$

III. Quadrant $180^\circ < \alpha_3 < 270^\circ$

$$\sin(\alpha_3) < 0 \quad \cos(\alpha_3) < 0 \quad \tan(\alpha_3) > 0$$

$$\alpha_3 = 180^\circ + \alpha$$

$$\sin(180^\circ + \alpha) = -\sin(\alpha)$$

$$\cos(180^\circ + \alpha) = -\cos(\alpha)$$

$$\tan(180^\circ + \alpha) = \tan(\alpha)$$

IV. Quadrant $270^\circ < \alpha_4 < 360^\circ$

$$\sin(\alpha_4) < 0 \quad \cos(\alpha_4) > 0 \quad \tan(\alpha_4) < 0$$

$$\alpha_4 = 360^\circ - \alpha$$

$$\sin(360^\circ - \alpha) = -\sin(\alpha)$$

$$\cos(360^\circ - \alpha) = \cos(\alpha)$$

$$\tan(360^\circ - \alpha) = -\tan(\alpha)$$

x in Bogenmaß

I. Quadrant $0 < x < \frac{\pi}{2}$

$$\sin(x) > 0 \quad \cos(x) > 0 \quad \tan(x) > 0$$

II. Quadrant $\frac{\pi}{2} < x_2 < \pi$

$$\sin(x_2) > 0 \quad \cos(x_2) < 0 \quad \tan(x_2) < 0$$

$$x_2 = \pi - x$$

$$\sin(\pi - x) = \sin(x)$$

$$\cos(\pi - x) = -\cos(x)$$

$$\tan(\pi - x) = -\tan(x)$$

III. Quadrant $\pi < x_3 < \frac{3\pi}{2}$

$$\sin(x_3) < 0 \quad \cos(x_3) < 0 \quad \tan(x_3) > 0$$

$$x_3 = \pi + x$$

$$\sin(\pi + x) = -\sin(x)$$

$$\cos(\pi + x) = -\cos(x)$$

$$\tan(\pi + x) = \tan(x)$$

IV. Quadrant $\frac{3\pi}{2} < x_4 < 2\pi$

$$\sin(x_4) < 0 \quad \cos(x_4) > 0 \quad \tan(x_4) < 0$$

$$x_4 = 2\pi - x$$

$$\sin(2\pi - x) = -\sin(x)$$

$$\cos(2\pi - x) = \cos(x)$$

$$\tan(2\pi - x) = -\tan(x)$$

2.7.4 Umrechnungen

tan - sin - cos

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\sin \alpha = \tan \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{\sin \alpha}{\tan \alpha}$$

sin - cos

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$$

Additionstheoreme

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta}$$

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \cdot \tan \beta}$$

$$\sin 2\alpha = 2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = 2 \cdot \cos^2 \alpha - 1 = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \cdot \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

2.7.5 Rechtwinkliges Dreieck

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} \quad \sin \alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c} \quad \cos \alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\tan \alpha = \frac{a}{b} \quad \tan \alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$$

2.7.6 Sinussatz

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} \quad / \cdot \sin \beta \quad / \cdot \sin \alpha$$

$$a \cdot \sin \beta = b \cdot \sin \alpha \quad / : b$$

$$\sin \alpha = \frac{a \cdot \sin \beta}{b}$$

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} \quad / \cdot \sin \alpha$$

$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} \quad / \cdot \sin \alpha$$

$$a = \frac{b \cdot \sin \alpha}{\sin \beta}$$

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

$$\frac{\sin \alpha}{b} = \frac{\sin \gamma}{c}$$

2.7.7 Kosinussatz

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha \quad / - a^2$$

$$0 = b^2 + c^2 - a^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha \quad / + 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha$$

$$2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha = b^2 + c^2 - a^2 \quad / : (2 \cdot b \cdot c)$$

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \gamma$$

2.7.8 Kongruenzsätze - Berechnungen am Dreieck

Seite - Seite - Seite (SSS)

Seite	Seite	Seite
a	b	c

1. Zwei Winkel mit Kosinus-Satz berechnen

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha \quad / - a^2 \quad / + 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha$$

$$2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha = b^2 + c^2 - a^2 \quad / : (2 \cdot b \cdot c)$$

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c}$$

entsprechend

$$\cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2 \cdot a \cdot c} \quad \cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2 \cdot a \cdot b}$$

2. Fehlenden Winkel über die Winkelsumme im Dreieck berechnen
 $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$

Seite - Winkel - Seite (SWS)

Seite	Winkel	Seite
a	β	c
a	γ	b
b	α	c

1. Gegenüberliegende Seite mit Kosinussatz berechnen

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \beta$$

$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha}$$

entsprechend

$$b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \beta} \quad c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \gamma}$$

2. Winkel mit Kosinussatz berechnen

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha \quad / - a^2 \quad / + 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha$$

$$2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha = b^2 + c^2 - a^2 \quad / : (2 \cdot b \cdot c)$$

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c}$$

entsprechend

$$\cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2 \cdot a \cdot c} \quad \cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2 \cdot a \cdot b}$$

3. Fehlenden Winkel über die Winkelsumme im Dreieck berechnen
 $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$

Winkel - Seite - Winkel (WSW, WWS)

Winkel	Seite	Winkel	Winkel	Winkel	Seite
α	c	β	α	β	a
α	b	γ	α	β	b
β	a	γ	α	γ	a
			α	γ	c
			β	γ	b
			β	γ	c

1. Fehlenden Winkel über die Winkelsumme im Dreieck berechnen

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

2. Eine Seite über den Sinussatz

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}$$

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} \quad / \cdot \sin \beta$$

$$b = \frac{a \cdot \sin \beta}{\sin \alpha}$$

entsprechend

$$b = \frac{c \cdot \sin \beta}{\sin \alpha}$$

$$c = \frac{a \cdot \sin \alpha}{\sin \beta} \quad c = \frac{b \cdot \sin \alpha}{\sin \beta}$$

$$a = \frac{b \cdot \sin \alpha}{\sin \beta} \quad a = \frac{c \cdot \sin \alpha}{\sin \beta}$$

3. Fehlende Seite mit dem Kosinussatz berechnen

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \beta$$

$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha}$$

entsprechend

$$b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \beta} \quad c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \gamma}$$

Seite - Seite - Winkel (SsW)

Seite	Seite	Winkel	
a	b	α	$a > b$
a	b	β	$b > a$
a	c	α	$a > c$
a	c	γ	$c > a$
b	c	β	$b > c$
b	c	γ	$c > b$

1. Winkel mit dem Sinussatz berechnen

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}$$

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} \quad / \cdot \sin \beta \quad / \cdot \sin \alpha$$

$$a \cdot \sin \beta = b \cdot \sin \alpha \quad / : b$$

$$\sin \alpha = \frac{a \cdot \sin \beta}{b}$$

entsprechend

$$\sin \beta = \frac{b \cdot \sin \alpha}{a} \quad \sin \gamma = \frac{c \cdot \sin \alpha}{a}$$

2. Fehlenden Winkel über die Winkelsumme im Dreieck berechnen

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

3. Fehlende Seite mit dem Kosinussatz berechnen

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \beta \quad a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha}$$

entsprechend

$$b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \beta} \quad c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \gamma}$$

3 Funktionen

3.1 Grundlagen

3.1.1 Definition

Jedem Element x aus der Definitionsmenge D wird **genau** ein Element y aus der Wertemenge W zugeordnet.

x - unabhängige Variable

y - abhängige Variable

Zu jeder Funktion gehört ein Definitionsbereich.

Schreibweise

$y = f(x)$ - Funktionsgleichung, Funktion

$f(x)$ - Funktionsterm

$f : x \mapsto y$ x -Werte werden auf y -Werte abgebildet

$f : x \mapsto f(x)$ x -Werte werden auf $f(x)$ abgebildet

Definitions- und Wertebereich

- Definitionsbereich

Zahlenbereich der für x (unabhängige Variable) eingesetzt werden darf.

Einschränkungen des Definitionsbereichs sind nötig bei:

- Textaufgaben, bei denen nur bestimmte x -Wert möglich sind.
- Bruchfunktionen: Division durch Null ist nicht erlaubt. (Nenner $\neq 0$)
- Wurzelfunktionen: unter der Wurzel (Radikant) dürfen keine negativen Zahlen stehen. (Radikant ≥ 0)
- Logarithmusfunktionen: das Argument muss positiv sein. (Argument > 0)

- Wertebereich

Zahlenbereich den y (abhängige Variable Funktionswert) annehmen kann.

3.1.2 Umkehrfunktion

Definition

Jedem Element y aus der Wertemenge W wird **genau** ein Element x aus der Definitionsmenge D zugeordnet.

y - unabhängige Variable

x - abhängige Variable

Funktionen sind umkehrbar, wenn sie im Definitionsbereich streng monoton steigen oder streng monoton fallen.

Schreibweise

$x = f^{-1}(y)$ - Umkehrfunktion

$f : y \mapsto x$ y-Werte werden auf x-Werte abgebildet

Nach dem Vertauschen der Variablen:

$y = f^{-1}(x)$ - Umkehrfunktion

Ermitteln der Umkehrfunktion

Graphisch: Funktionsgraph an der Winkelhalbierenden $y = x$ spiegeln.

Algebraisch: Funktionsgleichung nach x auflösen und die Variablen x und y vertauschen.

3.2 Lineare Funktion**3.2.1 Ursprungsgerade****Ursprungsgerade**

$$y = m \cdot x$$

Steigung-Proportionalitätsfaktor: $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

$m > 0$ steigend

$m = 0$ $y = 0$ entspricht der x-Achse

$m < 0$ fallend

Winkelhalbierende des I und III Quadranten: $y = x$

Winkelhalbierende des II und IV Quadranten: $y = -x$

3.2.2 Graph und Eigenschaften**Gerade - lineare Funktion**

$$y = m \cdot x + t \quad f(x) = m \cdot x + t \quad \mathbb{D} = \mathbb{R} \quad \mathbb{W} = \mathbb{R}$$

Steigung: $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

$m > 0$ steigend

$m = 0$ parallel zur x-Achse

$m < 0$ fallend

y-Achsenabschnitt: t

Besondere Geraden:

$y = 0$ x-Achse

$y = t$ Parallele zur x-Achse im Abstand t

$x = 0$ y-Achse

$x = k$ Parallele zur y-Achse im Abstand k

Schnittpunkt mit der x-Achse - Nullstelle

$$y = mx + t$$

$$y = 0 \quad mx + t = 0$$

$$x = \frac{-t}{m}$$

Schnittpunkt mit der y-Achse

$$x = 0 \quad y = m \cdot 0 + t$$

$$y = m \cdot 0 + t$$

$$y = t$$

Graph oberhalb/unterhalb der x-Achse

Einen beliebigen Wert kleiner bzw. größer als die Nullstelle wählen und das Vorzeichen des Funktionswerts in die Vorzeichentabelle eintragen.

	$x <$	x_1	$< x$
$f(x)$	+	0	-

+ $f(x) > 0$ Graph oberhalb der x-Achse

- $f(x) < 0$ Graph unterhalb der x-Achse

3.2.3 Geradengleichung aufstellen

Gerade durch 2 Punkte

$$y = m \cdot x + t$$

$$A(xa/ya) \quad B(xb/yb)$$

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{ya - yb}{xa - xb}$$

$$t = ya - m \cdot xa$$

Gerade durch den Punkt A mit der Steigung m

$$y = m \cdot x + t$$

$$A(xa/ya) \quad \text{Steigung: } m$$

$$t = ya - m \cdot xa$$

Gerade durch den Punkt A und dem y-Achsenabschnitt t

$$A(xa/ya) \quad \text{y-Achsenabschnitt: } t$$

$$m = \frac{ya - t}{xa}$$

3.2.4 Gerade - Gerade

Parallele Geraden

$$g1 : y = m_1x + t_1 \quad g2 : y = m_2x + t_2$$

$$m_1 = m_2 \Rightarrow g1 \parallel g2$$

Senkrechte Geraden

$$g1 : y = m_1x + t_1 \quad g3 : y = m_3x + t_3$$

$$m_1 \cdot m_2 = -1 \Rightarrow g1 \perp g3$$

Schnittpunkt zweier Geraden

$$g1 : y = m_1x + t_1 \quad g3 : y = m_3x + t_3$$

- Terme gleichsetzen:

$$m_1x + t_1 = m_2x + t_2$$

- x-Wert durch umformen berechnen

- x-Wert in eine der beiden Funktionen einsetzen, um den y-Wert zu berechnen

3.3 Quadratische Funktion

3.3.1 Graph und Eigenschaften

Formen der Parabelgleichung

Normalparabel $y = x^2$

Allgemeine Form $y = ax^2 + bx + c$

Scheitelform $y = a(x - xs)^2 + ys$

faktorierte Form $y = a(x - x_1)(x - x_2)$

a Formfaktor

$a > 0$ nach oben geöffnet

$a < 0$ nach unten geöffnet

$|a| > 1$ gestreckt

$|a| < 1$ gestaucht

x_s Verschiebung in x-Richtung

y_s Verschiebung in y-Richtung

$S(x_s/y_s)$ Scheitelkoordinaten

x_1, x_2 Nullstellen

Definitions- und Wertebereich

$$\mathbb{D} = \mathbb{R}$$

$$a > 0 \quad \mathbb{W} = [y\text{-Wert des Scheitels}; \infty[$$

$$a < 0 \quad \mathbb{W} =]-\infty; y\text{-Wert des Scheitels}]$$

Schnittpunkt mit der x-Achse - Nullstellen

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$y = 0 \quad ax^2 + bx + c = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

$$\text{Diskriminante: } D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$$

$D = 0$ eine Nullstelle

$D > 0$ zwei Nullstellen

$D < 0$ keine Nullstelle

Schnittpunkt mit der y-Achse

$$p : y = ax^2 + bx + c$$

$$x = 0 \quad p : y = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c$$

$$p(x) = c \quad Q(0/c)$$

Allgemeine Form in Scheitelform

Allgemeine Form

$$y = ax^2 + bx + c$$

Scheitelform

$$y = a(x - xs)^2 + ys$$

Quadratische Ergänzung:

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$y = a(x^2 + \frac{b}{a}x) + c$$

$$y = a(x^2 + \frac{b}{a}x + (\frac{b}{2a})^2 - (\frac{b}{2a})^2) + c$$

$$y = a[(x + \frac{b}{2a})^2 - (\frac{b}{2a})^2] + c$$

$$y = a(x + \frac{b}{2a})^2 - a \cdot \frac{b^2}{4a^2} + c$$

$$y = a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a} + c$$

$$x_s = -\frac{b}{2a}$$

$$y_s = c - \frac{b^2}{4a}$$

Scheitelformel:

$$S(x_s/y_s)$$

$$S(-\frac{b}{2a}/c - \frac{b^2}{4a})$$

3.3.2 Parabelgleichung aufstellen und umformen

Parabelgleichung aus 2 Punkten und dem Formfaktor

Gegeben: Formfaktor a und Punkte $A(x_a/y_a)$ und $B(x_b/y_b)$

- Formfaktor a und Punkt $A(x_a/y_a)$ in die Funktionsgleichung einsetzen.

$$y_a = ax_a^2 + bx_a + c$$

- Formfaktor a und Punkt $B(x_b/y_b)$ in die Funktionsgleichung einsetzen.

$$y_b = ax_b^2 + bx_b + c$$

siehe Lösung von linearen Gleichungssystemen

Parabelgleichung aus Formfaktor und dem Scheitel

Formfaktor a und Scheitel in Scheitelform einsetzen:

$$y = a(x - xs)^2 + ys$$

Binomische Formel auflösen:

$$y = a(x^2 - 2 \cdot x \cdot xs + xs^2) + ys$$

$$y = a \cdot x^2 - 2 \cdot a \cdot x \cdot xs + a \cdot xs^2 + ys$$

Parabelgleichung aus einem Punkt und dem Scheitel

Punkt $A(x_a/y_a)$ und Scheitel $S(x_s/y_s)$ in die Scheitelform einsetzen und nach a auflösen.

$$y_a = a(x_a - xs)^2 + ys$$

Parabelgleichung aus Formfaktor und Nullstellen

Formfaktor a und Nullstellen in die faktorisierte Form einsetzen

$$P(x_1/0) \quad Q(x_2/0) \quad a$$

$$y = a(x - x_1)(x - x_2)$$

$$y = a(x^2 - x_1 \cdot x - x_2 \cdot x + x_1 \cdot x_2)$$

$$y = ax^2 - a \cdot x_1 \cdot x - a \cdot x_2 \cdot x + a \cdot x_1 \cdot x_2$$

3.3.3 Parabel - Gerade

$$p : y = ax^2 + bx + c \quad g : y = mx + t$$

Terme gleichsetzen: $ax^2 + bx + c = mx + t$

Term nach Null umformen: $ax^2 + (b - m)x + c - t = 0$

Lösung der quadratischen Gleichung:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

Diskriminante:

$$D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$$

$D = 0$ Gerade ist Tangente - Berührungspunkt

$D > 0$ Gerade ist Sekante - zwei Schnittpunkte

$D < 0$ Gerade ist Passante - keinen Schnittpunkt

x-Wert(e) in eine der beiden Funktionen einsetzen, um den y-Wert zu berechnen

3.3.4 Parabel - Parabel

$$p_1 : y = a_1x^2 + b_1x + c_1$$

$$p_2 : y = a_2x^2 + b_2x + c_2$$

Terme gleichsetzen:

$$a_1x^2 + b_1x + c_1 = a_2x^2 + b_2x + c_2$$

Term nach Null umformen:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Lösung der quadratischen Gleichung:

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

Diskriminante: $D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$

$D = 0$ Berührungspunkt

$D > 0$ zwei Schnittpunkte

$D < 0$ keinen Schnittpunkt

x-Wert(e) in eine der beiden Funktionen einsetzen, um den y-Wert zu berechnen

3.4 Eigenschaften von Funktionen

3.4.1 Symmetrie

Punktsymmetrie zum Ursprung - ungerade Funktion

$f(-x) = -f(x) \Rightarrow f(x)$ ist eine ungerade Funktion

Achsensymmetrie zur y-Achse - gerade Funktion

$f(-x) = f(x) \Rightarrow f(x)$ ist eine gerade Funktion

3.4.2 Monotonie

$x_1 < x_2$

monoton steigend		$f(x_1) \leq f(x_2)$
streng monoton steigend	sms	$f(x_1) < f(x_2)$
monoton fallend		$f(x_1) \geq f(x_2)$
streng monoton fallend	smf	$f(x_1) > f(x_2)$

3.4.3 Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen

Schnittpunkte mit der x-Achse - Nullstellen

Funktionsterm gleich Null setzen und die Gleichung lösen.

$f(x) = 0$ (siehe Algebra-Gleichungen)

- Vielfachheit der Nullstelle gerade
 - Nullstelle ohne Vorzeichenwechsel (VZW)
 - Berührungspunkt mit die x-Achse (Hoch- oder Tiefpunkt)
- Vielfachheit der Nullstelle ungerade
 - Nullstelle mit Vorzeichenwechsel (VZW)
 - Schnittpunkt mit die x-Achse

Einfache Nullstelle mit VZW: $f(x) = (x - x_1) \cdot ..$

Zweifache Nullstelle ohne VZW: $f(x) = (x - x_1)^2 \cdot ..$

Dreifache Nullstelle mit VZW: $f(x) = (x - x_1)^3 \cdot ..$

Vierfache Nullstelle ohne VZW: $f(x) = (x - x_1)^4 \cdot ..$

Schnittpunkte mit der y-Achse

$x=0$ in den Funktionsterm einsetzen.

Graph oberhalb/unterhalb der x-Achse

Bei Funktionen kann sich das Vorzeichen nur an den Nullstellen oder den Definitionslücken ändern. Einen beliebigen Wert kleiner bzw. größer als die Nullstelle wählen

und das Vorzeichen des Funktionswerts in die Tabelle eintragen.

Vorzeichentabelle mit $f(x)$

	$x <$	x_1	$< x$
$f(x)$	+	0	-
Graph	oberhalb	0	unterhalb
+	$f(x) > 0$	Graph oberhalb der x-Achse	
-	$f(x) < 0$	Graph unterhalb der x-Achse	

3.4.4 Asymptote

Definition

Eine Asymptote ist ein Gerade, der sich eine Funktion beliebig weit annähert. (siehe Analysis - Grenzwerte)

Horizontale (waagerechte) Asymptote

Funktionsgleichung: $y = a$

Vertikale (senkrechte) Asymptote - Polstelle

Funktionsgleichung: $x = b$

3.4.5 Verknüpfung von Funktionen

Addition von Funktionen

$$u(x) = f(x) + g(x)$$

Subtraktion von Funktionen

$$u(x) = f(x) - g(x)$$

Multiplikation von Funktionen

$$u(x) = f(x) \cdot g(x)$$

Division von Funktionen

$$u(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

Verketten von Funktionen

äußere Funktion $f(x)$ - innere Funktion $g(x)$

$$u(x) = f(g(x)) \text{ oder } f \circ g = f(g(x)) \quad f \text{ nach } g$$

äußere Funktion $g(x)$ - innere Funktion $f(x)$

$$v(x) = g(f(x)) \text{ oder } g \circ f = g(f(x)) \quad g \text{ nach } f$$

3.4.6 Abbildung von Funktionen

Verschiebung des Graphen in y-Richtung

$$y = f(x) + d$$

Verschiebung des Graphen in Richtung der x-Richtung

$$y = f(x - c)$$

Streckung - Stauchung in y-Richtung

$$y = a \cdot f(x)$$

$a > 1$: Streckung in y-Richtung

$0 < a < 1$: Stauchung in y-Richtung

$a = -1$: Spiegelung an der x-Achse

$a < -1$: Spiegelung an der x-Achse und Streckung in y-Richtung

Streckung - Stauchung in x-Richtung

$$y = f(b \cdot x)$$

$b > 1$: Stauchung in x-Richtung mit $\frac{1}{b}$

$0 < b < 1$: Streckung in x-Richtung mit $\frac{1}{b}$

$b = -1$: Spiegelung an der y-Achse

$b < -1$: Spiegelung an der y-Achse und Stauchung in x-Richtung mit $\frac{1}{b}$

Zusammenfassung

$$y = a \cdot f(b(x - c)) + d$$

$$y = a \cdot f(bx - cb) + d$$

a : Streckung/Stauchung in y-Richtung

$\frac{1}{b}$: Streckung/Stauchung in x-Richtung

c : Verschiebung des Graphen in x-Richtung

d : Verschiebung des Graphen in y-Richtung

3.5 Potenzfunktion

3.5.1 Parabeln vom Grad n - gerader Exponent

Formen der Parabelgleichung - gerader Exponent

Exponent: 2, 4, 6..

Grundfunktion: $y = x^n$

Funktion mit Formvariablen:

$$y = a(x - c)^n + d$$

$$y = a(b(x - c))^n + d$$

Definitions- und Wertebereich

$$y = x^n \quad \mathbb{D} = \mathbb{R} \quad \mathbb{W} = \mathbb{R}_0^+$$

$$y = a(b(x - c))^n + d \quad \mathbb{D} = \mathbb{R}$$

$$a > 0 \quad \mathbb{W} = [d; \infty[$$

$$a < 0 \quad \mathbb{W} =]-\infty; d]$$

3.5.2 Parabeln vom Grad n - ungerader Exponent

Formen der Parabelgleichung - ungerader Exponent

Exponent: 1, 3, 5..

Grundfunktion: $y = x^n$

Funktion mit Formvariablen:

$$y = a(x - c)^n + d$$

$$y = a(b(x - c))^n + d$$

Definitions- und Wertebereich

$$y = x^n \quad \mathbb{D} = \mathbb{R} \quad \mathbb{W} = \mathbb{R}$$

$$y = a(b(x - c))^n + d \quad \mathbb{D} = \mathbb{R} \quad \mathbb{W} = \mathbb{R}$$

3.5.3 Hyperbeln vom Grad n - gerader Exponent

Formen der Hyperbelgleichung - gerader Exponenten

Exponent: -2, -4, -6..

Grundfunktion: $y = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$

Funktion mit Formvariablen:

$$y = a(x - c)^{-n} + d = \frac{a}{(x - c)^n} + d$$

$$y = a(b(x - c))^{-n} + d = \frac{a}{(b(x - c))^n} + d$$

Definitions- und Wertebereich

$$y = x^{-n} = \frac{1}{x^n} \quad \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \mathbb{W} = \mathbb{R}^+$$

$$y = a(b(x - c))^{-n} + d \quad \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{c\}$$

$$a > 0 \quad \mathbb{W} =]d; \infty[$$

$$a < 0 \quad \mathbb{W} =]-\infty; d[$$

Asymptoten

$$y = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

Horizontale Asymptote (HA): $y = 0$

Vertikale Asymptote (VA): $x = 0$

$$y = a(b(x - c))^{-n} + d$$

Horizontale Asymptote: $y = d$

Vertikale Asymptote: $x = c$

3.5.4 Hyperbeln vom Grad n - ungerader Exponent**Formen der Hyperbelgleichung - ungerader Exponenten**

Exponent: -1, -3, -5..

$$\text{Grundfunktion: } y = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

Funktion mit Formvariablen:

$$y = a(x - c)^{-n} + d = \frac{a}{(x - c)^n} + d$$

$$y = a(b(x - c))^{-n} + d = \frac{a}{(b(x - c))^n} + d$$

Definitions- und Wertebereich

$$y = x^{-n} \quad \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \mathbb{W} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$y = a(b(x - c))^{-n} + d$$

$$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{c\} \quad \mathbb{W} = \mathbb{R} \setminus \{d\}$$

Asymptoten

$$y = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

Horizontale Asymptote (HA): $y = 0$

Vertikale Asymptote (VA): $x = 0$

$$y = a(b(x - c))^{-n} + d$$

Horizontale Asymptote: $y = d$

Vertikale Asymptote: $x = c$

3.5.5 Wurzelfunktion - rationaler, positiver Exponent**Formen der Wurzelfunktion - positiver Exponent**

$$\text{Quadratwurzelfunktion: } y = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x} \quad x > 0$$

$$\text{Grundfunktion: } y = x^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{x^n} \quad x > 0$$

Funktion mit Formvariablen:

$$y = a(x - c)^{\frac{n}{m}} + d = a \sqrt[m]{(x - c)^n} + d \quad x - c > 0$$

$$y = a(b(x - c))^{\frac{n}{m}} + d = a \sqrt[m]{(b(x - c))^n} + d \quad b(x - c) > 0$$

Definitions- und Wertebereich

$$y = x^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{x^n} \quad \mathbb{D} = \mathbb{R}_0^+ \quad \mathbb{W} = \mathbb{R}_0^+$$

$$y = a(b(x - c))^{\frac{n}{m}} + d = a \sqrt[m]{(b(x - c))^n} + d$$

$$b > 0 \quad \mathbb{D} = [c; \infty[$$

$$b < 0 \quad \mathbb{D} =]-\infty; c]$$

$$a > 0 \quad \mathbb{W} = [d; \infty[$$

$$a < 0 \quad \mathbb{W} =]-\infty; d]$$

3.5.6 Wurzelfunktion - rationaler, negativer Exponent**Formen der Wurzelfunktion - negativer Exponent**

$$y = x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x}} \quad x > 0$$

$$\text{Grundfunktion: } y = x^{-\frac{n}{m}} = \frac{1}{\sqrt[m]{x^n}} \quad x > 0$$

$$\text{Funktion mit Formvariablen: } y = a(x - c)^{-\frac{n}{m}} + d = \frac{a}{\sqrt[m]{(x - c)^n}} + d \quad x - c > 0$$

$$y = a(b(x - c))^{-\frac{n}{m}} + d = a \frac{1}{\sqrt[m]{(b(x - c))^n}} + d \quad b(x - c) > 0$$

Definitions- und Wertebereich

$$y = x^{-\frac{n}{m}} = \frac{1}{\sqrt[m]{x^n}}$$

$$\mathbb{D} = \mathbb{R}^+ \quad \mathbb{W} = \mathbb{R}^+$$

$$y = a(b(x - c))^{-\frac{n}{m}} + d = \frac{a}{\sqrt[m]{(b(x - c))^n}} + d$$

$$b > 0 \quad \mathbb{D} =]c; \infty[$$

$$b < 0 \quad \mathbb{D} =]-\infty; c[$$

$$a > 0 \quad \mathbb{W} =]d; \infty[$$

$$a < 0 \quad \mathbb{W} =]-\infty; d[$$

Asymptoten

$$y = x^{-\frac{n}{m}} = \frac{1}{\sqrt[m]{x^n}}$$

Horizontale Asymptote (HA): $y = 0$

Vertikale Asymptote (VA): $x = 0$

$$y = a(b(x-c))^{-\frac{n}{m}} + d = \frac{a}{\sqrt[m]{(b(x-c))^n}} + d$$

Horizontale Asymptote: $y = d$

Vertikale Asymptote: $x = c$

3.6 Exponentialfunktion**3.6.1 Graph und Eigenschaften****Formen der Exponentialfunktion**

Grundfunktion: $y = q^x \quad q > 0$

Funktion mit Formvariablen:

$$y = a \cdot q^{(x-c)} + d \quad q > 0$$

$$y = a \cdot q^{b(x-c)} + d \quad q > 0$$

Funktionen mit der Basis: $e = 2,718..$

Grundfunktion: $y = e^x$

Funktion mit Formvariablen:

$$y = a \cdot e^{(x-c)} + d$$

$$y = a \cdot e^{b(x-c)} + d$$

Definitions- und Wertebereich

$$y = e^x \quad y = q^x$$

$$\mathbb{D} = \mathbb{R} \quad \mathbb{W} = \mathbb{R}^+$$

$$y = a \cdot q^{b(x-c)} + d \quad y = a \cdot e^{b(x-c)} + d$$

$$\mathbb{D} = \mathbb{R}$$

$$a > 0 \quad \mathbb{W} =]d; \infty[$$

$$a < 0 \quad \mathbb{W} =]-\infty; d[$$

Asymptoten

$$y = e^x \quad y = q^x$$

Horizontale Asymptote (HA): $y = 0$

$$y = a \cdot q^{b(x-c)} + d \quad y = a \cdot e^{b(x-c)} + d$$

Horizontale Asymptote: $y = d$

3.7 Logarithmusfunktion

3.7.1 Graph und Eigenschaften

Formen der Logarithmusfunktion

Grundfunktion: $y = \log_q x$ $q > 0$

Funktion mit Formvariablen:

$$y = a \log_q (x - c) + d \quad -\frac{d}{c} > 0$$

$$y = a \log_q (b(x - c)) + d$$

Funktionen mit der Basis: $e = 2,718..$

Grundfunktion: $y = \ln x$

Funktion mit Formvariablen:

$$y = a \ln (x - c) + d$$

$$y = a \ln (b(x - c)) + d$$

Definitions- und Wertebereich

$$y = \log_q x \quad y = \ln x \quad \mathbb{D} = \mathbb{R}^+ \quad \mathbb{W} = \mathbb{R} \quad y = a \log_q (b(x - c)) + d$$

$$y = a \ln (b(x - c)) + d$$

Definitionsbereich: $b(x - c) > 0$

$$b > 0 \quad \mathbb{D} =]c; \infty[$$

$$b < 0 \quad \mathbb{D} =]-\infty; c[$$

$$\mathbb{W} = \mathbb{R}$$

Asymptoten

$$y = \log_q x \quad y = \ln x$$

Vertikale Asymptote (VA): $x = 0$

$$y = a \log_q (b(x - c)) + d \quad y = a \ln (b(x - c)) + d$$

Vertikale Asymptote: $x = c$

3.8 Sinusfunktion

3.8.1 Graph und Eigenschaften

Formen der Sinusfunktion

Grundfunktion: $f(x) = \sin x$

Amplitude: 1 Periode: 2π

Funktion mit Formvariablen:

$$f(x) = a \sin (x - c) + d$$

$$f(x) = a \sin (b(x - c)) + d$$

Amplitude: $|a|$ Periode: $\frac{2\pi}{b}$

Definitions- und Wertebereich

$$f(x) = \sin(x)$$

$$\mathbb{D} = \mathbb{R} \quad \mathbb{W} = [-1; 1]$$

$$f(x) = a \sin (b(x - c)) + d$$

$$\mathbb{D} = \mathbb{R} \quad \mathbb{W} = [d - a; d + a]$$

3.9 Kosinusfunktion

3.9.1 Graph und Eigenschaften

Formen der Kosinusfunktion

Grundfunktion: $f(x) = \cos x$

Amplitude: 1 Periode: 2π

Funktion mit Formvariablen:

$$f(x) = a \cos(x - c) + d$$

$$f(x) = a \cos(b(x - c)) + d$$

Amplitude: $|a|$ Periode: $\frac{2\pi}{b}$

Definitions- und Wertebereich

$$f(x) = \cos(x)$$

$$\mathbb{D} = \mathbb{R} \quad \mathbb{W} = [-1; 1]$$

$$f(x) = a \cos(b(x - c) + d$$

$$\mathbb{D} = \mathbb{R} \quad \mathbb{W} = [d - a; d + a]$$

3.10 Tangensfunktion

3.10.1 Graph und Eigenschaften

Formen der Tangensfunktion

Grundfunktion: $f(x) = \tan x$

Periode: π

Funktion mit Formvariablen:

$$f(x) = a \tan(x - c) + d$$

$$f(x) = a \tan(b(x - c)) + d$$

Periode: $\frac{\pi}{b}$

Definitions- und Wertebereich

$$f(x) = \tan x$$

$$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{k \cdot \frac{\pi}{2}\} \quad \mathbb{W} = \mathbb{R} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$f(x) = a \tan b(x + c) + d$$

$$b(x - c) = k \frac{\pi}{2}$$

$$x = \frac{k\pi}{2b} + c$$

$$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{\frac{k\pi}{2b} + c\} \quad \mathbb{W} = \mathbb{R} \quad k \in \mathbb{Z}$$

3.11 Betragsfunktion

3.11.1 Graph und Eigenschaften

Formen der Betragsfunktion

- Aufspalten der Beträge in einzelne Intervalle.

Betragsstriche sind nicht nötig, wenn der Term des Betrags positiv ist.

Betragsstriche sind nicht nötig, wenn der Term des Betrags negativ ist und dafür zusätzlich ein Minuszeichen vor dem Term geschrieben wird.

Grundfunktion:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & x > 0 \\ -x & x < 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Funktion mit Formvariablen:

$$f(x) = a|b(x - c)| + d = \begin{cases} a(b(x - c)) + d & x > c \\ -a(b(x - c)) + d & x < c \\ d & x = c \end{cases}$$

Definitions- und Wertebereich

$$f(x) = |x|$$

$$\mathbb{D} = \mathbb{R} \quad \mathbb{W} = \mathbb{R}_0^+$$

$$f(x) = a|b(x - c)| + d \quad \mathbb{D} = \mathbb{R}$$

$$a > 0 \quad \mathbb{W} = [d; \infty[$$

$$a < 0 \quad \mathbb{W} =]-\infty; d]$$

3.12 Wachstumsfunktionen

3.12.1 Lineares Wachstum

- Zum Anfangswert t wird pro Zeiteinheit der gleiche Wert m addiert oder subtrahiert.

- Lineare Funktion: $y = m \cdot x + t$

x - Zeit in Stunden, Minuten usw.

y - Funktionswert nach der Zeit x

t - Anfangswert

m - konstante Änderungsrate, Steigung

$m > 0$ positives lineares Wachstum (Zunahme)

$m < 0$ negatives lineares Wachstum (Abnahme)

$m = 0$ Nullwachstum

- Änderungsrate - Wachstumsgeschwindigkeit

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

- Umformungen: $y = m \cdot x + t$

$$x = \frac{y-t}{m} \quad t = y - m \cdot x \quad m = \frac{y-t}{x}$$

- Schreibweisen

Funktion	Änderungsrate	Variable	Anfangswert
$y = m \cdot x + t$	m	x	t
$y = a \cdot x + b$	a	x	b
$y = a + b \cdot x$	b	x	a
$f(x) = a \cdot x + f_0$	a	x	f_0
$N(t) = a \cdot t + N_0$	a	t	N_0
$B(t) = k \cdot t + B_0$	a	x	B_0
$K(t) = q \cdot t + K_0$	q	t	K_0

3.12.2 Exponentielles Wachstum

Wachstumsfaktor pro Zeiteinheit

- Der Anfangswert a wird pro Zeiteinheit mit den gleichen Faktor q multipliziert.

- Funktion: $f(x) = a \cdot q^x$

x - Zeit in Stunden, Minuten usw.

y = f(x) - Funktionswert nach der Zeit x

a - Anfangswert

q - Wachstumsfaktor pro Zeiteinheit

$q > 1$ exponentielles Wachstum

$0 < q < 1$ exponentieller Zerfall

$q = 0$ Nullwachstum

• Prozentuale Zunahme p pro Zeiteinheit

$$f(x) = a \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^x = a \cdot q^x$$

$$q = 1 + \frac{p}{100} \quad p = (q - 1) \cdot 100$$

• Prozentuale Abnahme p pro Zeiteinheit

$$f(x) = a \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)^x = a \cdot q^x$$

$$q = 1 - \frac{p}{100} \quad p = (1 - q) \cdot 100$$

• Lokale Änderungsrate - Wachstumsgeschwindigkeit

1. Ableitung: $f'(x) = a \cdot \ln(q) \cdot q^x$

• Umformungen $y = f(x)$

$$y = a \cdot q^x \quad a = \frac{y}{q^x} \quad x = \log_q\left(\frac{y}{a}\right) \quad q = \sqrt[x]{\frac{y}{a}}$$

• Schreibweisen

Funktion	Wachstumsfaktor	Variable	Anfangswert
$f(t) = a \cdot q^t$	q	t	a
$y = a \cdot b^x$	b	x	a
$y = b \cdot a^t$	a	t	b
$K(t) = K_0 \cdot q^t$	q	t	N_0
$N(t) = N_0 \cdot q^t$	q	t	N_0

Wachstumsfaktor pro Periode

• Der Anfangswert a wird pro Periode mit den gleichen Faktor q multipliziert.

• Funktion: $f(x) = a \cdot q^{\frac{x}{T}}$

x - Zeit in Stunden, Minuten usw.

$y = f(x)$ - Funktionswert nach der Zeit x

a - Anfangswert

T - Periode, Zeitintervall

q - Wachstumsfaktor pro Periode

$q > 1$ exponentielles Wachstum

$0 < q < 1$ exponentieller Zerfall

$q = 0$ Nullwachstum

• Prozentuale Zunahme p pro Periode T

$$f(x) = a \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{\frac{x}{T}}$$

$$q = 1 + \frac{p}{100} \quad p = (q - 1) \cdot 100$$

• Prozentuale Abnahme pro Periode T

$$f(x) = a \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)^{\frac{x}{T}}$$

$$q = 1 - \frac{p}{100} \quad p = (1 - q) \cdot 100$$

• Umformungen $y = f(x)$

$$y = a \cdot q^{\frac{x}{T}} \quad a = \frac{y}{q^{\frac{x}{T}}} \quad x = T \cdot \log_q\left(\frac{y}{a}\right) \quad q = \sqrt[T]{\frac{y}{a}}$$

Wachstumskonstante und e-Funktion

• Funktion: $f(x) = a \cdot e^{k \cdot x}$

x - Zeit in Stunden, Minuten usw.

$f(x)$ - Funktionswert nach der Zeit x

a - Anfangswert

k - Wachstumskonstante

$k > 0$ exponentielles Wachstum

$k < 0$ exponentieller Zerfall

• Wachstumsfaktor q pro Zeiteinheit

$$f(x) = a \cdot q^x = a \cdot e^{\ln(q^x)} = a \cdot e^{\ln(q) \cdot x} = a \cdot e^{k \cdot x}$$

$$k = \ln(q) \quad q = e^k$$

• Wachstumsfaktor q pro Periode T

$$f(x) = a \cdot q^{\frac{x}{T}} = a \cdot e^{\ln(q^{\frac{x}{T}})} = a \cdot e^{\ln(q) \cdot \frac{x}{T}} = a \cdot e^{k \cdot x}$$

$$k = \frac{\ln(q)}{T} \quad q = e^{k \cdot T}$$

• Lokale Änderungsrate - Wachstumsgeschwindigkeit

1. Ableitung: $f'(x) = a \cdot k \cdot e^{k \cdot x} = k \cdot f(x)$

• Umformungen $y = f(x)$

$$y = a \cdot e^{k \cdot x} \quad a = \frac{y}{e^{k \cdot x}} \quad x = \frac{\ln\left(\frac{y}{a}\right)}{k} \quad k = \frac{\ln\left(\frac{y}{a}\right)}{x}$$

4 Analysis

4.1 Grenzwert - Stetigkeit

4.1.1 Grenzwert von $f(x)$ für x gegen x_0

- Linksseitiger Grenzwert (LGW) von $f(x)$ geht gegen eine Konstante (konvergiert)

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = a \text{ oder } \lim_{x \xrightarrow{<} x_0} f(x) = a$$

- Rechtsseitiger Grenzwert (RGW) von $f(x)$ geht gegen eine Konstante (konvergiert)

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = a \text{ oder } \lim_{x \xrightarrow{>} x_0} f(x) = a$$

- Grenzwert von $f(x)$ existiert

linksseitige Grenzwert = rechtsseitige Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = a$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$$

- Linksseitiger Grenzwert von $f(x)$ geht gegen Unendlich (bestimmt divergiert)

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \pm\infty$$

- Rechtsseitiger Grenzwert von $f(x)$ geht gegen Unendlich (bestimmt divergiert)

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \pm\infty$$

\Rightarrow vertikale Asymptote - Polstelle an der Stelle $x = x_0$

4.1.2 Grenzwert von $f(x)$ für x gegen Unendlich

- Grenzwert von $f(x)$ geht gegen eine Konstante (konvergiert)

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = a$$

\Rightarrow horizontale Asymptote $y = a$

- Grenzwert von $f(x)$ geht gegen Unendlich (bestimmt divergiert)

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$$

4.1.3 Stetigkeit

- Ein Funktion ist an der Stelle x_0 stetig, wenn der linksseitige GW = rechtsseitige GW = Funktionswert $f(x_0)$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

- Stetige Funktionen
 - Ganzrationale Funktionen
 - Exponentialfunktionen
 - Sinus- und Kosinusfunktion
- Stetige Funktionen, bei denen die Unstetigkeitsstellen aus dem Definitionsbereich ausgeschlossen sind:
 - Gebrochenrationale Funktionen
 - Logarithmusfunktionen
 - Tangensfunktion
- Abschnittsweise definierte Funktionen müssen an den Schnittstellen auf Stetigkeit untersucht werden.
- Stetig behebare Definitionslücke x_0

- linksseitige GW = rechtsseitige GW

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$$

4.1.4 Rechenregeln

Wichtige Grenzwerte

$$\begin{array}{ll} \lim_{x \rightarrow 0} a \cdot x = 0 & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a}{x} = \infty \\ \lim_{x \rightarrow \infty} a \cdot x = \infty & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty & \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty & \lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = \infty \end{array}$$

Rechenregeln

$$\begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g \\ \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = f + g \\ \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = f - g \\ \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = f \cdot g \\ g(x) \neq 0 \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} = \frac{f}{g} \end{array}$$

Unbestimmte Ausdrücke

$$\text{Typ 1: } \lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0} \quad \text{Typ 2: } \lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$$

Regel von L'Hospital

Zähler und Nenner getrennt ableiten, bis man den Grenzwert berechnen kann.

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim \frac{f''(x)}{g''(x)} \dots$$

$$\text{Typ 3: } \lim f(x) \cdot g(x) = 0 \cdot \pm\infty$$

- Umformen in Typ 1 oder 2 und danach L'Hospital

$$\text{Typ 4: } \lim (f(x) - g(x)) = \infty - \infty$$

- Brüche auf gemeinsamen Hauptnenner bringen

- Faktorisieren

Wichtige unbestimmte Ausdrücke

$$\begin{array}{ll} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} = 0 & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{\ln x} = \infty & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0 \end{array}$$

4.2 Differentialrechnung

4.2.1 Definition

Sekantensteigung

Eine Gerade schneidet eine Funktion in den Punkten

$P_1(x_0; f(x_0))$ und $P_2(x; f(x))$.

Steigung der Sekante an der Stelle x_0

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$\Delta x = h \quad x = x_0 + h$$

$$m = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Sekantensteigung = Differenzenquotient = Mittlere Änderungsrate

Für kleine h ist die Sekantensteigung \approx Tangentensteigung

$$m \approx f'(x_0)$$

1. Ableitung - Differentialquotient

Die Ableitung von $f(x)$ ist die Steigung des Graphen der Funktion $f(x)$ an der Stelle x_0 .

$$f'(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$x = x_0 + h$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

1. Ableitung = Steigung der Tangente = Steigung der Funktion f(x)=lokale (momentane) Änderungsrate

Die Ableitung von $f(x)$ an einer beliebigen Stelle x

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

2. Ableitung

Die Ableitung der 1. Ableitung ist die 2. Ableitung.

Die 2. Ableitung gibt die Krümmung einer Funktion f(x) an der Stelle x_0 an.

4.2.2 1. Ableitung - Monotonie - Extremwerte

Steigung von $f(x_0)$ an der Stelle x_0

$$m = f'(x_0)$$

Stelle x_0 an der $f(x_0)$ die Steigung m besitzt

$$f'(x) = m$$

Bei horizontalen Tangenten ist die Steigung Null.

$$f'(x) = 0$$

Monotonieverhalten

monoton steigend	$f'(x) \geq 0$
streng monoton steigend sms	$f'(x) > 0$
monoton fallend	$f'(x) \leq 0$
streng monoton fallend smf	$f'(x) < 0$

Das Monotonieverhalten kann sich nur an den Extremstellen und an den Rändern des Definitionsbereich (Definitionslücken) ändern.

Extremwerte und das Monotonieverhalten

Extremwerte sind Hochpunkte (Maxima) bzw. Tiefpunkte (Minima) der Funktion. In den Extremwerten hat f(x) eine horizontale Tangente (HT).

- $f'(x) = 0$ (Notwendige Bedingung)

Die Nullstellen der 1. Ableitung bestimmen $(x_0, x_1..)$.

In diesen Nullstellen $(x_0, x_1..)$ kann die Funktion einen Hochpunkt, Tiefpunkt oder Terrassenpunkt (Sattelpunkt) besitzen.

Zur Unterscheidung werden die Nullstellen in die Vorzeichen-tabelle eintragen. Einen Wert kleiner bzw. größer als die Nullstelle wählen und das Vorzeichen von $f'(x)$ in die Tabelle eintragen. (Hinreichende Bedingung)

- Hochpunkt (HP)

Monotonieverhalten ändert sich von streng monoton steigend (sms) nach streng monoton fallend (smf).

Vorzeichenwechsel (VZW) der 1. Ableitung $f'(x)$ von Plus nach Minus.

	$x <$	x_1	$< x$
$f'(x)$	+	0	-
Graph	sms	HP	smf

- Tiefpunkt (TP)

Monotonieverhalten ändert sich von streng monoton fallend (smf) nach streng monoton steigend (sms).

Vorzeichenwechsel (VZW) der 1. Ableitung $f'(x)$ von Minus nach Plus.

	$x <$	x_1	$< x$
$f'(x)$	-	0	+
Graph	smf	TP	sms

- Terrassenpunkt (TEP)

Monotonieverhalten ändert sich nicht. Kein Vorzeichenwechsel (VZW) der 1. Ableitung.

	$x <$	x_1	$< x$		$x <$	x_1	$< x$
$f'(x)$	+	0	+	$f'(x)$	-	0	-
Graph	sms	TEP	sms	Graph	smf	TEP	smf

Die Ränder des Definitionsbereichs (Definitionslücken) müssen in die Tabelle mit

eingetragen werden.

Extremwerte und die 2. Ableitung

In den Extremwerten hat $f(x)$ eine horizontale Tangente (HT).

- $f'(x) = 0$ (Notwendige Bedingung)

Die Nullstellen der 1. Ableitung bestimmen $(x_0, x_1..)$.

In diesen Nullstellen $(x_0, x_1..)$ kann die Funktion einen Hochpunkt, Tiefpunkt oder Terrassenpunkt (Sattelpunkt) besitzen.

Einsetzen der Nullstellen $x_0, x_1..$ in die 2. Ableitung (Hinreichende Bedingung)

- $f''(x_0) > 0(LK) \Rightarrow$ Tiefpunkt (Minimum) bei x_0
- $f''(x_0) < 0(RK) \Rightarrow$ Hochpunkt (Maximum) bei x_0
- $f''(x_0) = 0 \wedge f'''(x_0) \neq 0 \Rightarrow$ Terrassenpunkt

4.2.3 Graph der 1. Ableitung

Funktion - 1. Ableitung $f'(x)$

Funktion $f(x)$	Ableitung $f'(x)$
Extremwert	NST $f'(x) = 0$
HT	NST $f'(x) = 0$
HP	NST und VZW von + nach -
TP	NST und VZW von - nach +
TEP	NST ohne VZW
WP	Extremwert
sms	$f'(x) > 0$ (positiv)
smf	$f'(x) < 0$ (negativ)
VA	VA $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = \pm\infty$
HA	HA $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f'(x) = 0$

4.2.4 2. Ableitung - Krümmung - Wendepunkte

Krümmung von $f(x_0)$ an der Stelle x_0

Rechtskrümmung	RK	$f''(x) < 0$
Linkskrümmung	LK	$f''(x) > 0$

Das Krümmungsverhalten kann sich nur an den Nullstellen der 2. Ableitung und an den Rändern des Definitionsbereichs (Definitionslücken) ändern.

Wendepunkte und das Krümmungsverhalten

Im Wendepunkt und im Flachpunkt ist das Krümmungsverhalten gleich Null.

- $f''(x) = 0$ (Notwendige Bedingung)

Die Nullstellen der 2. Ableitung bestimmen $(x_0, x_1..)$. Zur Unterscheidung zwischen Wendepunkt und Flachpunkt werden die Nullstellen in die Vorzeichentabelle eintragen. (Hinreichende Bedingung) Einen Wert kleiner bzw. größer als die Nullstelle wählen und das Vorzeichen von $f''(x)$ in die Tabelle eintragen.

- Wendepunkt (WP)

Das Krümmungsverhalten ändert sich von rechtsgekrümmt (RK) nach linksgekrümmt (LK) oder von linksgekrümmt nach rechtsgekrümmt.

Vorzeichenwechsel (VZW) der 2.Ableitung $f''(x)$ von Plus nach Minus oder von Minus nach Plus.

	$x <$	x_1	$< x$		$x <$	x_1	$< x$
$f''(x)$	+	0	-	$f''(x)$	-	0	+
Graph	LK	WP	RK	Graph	RK	WP	LK

- Flachpunkt (FP)

Krümmungsverhalten ändert sich nicht

Kein Vorzeichenwechsel (VZW) der 2.Ableitung

	$x <$	x_1	$< x$		$x <$	x_1	$< x$
$f''(x)$	+	0	+	$f''(x)$	-	0	-
Graph	LK	FP	LK	Graph	RK	FP	RK

Die Ränder des Definitionsbereichs (Definitionslücken) müssen in die Tabelle mit eingetragen werden.

Wendepunkte und die 3. Ableitung

Im Wendepunkt und im Flachpunkt ist das Krümmungsverhalten gleich Null.

- $f''(x) = 0$ (Notwendige Bedingung)

Die Nullstellen der 2. Ableitung bestimmen $(x_0, x_1..)$.

Einsetzen der Nullstellen $x_0, x_1..$ in die 3. Ableitung (Hinreichende Bedingung)

- $f'''(x_0) \neq 0 \Rightarrow$ Wendepunkt

4.2.5 Graph der 2. Ableitung

Funktion - 2. Ableitung $f''(x)$

Funktion $f(x)$	2. Ableitung $f''(x)$
WP	NST $f''(x) = 0$ mit VZW
LK	$f''(x) > 0$
RK	$f''(x) < 0$
TEP	NST mit VZW
VA	VA
HA	HA

4.2.6 Ableitung der Grundfunktionen

Polynomfunktion

$$f(x) = x^n \quad f'(x) = nx^{n-1}$$

Die Ableitungen bildet man durch: Exponent vorziehen und vom Exponenten 1 abziehen

$$f(x) = x \quad f'(x) = 1$$

$$f(x) = ax^n \quad f'(x) = nax^{n-1}$$

$$f(x) = ax \quad f'(x) = a$$

Konstanter Faktor a bleibt erhalten

$$f(x) = a \quad f'(x) = 0$$

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$$

Bei Summen wird jeder Summand einzeln abgeleitet

Exponentialfunktion Basis e

$$f(x) = e^x \quad f'(x) = e^x$$

$$f(x) = ae^x \quad f'(x) = ae^x$$

$$f(x) = ae^x + b \quad f'(x) = ae^x$$

Logarithmusfunktion Basis e

$$f(x) = \ln x \quad f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$f(x) = a \ln x \quad f'(x) = \frac{a}{x}$$

$$f(x) = a \ln x + b \quad f'(x) = \frac{a}{x}$$

Exponentialfunktion allgemein

$$f(x) = a^x \quad f'(x) = a^x \ln a$$

Logarithmusfunktion allgemein

$$f(x) = \log_a x \quad f'(x) = \frac{1}{x \ln a}$$

Trigonometrische Funktionen

$$f(x) = \sin x \quad f'(x) = \cos x$$

$$f(x) = \cos x \quad f'(x) = -\sin x$$

$$f(x) = \tan x \quad f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$$

4.2.7 Ableitungsregeln

Ableiten von Summen und Differenzen

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$$

Ableiten mit konstantem Faktor

$$(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$$

Kettenregel

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

- äußere Funktion f() ableiten
- innere Funktion g(x) unabgeleitet abschreiben
- mit der Ableitung der inneren Funktion g(x) multiplizieren (nachdifferenzieren)

Produktregel

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

- 1. Faktor f(x) ableiten
- mal
- 2. Faktor g(x) unabgeleitet
- plus
- 1. Faktor f(x) unabgeleitet
- mal
- 2. Faktor g(x) abgeleitet

Quotientenregel

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

- Zähler f(x) ableiten
- mal
- Nenner g(x) unabgeleitet
- minus
- Zähler f(x) unabgeleitet
- mal
- Nenner g(x) abgeleitet
- durch
- Nenner g(x) im Quadrat

4.2.8 Tangenten- und Normalengleichung

Tangentengleichung

Tangente an der Stelle x_0 :

$$g(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

oder

$$y_0 = f(x_0)$$

$$m_t = f'(x_0)$$

Geradengleichung:

$$y = m \cdot x + t$$

m_t, x_0, y_0 einsetzen und nach t auflösen

$$t = y_0 - m_t \cdot x_0$$

m_t, t einsetzen

$$y = m_t \cdot x + t$$

Normalengleichung

Normale an der Stelle x_0 :

$$g(x) = \frac{-1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0)$$

oder

$$y_0 = f(x_0)$$

$$m_t = f'(x_0)$$

Steigung der Normalen

$$m_n = \frac{-1}{m_t}$$

Geradengleichung:

$$y = m \cdot x + t$$

m_n, x_0, y_0 einsetzen und nach t auflösen

$$t = y_0 - m_n \cdot x_0$$

m_n, t einsetzen

$$y = m_n \cdot x + t$$

4.2.9 Newtonsches Iterationsverfahren

Nullstelle einer Funktion mit dem Newtonsches Iterationsverfahren

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Startwert x_0 wählen

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

....

4.3 Integralrechnung

4.3.1 Definition

Hauptsatz der Integralrechnung

$$F'(x) = f(x)$$

Die Ableitung von $F(x)$ ist $f(x)$

$F(x)$ ist Stammfunktion von $f(x)$

Die Menge aller Stammfunktionen erhält man durch das Addieren einer Konstanten c .

$$f(x) = ax^n \quad F(x) = \frac{1}{n+1}ax^{n+1} + c$$

Unbestimmtes Integral

$$F(x) = \int f(x) \, dx = F(x) + c$$

Die Stammfunktion zu einer Funktion $f(x)$ ist das unbestimmte Integral.

Bestimmtes Integral

- Flächenbilanz

$$A = \int_a^b f(x) \, dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

A ist der Flächeninhalt unter einer Kurve der Funktion $f(x)$ im Integrationsbereich von a bis b .

Fläche oberhalb der x -Achse $\Rightarrow A > 0$

Fläche unterhalb der x -Achse $\Rightarrow A < 0$

Flächen unterhalb und oberhalb der x -Achse \Rightarrow Summe der Teilflächen

- Fläche zwischen dem Graphen und der x -Achse

- Nullstellen berechnen

- Flächen zwischen den Nullstellen berechnen

- Beträge der Flächen addieren

Integralfunktion

$$F(x) = \int_k^x f(t) \, dt = [F(t)]_k^x = F(x) - F(k)$$

Jede Integralfunktion hat mindestens eine Nullstelle.

$$F(k) = 0$$

4.3.2 Integration der Grundfunktionen

Polynomfunktion

$$F(x) = \int x^n \, dx = \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} + c$$

Zum Exponenten 1 addieren, durch den Exponenten dividieren

$$F(x) = \int x \, dx = \frac{1}{2}x^2 + c$$

$$F(x) = \int ax^n dx = a \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} + c$$

Konstanter Faktor a bleibt erhalten

$$F(x) = \int a dx = ax + c$$

$$\int f(x) + g(x) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

Bei Summen wird jeder Summand einzeln integriert

Exponentialfunktion Basis e

$$F(x) = \int e^x dx = e^x + c$$

$$F(x) = \int ae^x dx = ae^x + c$$

$$F(x) = \int ae^x + b dx = ae^x + bx + c$$

Logarithmusfunktion Basis e

$$F(x) = \int \ln x dx = x \ln x - x + c$$

$$F(x) = \int a \ln x dx = a(x \ln x - x) + c$$

$$F(x) = \int a \ln x + b dx = a(x \ln x - x) + bx + c$$

Rationale Funktion mit linearer Funktion im Nenner

$$F(x) = \int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + c$$

$$F(x) = \int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln |ax+b| + c$$

Trigonometrische Funktionen

$$F(x) = \int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$F(x) = \int \cos x dx = \sin x + c$$

4.3.3 Integrationsregeln

Integration von Summen und Differenzen

$$\int f(x) dx + \int g(x) dx = \int f(x) + g(x) dx$$

Integration mit konstanten Faktor

$$\int c \cdot f(x) dx = c \int f(x) dx$$

Integration mit vertauschten Grenzen

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

Integrationsgrenzen zusammenfassen

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$$

Ableitung des Nenners im Zähler

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + c$$

Innere Funktion ist abgeleiteter Faktor

$$\int g'(x) f(g(x)) dx = F(x) + c$$

Innere Funktion ist eine lineare Funktion

$$\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(x) + c$$

4.3.4 Graph der Stammfunktion

Zu jeder Funktion f(x) gibt es eine Menge von Stammfunktionen F(x), die um c in y-Richtung verschoben sind.

Funktion f(x)	Stammfunktion F(x)
NST f(x) = 0	Extremwert (HT)
VZW von + nach -	HP
VZW von - nach +	TP
NST ohne VZW	TEP
Extremwert	WP
f(x) > 0 (positiv)	sms
f(x) < 0 (negativ)	smf

4.4 Kurvendiskussion

4.4.1 Ganzrationale Funktion

Formen der Polynomfunktion - ganzrationalen Funktion

- Summendarstellung der Polynomfunktion

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} \dots + a_1 x^1 + a_0$$

oder

$$f(x) = ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} \dots$$

Die höchste Potenz (n) gibt den Grad der Polynomfunktion an.

- Produktdarstellung (faktorierte Form) der Polynomfunktion

Ist der Grad des Polynoms gleich der Anzahl der (reellen) Nullstellen, kann man die Funktion in faktorisierter Form schreiben.

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \dots$$

Nullstellen: $x_1, x_2, x_3 \dots$

Linearfaktoren: $(x - x_1), (x - x_2) \dots$

a=Koeffizient der höchsten Potenz

Grad 1: Lineare Funktion

$$f(x) = ax + b$$

Grad 2: Quadratische Funktion

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Grad 3: Kubische Funktion

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

Grad 4: Biquadratische Funktionen

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)$$

Grad 5:

$$f(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$$

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)(x - x_5)$$

Definitions- und Wertebereich

- Definitionsbereich $\mathbb{D} = \mathbb{R}$

- Wertebereich

- höchster Exponent ungerade:

$$\mathbb{W} = \mathbb{R}$$

- höchster Exponent gerade:

$$\mathbb{W} = [\text{absoluter Tiefpunkt}; \infty[$$

$$\mathbb{W} =] - \infty; \text{absoluter Hochpunkt}]$$

Symmetrie

Punktsymmetrie zum Ursprung:

$$f(-x) = -f(x)$$

$f(x)$ hat nur ungerade Exponenten

Achsensymmetrie zur y-Achse:

$$f(-x) = f(x)$$

$f(x)$ hat nur gerade Exponenten

Schnittpunkte mit der x-Achse - Nullstellen

- Funktionsterm gleich Null setzen und die Gleichung lösen. (siehe Algebra-Gleichungen)

$$f(x) = 0 \quad ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} \dots = 0$$

- höchster Exponent ungerade

$1 \leq$ Anzahl der Nullstellen \leq Grad des Polynoms

- höchster Exponent gerade

$0 \leq$ Anzahl der Nullstellen \leq Grad des Polynoms

Faktorierte Polynomfunktion

- Nullstellen aus faktorisierten Polynom ablesen.

$$a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \dots = 0$$

Nullstellen: $x_1, x_2, x_3 \dots$

Graph oberhalb/unterhalb der x-Achse

Bei ganzrationalen Funktionen kann sich das Vorzeichen nur an den Nullstellen ändern. Einen beliebigen Wert kleiner bzw. größer als die Nullstelle wählen und das Vorzeichen des Funktionswerts in die Tabelle eintragen.

Vorzeichentabelle mit $f(x)$

	$x <$	x_1	$< x$
$f(x)$	+	0	-
Graph	oberhalb	0	unterhalb

+ $f(x) > 0$ Graph oberhalb der x-Achse

- $f(x) < 0$ Graph unterhalb der x-Achse

Grenzwert - Verhalten im Unendlichen

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} \dots + a_1 x^1 + a_0 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \pm \infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \pm \infty$$

Das Vorzeichen des Glieds mit der höchsten Potenz und der Grad des Polynoms bestimmen das Vorzeichen des Grenzwerts.

Grenzwert gegen plus Unendlich

a_n	Grad	Grenzwert
+	gerade	$\lim_{x \rightarrow \infty} a_n \cdot \infty^n = \infty$
+	ungerade	$\lim_{x \rightarrow \infty} a_n \cdot \infty^n = \infty$
-	gerade	$\lim_{x \rightarrow \infty} a_n \cdot \infty^n = -\infty$
-	ungerade	$\lim_{x \rightarrow \infty} a_n \cdot \infty^n = -\infty$

Grenzwert gegen minus Unendlich

a_n	Grad	Grenzwert
+	gerade	$\lim_{x \rightarrow -\infty} a_n \cdot (-\infty)^n = \infty$
+	ungerade	$\lim_{x \rightarrow -\infty} a_n \cdot (-\infty)^n = -\infty$
-	gerade	$\lim_{x \rightarrow -\infty} a_n \cdot (-\infty)^n = -\infty$
-	ungerade	$\lim_{x \rightarrow -\infty} a_n \cdot (-\infty)^n = \infty$

Ableitung

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} \dots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0$$

Die Ableitungen bildet man durch: Exponent vorziehen und vom Exponenten 1 abziehen.

Die erste Ableitung $f'(x)$ gibt die Steigung der Funktion an der Stelle x an.

Die zweite Ableitung $f''(x)$ gibt die Krümmung der Funktion an der Stelle x an.

$$f'(x) = a_n \cdot n \cdot x^{n-1} + a_{n-1} \cdot (n-1) \cdot x^{n-2} \dots + a_2 \cdot 2 \cdot x^{2-1} + a_1$$

$$f(x) = ax^n \quad f'(x) = nax^{n-1}$$

Grad 1: Lineare Funktion

$$f(x) = ax + b \quad f'(x) = a$$

Grad 2: Quadratische Funktion

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad f'(x) = 2ax + b$$

Grad 3: Kubische Funktion

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

Grad 4: Biquadratische Funktionen

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

$$f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$$

Extremwerte und die 2.Ableitung

In den Extremwerten hat $f(x)$ eine horizontale Tangente (HT).

- $f'(x) = 0$ (Notwendige Bedingung)

Die Nullstellen der 1. Ableitung bestimmen $(x_0, x_1..)$.

In diesen Nullstellen $(x_0, x_1..)$ kann die Funktion einen Hochpunkt, Tiefpunkt oder Terrassenpunkt (Sattelpunkt) besitzen.

Einsetzen der Nullstellen $x_0, x_1..$ in die 2. Ableitung (Hinreichende Bedingung)

- $f''(x_0) > 0(LK) \Rightarrow$ Tiefpunkt (Minimum) bei x_0
- $f''(x_0) < 0(RK) \Rightarrow$ Hochpunkt (Maximum) bei x_0
- $f''(x_0) = 0 \wedge f'''(x_0) \neq 0 \Rightarrow$ Terrassenpunkt

Extremwerte und das Monotonieverhalten

Extremwerte sind Hochpunkte (Maxima) bzw. Tiefpunkte (Minima) der Funktion. In den Extremwerten hat $f(x)$ eine horizontale Tangente (HT).

- $f'(x) = 0$ (Notwendige Bedingung)

Die Nullstellen der 1. Ableitung bestimmen $(x_0, x_1..)$.

In diesen Nullstellen $(x_0, x_1..)$ kann die Funktion einen Hochpunkt, Tiefpunkt oder Terrassenpunkt (Sattelpunkt) besitzen.

Zur Unterscheidung werden die Nullstellen in die Vorzeichen-tabelle eintragen. Einen Wert kleiner bzw. größer als die Nullstelle wählen und das Vorzeichen von $f'(x)$ in die Tabelle eintragen. (Hinreichende Bedingung)

- Hochpunkt (HP)

Monotonieverhalten ändert sich von streng monoton steigend (sms) nach streng monoton fallend (smf).

Vorzeichenwechsel (VZW) der 1.Ableitung $f'(x)$ von Plus nach Minus.

	$x <$	x_1	$< x$
$f'(x)$	+	0	-
Graph	smf	HP	smf

- Tiefpunkt (TP)

Monotonieverhalten ändert sich von streng monoton fallend (smf) nach streng monoton steigend (sms).

Vorzeichenwechsel (VZW) der 1.Ableitung $f'(x)$ von Minus nach Plus.

	$x <$	x_1	$< x$
$f'(x)$	-	0	+
Graph	smf	TP	smf

- Terrassenpunkt (TEP)

Monotonieverhalten ändert sich nicht. Kein Vorzeichenwechsel (VZW) der 1.Ableitung.

	$x <$	x_1	$< x$		$x <$	x_1	$< x$
$f'(x)$	+	0	+	$f'(x)$	-	0	-
Graph	smf	TEP	smf	Graph	smf	TEP	smf

Die Ränder des Definitionsbereichs (Definitionslücken) müssen in die Tabelle mit eingetragen werden.

Wendepunkte und 3.Ableitung

Im Wendepunkt und im Flachpunkt ist das Krümmungsverhalten gleich Null.

- $f''(x) = 0$ (Notwendige Bedingung)

Die Nullstellen der 2. Ableitung bestimmen $(x_0, x_1..)$.

Einsetzen der Nullstellen $x_0, x_1..$ in die 3. Ableitung (Hinreichende Bedingung)

- $f'''(x_0) \neq 0 \Rightarrow$ Wendepunkt

Wendepunkte und das Krümmungsverhalten

Im Wendepunkt und im Flachpunkt ist das Krümmungsverhalten gleich Null.

- $f''(x) = 0$ (Notwendige Bedingung)

Die Nullstellen der 2. Ableitung bestimmen ($x_0, x_1..$). Zur Unterscheidung zwischen Wendepunkt und Flachpunkt werden die Nullstellen in die Vorzeichen-tabelle eintragen. (Hinreichende Bedingung) Einen Wert kleiner bzw. größer als die Nullstelle wählen und das Vorzeichen von $f''(x)$ in die Tabelle eintragen.

- Wendepunkt (WP)

Das Krümmungsverhalten ändert sich von rechtsgekrümmt (RK) nach linksgekrümmt (LK) oder von linksgekrümmt nach rechtsgekrümmt.

Vorzeichenwechsel (VZW) der 2.Ableitung $f''(x)$ von Plus nach Minus oder von Minus nach Plus.

	$x <$	x_1	$< x$		$x <$	x_1	$< x$
$f''(x)$	+	0	-	$f''(x)$	-	0	+
Graph	LK	WP	RK	Graph	RK	WP	LK

- Flachpunkt (FP)

Krümmungsverhalten ändert sich nicht

Kein Vorzeichenwechsel (VZW) der 2.Ableitung

	$x <$	x_1	$< x$		$x <$	x_1	$< x$
$f''(x)$	+	0	+	$f''(x)$	-	0	-
Graph	LK	FP	LK	Graph	RK	FP	RK

Die Ränder des Definitionsbereichs (Definitionslücken) müssen in die Tabelle mit eingetragen werden.

Stammfunktion von f(x)

Stammfunktionen bildet man durch: zum Exponent 1 addieren, durch den Exponenten dividieren.

$$f(x) = ax^n \quad F(x) = \frac{1}{n+1}ax^{n+1} + c$$

Unbestimmtes Integral: $F(x) = \int f(x) dx = F(x) + c$

Bestimmtes Integral

$$A = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = [F(x)]_{x_1}^{x_2} = F(x_2) - F(x_1)$$

4.4.2 Gebrochenrationale Funktion

Formen der gebrochenrationalen Funktion

Summendarstellung der gebrochenrationalen Funktion

$$f(x) = \frac{Z(x)}{N(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} \dots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + b_{m-2} x^{m-2} \dots + b_2 x^2 + b_1 x^1 + b_0}$$

Zählerpolynom vom Grad n

$$Z(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} \dots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0$$

Nennerpolynom vom Grad m:

$$N(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + b_{m-2} x^{m-2} \dots + b_2 x^2 + b_1 x^1 + b_0$$

Produkt-darstellung (faktorierte Form) der gebrochenrationalen Funktion

$$f(x) = a \frac{(x - z_1)(x - z_2)(x - z_3) \dots}{(x - n_1)(x - n_2)(x - n_3) \dots}$$

$z_1, z_2, z_3 \dots$ Nullstellen des Zählers

$n_1, n_2, n_3 \dots$ Nullstellen des Nenners

Definitions- und Wertebereich

Definitionsbereich:

Nullstellen des Nennerpolynoms ausschließen.

Nennerpolynom: $N(x) = 0$

$n_1, n_2, n_3 \dots$ Nullstellen des Nenners (Definitionslücken)

$$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{n_0, n_1, n_2, \dots\}$$

(siehe Algebra - Gleichungen)

Wertebereich:

Bestimmung nur nach Kurvendiskussion möglich.

Symmetrie

Punktsymmetrie zum Ursprung:

$$f(-x) = -f(x)$$

Achsensymmetrie zur y-Achse:

$$f(-x) = f(x)$$

Schnittpunkte mit der x-Achse - Nullstellen

Zählerpolynom gleich Null setzen.

Zählerpolynom: $Z(x) = 0$

$z_1, z_2, z_3 \dots$ Nullstellen des Zählers

(siehe Algebra - Gleichungen)

Verhalten im Unendlichen - Grenzwert - Asymptoten

- Zählergrad > Nennergrad

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \pm \infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \pm \infty$$

Das Vorzeichen der Glieder mit der höchsten Potenzen und der Grad der höchsten Exponenten, bestimmen das Vorzeichen des Grenzwerts.

Grenzwert gegen plus Unendlich

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_m} \cdot \frac{(\infty)^n}{(\infty)^m} = \pm \infty$$

Grenzwert gegen minus Unendlich

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{a_n}{b_m} \cdot \frac{(-\infty)^n}{(-\infty)^m} = \pm \infty$$

- Zählergrad = Nennergrad + 1

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$$

Polynomdivision - schiefe Asymptote

- Zählergrad=Nennergrad

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \frac{a_n}{b_m}$$

horizontale Asymptote $y = \frac{a_n}{b_m}$

- Zählergrad<Nennergrad

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$$

horizontale Asymptote $y = 0$

Verhalten an den Definitionslücken - Grenzwert - Asymptoten

$$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{x_0, x_1..\}$$

$x_0, x_1..$ sind Definitionslücken von f(x)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty \Rightarrow$$

Vertikale Asymptote: $x = x_0$

Ableitung

Die Ableitungen bildet man durch die Quotientenregel,

$$f'(x) = \frac{Z'(x) \cdot N(x) - Z(x) \cdot N'(x)}{(N(x))^2}$$

Die erste Ableitung $f'(x)$ gibt die Steigung der Funktion an der Stelle x an.

Die zweite Ableitung $f''(x)$ gibt die Krümmung der Funktion an der Stelle x an.

Extremwerte und die 2. Ableitung

In den Extremwerten hat f(x) eine horizontale Tangente (HT).

- $f'(x) = 0$ (Notwendige Bedingung)

Die Nullstellen der 1. Ableitung bestimmen $(x_0, x_1..)$.

In diesen Nullstellen $(x_0, x_1..)$ kann die Funktion einen Hochpunkt, Tiefpunkt oder Terrassenpunkt (Sattelpunkt) besitzen.

Einsetzen der Nullstellen $x_0, x_1..$ in die 2. Ableitung (Hinreichende Bedingung)

- $f''(x_0) > 0(LK) \Rightarrow$ Tiefpunkt (Minimum) bei x_0
- $f''(x_0) < 0(RK) \Rightarrow$ Hochpunkt (Maximum) bei x_0
- $f''(x_0) = 0 \wedge f'''(x_0) \neq 0 \Rightarrow$ Terrassenpunkt

Extremwerte und das Monotonieverhalten

Extremwerte sind Hochpunkte (Maxima) bzw. Tiefpunkte (Minima) der Funktion. In den Extremwerten hat f(x) eine horizontale Tangente (HT).

- $f'(x) = 0$ (Notwendige Bedingung)

Die Nullstellen der 1. Ableitung bestimmen $(x_0, x_1..)$.

In diesen Nullstellen $(x_0, x_1..)$ kann die Funktion einen Hochpunkt, Tiefpunkt oder Terrassenpunkt (Sattelpunkt) besitzen.

Zur Unterscheidung werden die Nullstellen in die Vorzeichentabelle eintragen. Einen Wert kleiner bzw. größer als die Nullstelle wählen und das Vorzeichen von $f'(x)$ in die Tabelle eintragen. (Hinreichende Bedingung)

- Hochpunkt (HP)

Monotonieverhalten ändert sich von streng monoton steigend (sms) nach streng monoton fallend (smf).

Vorzeichenwechsel (VZW) der 1.Ableitung $f'(x)$ von Plus nach Minus.

	$x <$	x_1	$< x$
$f'(x)$	+	0	-
Graph	smf	HP	smf

- Tiefpunkt (TP)

Monotonieverhalten ändert sich von streng monoton fallend (smf) nach streng monoton steigend (sms).

Vorzeichenwechsel (VZW) der 1.Ableitung $f'(x)$ von Minus nach Plus.

	$x <$	x_1	$< x$
$f'(x)$	-	0	+
Graph	smf	TP	smf

- Terrassenpunkt (TEP)

Monotonieverhalten ändert sich nicht. Kein Vorzeichenwechsel (VZW) der 1.Ableitung.

	$x <$	x_1	$< x$		$x <$	x_1	$< x$
$f'(x)$	+	0	+	$f'(x)$	-	0	-
Graph	smf	TEP	smf	Graph	smf	TEP	smf

Die Ränder des Definitionsbereichs (Definitionslücken) müssen in die Tabelle mit eingetragen werden.

Wendepunkt und die 3.Ableitung

Im Wendepunkt und im Flachpunkt ist das Krümmungsverhalten gleich Null.

- $f''(x) = 0$ (Notwendige Bedingung)

Die Nullstellen der 2. Ableitung bestimmen $(x_0, x_1..)$.

Einsetzen der Nullstellen $x_0, x_1..$ in die 3. Ableitung (Hinreichende Bedingung)

- $f'''(x_0) \neq 0 \Rightarrow$ Wendepunkt

Wendepunkte und das Krümmungsverhalten

Im Wendepunkt und im Flachpunkt ist das Krümmungsverhalten gleich Null.

- $f''(x) = 0$ (Notwendige Bedingung)

Die Nullstellen der 2. Ableitung bestimmen $(x_0, x_1..)$. Zur Unterscheidung zwischen Wendepunkt und Flachpunkt werden die Nullstellen in die Vorzeichentabelle eintragen. (Hinreichende Bedingung) Einen Wert kleiner bzw. größer als die Nullstelle wählen und das Vorzeichen von $f''(x)$ in die Tabelle eintragen.

- Wendepunkt (WP)

Das Krümmungsverhalten ändert sich von rechtsgekrümmt (RK) nach linksgekrümmt (LK) oder von linksgekrümmt nach rechtsgekrümmt.

Vorzeichenwechsel (VZW) der 2.Ableitung $f''(x)$ von Plus nach Minus oder von Minus nach Plus.

	$x <$	x_1	$< x$		$x <$	x_1	$< x$
$f''(x)$	+	0	-	$f''(x)$	-	0	+
Graph	LK	WP	RK	Graph	RK	WP	LK

• Flachpunkt (FP)

Krümmungsverhalten ändert sich nicht

Kein Vorzeichenwechsel (VZW) der 2.Ableitung

	$x <$	x_1	$< x$		$x <$	x_1	$< x$
$f''(x)$	+	0	+	$f''(x)$	-	0	-
Graph	LK	FP	LK	Graph	RK	FP	RK

Die Ränder des Definitionsbereichs (Definitionslücken) müssen in die Tabelle mit eingetragen werden.

4.4.3 Exponentialfunktion (Basis e)

Formen der Exponentialfunktion

Exponentialfunktion

$$f(x) = e^x$$

Allgemeine Exponentialfunktion

$$f(x) = ae^{b(x-c)} + d$$

(siehe Funktionen - Exponentialfunktion)

Definitions- und Wertebereich

$$f(x) = e^x$$

$$\mathbb{D} = \mathbb{R} \quad \mathbb{W} = \mathbb{R}^+$$

$$f(x) = ae^{b(x-c)} + d$$

$$\mathbb{D} = \mathbb{R}$$

$$a > 0 \quad \mathbb{W} = [d; \infty[$$

$$a < 0 \quad \mathbb{W} =]-\infty; d]$$

Schnittpunkte mit der x-Achse - Nullstellen

$$f(x) = e^x \quad e^x > 0 \Rightarrow \text{keine Nullstellen}$$

$$f(x) = ae^{b(x-c)} + d$$

$$ae^{b(x-c)} + d = 0 \quad / -d$$

$$ae^{b(x-c)} = -d \quad / : a$$

$$e^{b(x-c)} = \frac{-d}{a} \quad / \ln$$

$$\frac{-d}{a} > 0$$

$$b(x-c) = \ln\left(\frac{-d}{a}\right) \quad / : b \quad / + c$$

$$x = \frac{\ln\left(\frac{-d}{a}\right)}{b} + c$$

$$\frac{-d}{a} \leq 0 \quad \text{keine Nullstellen}$$

Grenzwert - Asymptoten

$$f(x) = e^x$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \Rightarrow \text{horizontale Asymptote } y=0$$

$$f(x) = ae^{b(x-c)} + d$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} ae^{b(x-c)} + d$$

Schrittweise Berechnung für $b > 0$ und $a > 0$:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} b(\infty - c) = \infty \quad \lim_{x \rightarrow \infty} e^\infty = \infty \quad \lim_{x \rightarrow \infty} a\infty + d = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} b(-\infty - c) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-\infty} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a \cdot 0 + d = d \Rightarrow \text{HA: } y = d$$

a	b	Grenzwert $\rightarrow +\infty$	Asymptote
+	+	$\lim_{x \rightarrow \infty} ae^{b(x-c)} + d = \infty$	keine
-	+	$\lim_{x \rightarrow \infty} ae^{b(x-c)} + d = -\infty$	keine
+	-	$\lim_{x \rightarrow \infty} ae^{b(x-c)} + d = d$	$y = d$
-	-	$\lim_{x \rightarrow \infty} ae^{b(x-c)} + d = d$	$y = d$

a	b	Grenzwert $\rightarrow -\infty$	Asymptote
+	+	$\lim_{x \rightarrow -\infty} ae^{b(x-c)} + d = d$	$y = d$
-	+	$\lim_{x \rightarrow -\infty} ae^{b(x-c)} + d = d$	$y = d$
+	-	$\lim_{x \rightarrow -\infty} ae^{b(x-c)} + d = \infty$	keine
-	-	$\lim_{x \rightarrow -\infty} ae^{b(x-c)} + d = -\infty$	keine

Ableitung

$$f(x) = e^x \quad f'(x) = e^x \quad f''(x) = e^x$$

Ableitung mit der Kettenregel

$$f(x) = e^{bx} \quad f'(x) = be^{bx} \quad f''(x) = b^2e^{bx}$$

$$f(x) = ae^{b(x-c)} + d \quad f'(x) = a \cdot be^{b(x-c)}$$

$$f''(x) = a \cdot b^2e^{b(x-c)}$$

Monotonieverhalten

$$f(x) = e^x \quad f'(x) = e^x$$

$e^x > 0 \Rightarrow$ streng monoton steigend

$$f(x) = ae^{b(x-c)} + d$$

$$f'(x) = a \cdot be^{b(x-c)}$$

$$e^{b(x-c)} > 0$$

$a \cdot b > 0 \Rightarrow$ streng monoton steigend (sms)

$a \cdot b < 0 \Rightarrow$ streng monoton fallend (smf)

a	b	Monotonieverhalten
+	+	sms
-	+	smf
+	-	smf
-	-	sms

Ableitung

$f(x) = e^x \quad f'(x) = e^x$

Ableitung mit Kettenregel

$f(x) = e^{ax} \quad f'(x) = ae^{ax}$

$f(x) = ae^{b(x-c)} + d \quad f'(x) = a \cdot be^{b(x-c)}$

Krümmungsverhalten

$f(x) = e^x \quad f''(x) = e^x$

$e^x > 0 \Rightarrow$ linksgekrümmt (LK)

$f(x) = ae^{b(x-c)} + d$

$f''(x) = a \cdot b^2 e^{b(x-c)}$

$e^{b(x-c)} > 0$

$a > 0 \Rightarrow$ linksgekrümmt (LK)

$a < 0 \Rightarrow$ rechtsgekrümmt (RK)

Stammfunktion von f(x) - unbestimmtes Integral

$f(x) = e^x \quad F(x) = e^x + k$

$f(x) = ae^{b(x-c)} \quad F(x) = \frac{a}{b} e^{b(x-c)} + k$

4.4.4 Logarithmusfunktion (Basis e)

Formen der Logarithmusfunktion

Logarithmusfunktion

$f(x) = \ln x$

Allgemeine Logarithmusfunktion

$f(x) = a \ln(b(x-c)) + d$

(siehe Funktionen - Logarithmusfunktion)

Definitions- und Wertebereich

$f(x) = \ln x$

$\mathbb{W} = \mathbb{R}$

$\mathbb{D} = \mathbb{R}^+$

$f(x) = a \ln b(x-c) + d$

$\mathbb{W} = \mathbb{R}$

Definitionsbereich: $bx - c > 0$

• $b > 0 \quad \mathbb{D} =]c; \infty[$

• $b < 0 \quad \mathbb{D} =]-\infty; c[$

Schnittpunkte mit der x-Achse - Nullstellen

$f(x) = \ln(x)$

$\ln(x) = 0 \quad /e$

$x = e^0$

$x = 1$

$f(x) = a \ln(b(x-c)) + d$

$a \ln(b(x-c)) + d = 0 \quad / -d$

$a \ln(b(x-c)) = -d \quad / : a$

$\ln(b(x-c)) = \frac{-d}{a} \quad /e$

$b(x-c) = e^{\left(\frac{-d}{a}\right)} \quad / : b \quad / + c$

$e^{\left(\frac{-d}{a}\right)}$

$x = \frac{e^{\left(\frac{-d}{a}\right)}}{b} + c$

Grenzwert - Asymptoten

$f(x) = \ln(x)$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty \Rightarrow$ vertikale Asymptote: $x = 0$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln(x) = \infty$

$f(x) = a \ln(b(x-c)) + d$

Schrittweise Berechnung für $b > 0$ und $a > 0$:

$\lim_{x \rightarrow \infty} b(\infty - c) = \infty \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \infty = \infty \quad \lim_{x \rightarrow \infty} a\infty + d = \infty$

$\lim_{x \rightarrow c^+} b(c^+ - c) = 0^+ \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln 0^+ = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} a \cdot (-\infty) + d = -\infty \Rightarrow$ VA: $x = c$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} a \cdot (-\infty) + d = -\infty \Rightarrow$ VA: $x = c$

a	b	Grenzwert $\rightarrow \pm\infty$	Asymptote
+	+	$\lim_{x \rightarrow \infty} a \ln b(x-c) + d = \infty$	keine
-	+	$\lim_{x \rightarrow \infty} a \ln b(x-c) + d = -\infty$	keine
+	-	$\lim_{x \rightarrow -\infty} a \ln b(x-c) + d = \infty$	keine
-	-	$\lim_{x \rightarrow -\infty} a \ln b(x-c) + d = -\infty$	keine

a	b	Grenzwert $\rightarrow c$	Asymptote
+	+	$\lim_{x \rightarrow c^+} a \ln b(x-c) + d = -\infty$	$x = c$
-	+	$\lim_{x \rightarrow c^+} a \ln b(x-c) + d = \infty$	$x = c$
+	-	$\lim_{x \rightarrow c^-} a \ln b(x-c) + d = -\infty$	$x = c$
-	-	$\lim_{x \rightarrow c^-} a \ln b(x-c) + d = \infty$	$x = c$

Ableitung

$f(x) = \ln(x) \quad f'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$

$f''(x) = -x^{-2} = \frac{-1}{x^2}$

Ketten- und Quotientenregel :

$$f(x) = \ln bx \quad f'(x) = \frac{b}{bx} = \frac{1}{x}$$

$$f''(x) = -x^{-2} = \frac{-1}{x^2}$$

$$f(x) = a \ln(b(x-c)) + d \quad f'(x) = \frac{a \cdot b}{b(x-c)}$$

$$f''(x) = \frac{-a \cdot b^2}{(b(x-c))^2}$$

Monotonieverhalten

$$f(x) = \ln(x) \quad f'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$$

$$\frac{1}{x} \Rightarrow \text{streng monoton steigend} \quad \mathbb{D} = \mathbb{R}^+$$

$$f(x) = a \ln(b(x-c)) + d \quad f'(x) = \frac{a \cdot b}{b(x-c)}$$

$$b(x-c) > 0$$

a	b	Monotonieverhalten
+	+	sms
-	+	smf
+	-	smf
-	-	sms

Krümmungsverhalten

$$f(x) = \ln(x) \quad f''(x) = -x^{-2} = \frac{-1}{x^2}$$

$$\frac{-1}{x^2} < 0 \Rightarrow \text{rechtsgekrümmt (RK)}$$

$$f(x) = a \ln(b(x-c)) + d \quad f''(x) = \frac{-a \cdot b^2}{(b(x-c))^2}$$

$$(b(x-c))^2 > 0$$

$$a > 0 \Rightarrow \text{rechtsgekrümmt (RK)}$$

$$a < 0 \Rightarrow \text{linkssgekrümmt (LK)}$$

Stammfunktion von f(x) - unbestimmtes Integral

$$f(x) = \ln(x) \quad F(x) = x \ln(x) - x + c$$

4.5 Aufstellen von Funktionsgleichungen

4.5.1 Ganzrationale Funktion

Eine ganzrationale Funktion vom Grad n ist durch n+1 Bedingungen eindeutig festgelegt.

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} \dots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0$$

Um die n+1 Koeffizienten (a_n, a_{n-1}, \dots, a_0) berechnen zu können, sind n+1 Gleichungen (n+1 Bedingungen) nötig.

Funktion vom Grad 2

Um die 3 Koeffizienten (a,b,c) berechnen zu können, sind 3 Gleichungen (3 Bedingungen) nötig.

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$f'(x) = 2ax + b$$

Funktion vom Grad 3

Um die 4 Koeffizienten (a,b,c,d) berechnen zu können, sind 4 Gleichungen (4 Bedingungen) nötig. $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$f''(x) = 6ax + 2b$$

Funktion vom Grad 4

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

$$f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$$

$$f''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c$$

Bedingungen für die Funktion	Gleichung
Punkt $P(x_0/y_0)$	$f(x_0) = y_0$
Nullstelle an der Stelle x_0	$f(x_0) = 0$
Punkt auf der y-Achse y_0	$f(0) = y_0$
Extremwert an der Stelle x_0	$f'(x_0) = 0$
Horizontale Tangente an der Stelle x_0	$f'(x_0) = 0$
Berührungspunkt der x-Achse an der Stelle x_0	$f(x_0) = 0$ $f'(x_0) = 0$
Tangente: $y = mx + t$ in x_0	$y_0 = mx_0 + t$ $f(x_0) = y_0$ $f'(x_0) = m$
Normale: $y = mx + t$ in x_0	$y_0 = mx_0 + t$ $f(x_0) = y_0$ $f'(x_0) = -\frac{1}{m}$
Wendepunkt an der Stelle x_0	$f''(x_0) = 0$
Terrassenpunkt an der Stelle x_0	$f'(x_0) = 0$ $f''(x_0) = 0$
Steigung m an der Stelle x_0	$f'(x_0) = m$
Hoch-/Tiefpunkt(x_0/y_0)	$f(x_0) = y_0$ $f'(x_0) = 0$
Terrassenpunkt(x_0/y_0)	$f(x_0) = y_0$ $f'(x_0) = 0$ $f''(x_0) = 0$
Wendepunkt(x_0/y_0)	$f(x_0) = y_0$ $f''(x_0) = 0$
Wendetangente: $y = mx + t$ in x_0	$y_0 = mx_0 + t$ $f(x_0) = y_0$ $f'(x_0) = m$ $f''(x_0) = 0$
Steigung m im Punkt $P(x_0/y_0)$	$f(x_0) = y_0$ $f'(x_0) = m$
Achsensymmetrie $f(x) = f(-x)$	Glieder mit ungeraden Exponenten entfallen
Punktsymmetrie $f(x) = -f(-x)$	Glieder mit geraden Exponenten entfallen

5 Stochastik

5.1 Statistik

5.1.1 Mittelwert - Median - Modalwert

Arithmetisches Mittel

Durchschnittswert \bar{x} der Datenreihe $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$

n - Anzahl der Elemente

$$\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n)$$

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

Median

Zentralwert der geordneten Datenreihe

n - Anzahl der Elemente

$$x_{med} = \frac{x_{n/2} + x_{n/2+1}}{2} \text{ wenn n gerade}$$

$$x_{med} = x_{(n+1)/2} \text{ wenn n ungerade}$$

Spannweite

Differenz zwischen dem größten und kleinsten Wert der geordneten Datenreihe

$$d = x_{max} - x_{min}$$

Häufigkeitstabelle - Modalwert

Wert aus der Datenreihe, der am häufigsten vorkommt

5.2 Kombinatorik

5.2.1 Grundlagen

Fakultät

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$$

Binomialkoeffizient

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad n \text{ über } k$$

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

5.2.2 Anzahl der Anordnungen - Permutation

Anzahl der Anordnungen ohne Wiederholung - alle Elemente verschieden

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$$

Anzahl der Anordnungen ohne Wiederholung - nicht alle Elemente verschieden

$$\frac{n!}{k_1!k_2! \cdot \dots \cdot k_m!}$$

5.2.3 Auswahl mit Beachtung der Reihenfolge - Variation

Auswahl ohne Wiederholung der Elemente

$$\frac{n!}{(n-k)!} = k! \cdot \binom{n}{k}$$

Auswahl mit Wiederholung der Elemente

$$n^k$$

5.2.4 Auswahl ohne Beachtung der Reihenfolge - Kombination

Auswahl ohne Wiederholung der Elemente

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k} \quad n \text{ über } k$$

Auswahl mit Wiederholung der Elemente

$$\binom{n+k-1}{k}$$

5.3 Wahrscheinlichkeit

5.3.1 Zufallsexperiment

Ergebnis - Ereignis

- Ein Zufallsexperiment ist beliebig oft wiederholbar
- Die Elementarergebnisse (Stichproben, Ausgänge) $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots$ des Zufallsexperiment sind nicht vorhersagbar
- Die Menge aller Ergebnisse heißt Ergebnisraum Ω
- $|\Omega|$ ist die Anzahl der Ergebnisse von Ω
- Ein Ereignis A ist eine Teilmenge von Ω
- $|A|$ ist die Anzahl der Elemente von A
- Die Menge aller Ergebnisse heißt Ereignisraum P

Schnittmenge \cap von Ereignissen

$$\mathbb{A} = \{c; d; e\}$$

$$\mathbb{B} = \{a; b; c; d\}$$

$$\mathbb{A} \cap \mathbb{B} = \{c; d\}$$

Alle Ergebnisse die in A und zugleich in B enthalten sind.

Vereinigungsmenge \cup von Ereignissen

$$\mathbb{A} = \{c; d; e\}$$

$$\mathbb{B} = \{a; b; c; d\}$$

$$\mathbb{A} \cup \mathbb{B} = \{a; b; c; d; e\}$$

Alle Ergebnisse die in A oder B enthalten sind.

Differenz \setminus von Ereignissen

$$\mathbb{A} = \{c; d; e\}$$

$$\mathbb{B} = \{a; b; c; d\}$$

$$\mathbb{A} \setminus \mathbb{B} = \{e\}$$

Alle Ergebnisse die in A, aber nicht in B enthalten sind.

Gegenereignis \bar{A}

$$\bar{A} = \Omega \setminus A$$

Alle Ergebnisse die in Ω , aber nicht in A enthalten sind.

Vereinbare - unvereinbare Ereignisse

$$\mathbb{A} \cap \mathbb{B} = \{\} \Leftrightarrow \text{unvereinbare Ereignisse}$$

$$\mathbb{A} \cap \mathbb{B} = \{a, b, \dots\} \Leftrightarrow \text{vereinbare Ereignisse}$$

Rechengesetze

- Kommutativgesetz

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

- Assoziativgesetz

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

- Distributivgesetz
 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- De Morgan
 $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
 $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
 $\overline{\overline{A}} = A$
- Neutrales Element
 $A \cup \emptyset = A$
 $A \cap \emptyset = \emptyset$
- Inverses Element
 $A \cap \overline{A} = \emptyset$
 $A \cup \overline{A} = \text{Grundmenge}$

5.3.2 Relative Häufigkeit

Definition

- $h_n(A) = \frac{k}{n}$
 n - Anzahl der Wiederholungen eines Versuchs
 A - Ereignis
 k - Absolute Häufigkeit von A
 $h(A)$ - Relative Häufigkeit von A

Eigenschaften

- $0 \leq h(A) \leq 1$
- $h(\emptyset) = 0$
- $h(\Omega) = 1$
- $h(A \cup B) = h(A) + h(B) - h(A \cap B)$
- $h(A \cup B) = h(A) + h(B)$, wenn $A \cap B = \emptyset$
- $h(A) = 1 - h(\overline{A})$

5.3.3 Wahrscheinlichkeit

Laplace-Wahrscheinlichkeit

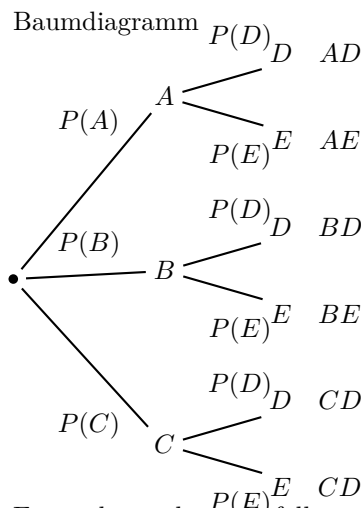
- $P(A) = \frac{k}{n}$
 Voraussetzung: Elementarergebnisse sind gleichwahrscheinlich
 n - Anzahl der Wiederholungen eines Versuchs
 A - Ereignis

k - Anzahl der günstigen Versuchsergebnisse für A
 $P(A)$ - Wahrscheinlichkeit von A

Eigenschaften

- $0 \leq P(A) \leq 1$
- $P(\emptyset) = 0$
- $P(\Omega) = 1$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, wenn $A \cap B = \emptyset$
- $P(A) = 1 - P(\overline{A})$
- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

5.3.4 Mehrstufige Zufallsexperimente



Es werden mehrere Zufallsexperimente nacheinander ausgeführt. Jedes mögliche Elementarereignis wird zu einem Knoten (A,B,C..) im Baumdiagramm.

Zufallsexperiment 1: $\Omega = \{A, B, C\}$

Zufallsexperiment 2: $\Omega = \{D, E\}$

Die Knoten werden durch Pfade verbunden und die Wahrscheinlichkeiten angetragen. ($P(A), P(B) \dots$)

Die Wahrscheinlichkeiten an einem Knoten müssen sich zu 1 addieren.

1. Pfadregel (Produktregel)

Die Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses (AD,AE..)ist gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten entlang dieses Pfades.

$$P(AD) = P(A) \cdot P(D) \quad P(AE) = P(A) \cdot P(E)$$

$$P(BD) = P(B) \cdot P(D) \quad P(BE) = P(B) \cdot P(E)$$

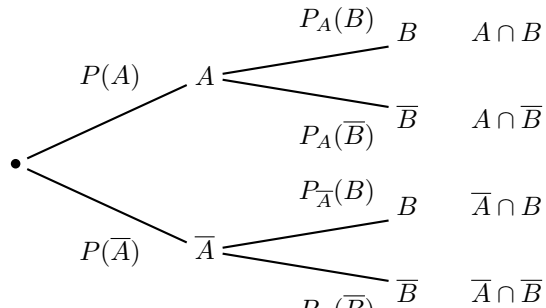
$$P(CD) = P(C) \cdot P(D) \quad P(CE) = P(C) \cdot P(E)$$

2. Pfadregel (Summenregel)

Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten ihrer Ergebnisse .

$$P(AD, CD) = P(AD) + P(CD)$$

5.3.5 Bedingte Wahrscheinlichkeit

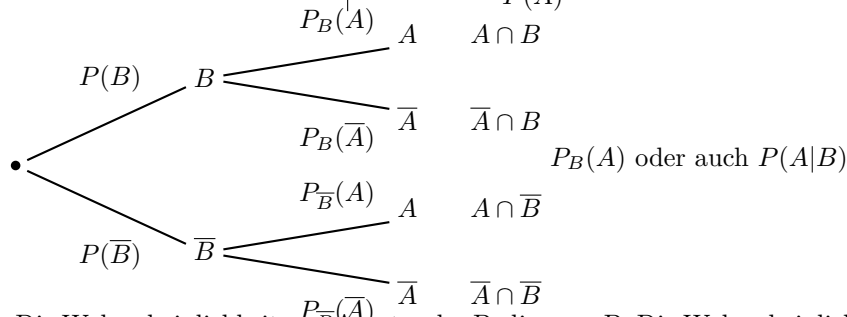


$P_A(B)$ oder auch $P(B|A)$

Die Wahrscheinlichkeit von B unter der Bedingung A. Die Wahrscheinlichkeit von B, wenn A schon eingetreten ist.

1. Pfadregel

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A) \cdot P_A(B) & P_A(B) &= \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \\ P(A \cap \bar{B}) &= P(A) \cdot P_A(\bar{B}) & P_A(\bar{B}) &= \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(A)} \\ P(\bar{A} \cap B) &= P(\bar{A}) \cdot P_{\bar{A}}(B) & P_{\bar{A}}(B) &= \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(\bar{A})} \\ P(\bar{A} \cap \bar{B}) &= P(\bar{A}) \cdot P_{\bar{A}}(\bar{B}) & P_{\bar{A}}(\bar{B}) &= \frac{P(\bar{A} \cap \bar{B})}{P(\bar{A})} \end{aligned}$$



Die Wahrscheinlichkeit von A unter der Bedingung B. Die Wahrscheinlichkeit von A, wenn

B schon eingetreten ist.

1. Pfadregel

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(B) \cdot P_B(A) & P_B(A) &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \\ P(\bar{A} \cap B) &= P(B) \cdot P_B(\bar{A}) & P_B(\bar{A}) &= \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(B)} \\ P(A \cap \bar{B}) &= P(\bar{B}) \cdot P_{\bar{B}}(A) & P_{\bar{B}}(A) &= \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} \\ P(\bar{A} \cap \bar{B}) &= P(\bar{B}) \cdot P_{\bar{B}}(\bar{A}) & P_{\bar{B}}(\bar{A}) &= \frac{P(\bar{A} \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} \end{aligned}$$

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$$

$$P(\bar{B}) = P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap \bar{B})$$

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B})$$

$$P(\bar{A}) = P(\bar{A} \cap B) + P(\bar{A} \cap \bar{B})$$

5.3.6 Vierfeldertafel

Relativer Häufigkeiten

Zusammenhang zwischen zwei Merkmalen.

1. Merkmal hat die Ausprägung A und \bar{A}

2. Merkmal hat die Ausprägung B und \bar{B}

	A	\bar{A}	Σ
B	$h(A \cap B)$ a	$h(\bar{A} \cap B)$ b	$h(B)$ a + b
\bar{B}	$h(A \cap \bar{B})$ c	$h(\bar{A} \cap \bar{B})$ d	$h(\bar{B})$ c + d
Σ	$h(A)$ a + c	$h(\bar{A})$ b + d	1 a + b + c + d

Relative Häufigkeit der Ausprägung

$$h(A), h(B), h(\bar{A}), h(\bar{B})$$

$$h(B) + h(\bar{B}) = 1 \quad h(A) + h(\bar{A}) = 1$$

Relative Häufigkeit von der Schnittmenge

$$h(A \cap B), h(\bar{A} \cap B), h(A \cap \bar{B}), h(\bar{A} \cap \bar{B})$$

$$h(B) = h(A \cap B) + h(\bar{A} \cap B)$$

$$h(\bar{B}) = h(A \cap \bar{B}) + h(\bar{A} \cap \bar{B})$$

$$h(A) = h(A \cap B) + h(A \cap \bar{B})$$

$$h(\bar{A}) = h(\bar{A} \cap B) + h(\bar{A} \cap \bar{B})$$

Relative Häufigkeiten von der Vereinigungsmenge

$$h(A \cup B), h(\bar{A} \cup B), h(A \cup \bar{B}), h(\bar{A} \cup \bar{B})$$

$$h(A \cup B) = h(A \cap B) + h(A \cap \bar{B}) + h(\bar{A} \cap B)$$

$$h(\bar{A} \cup B) = h(A \cap B) + h(\bar{A} \cap B) + h(A \cap \bar{B})$$

$$h(A \cup \bar{B}) = h(A \cap B) + h(A \cap \bar{B}) + h(\bar{A} \cap \bar{B})$$

$$h(\bar{A} \cap \bar{B}) = h(A \cap \bar{B}) + h(\bar{A} \cap B) + h(\bar{A} \cap \bar{B})$$

$$h(A \cup B) = 1 - h(\bar{A} \cap \bar{B})$$

$$h(\bar{A} \cup B) = 1 - h(A \cap \bar{B})$$

$$h(A \cup \bar{B}) = 1 - h(\bar{A} \cap B)$$

$$h(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - h(A \cap B)$$

Relative Häufigkeit unter einer Bedingung

$$h_A(B) = \frac{h(A \cap B)}{h(A)}$$

$$h_A(\bar{B}) = \frac{h(A \cap \bar{B})}{h(A)}$$

$$h_{\bar{A}}(B) = \frac{h(\bar{A} \cap B)}{h(\bar{A})}$$

$$h_{\bar{A}}(\bar{B}) = \frac{h(\bar{A} \cap \bar{B})}{h(\bar{A})}$$

Wahrscheinlichkeiten

Zusammenhang zwischen zwei Merkmalen.

1. Merkmal hat die Ausprägung A und \bar{A} .
2. Merkmal hat die Ausprägung B und \bar{B} .

	A	\bar{A}	Σ
B	$P(A \cap B)$ a	$P(\bar{A} \cap B)$ b	$P(B)$ a + b
\bar{B}	$P(A \cap \bar{B})$ c	$P(\bar{A} \cap \bar{B})$ d	$P(\bar{B})$ c + d
Σ	$P(A)$ a + c	$P(\bar{A})$ b + d	1 a + b + c + d

Wahrscheinlichkeit der Ausprägung

$$P(A), P(B), P(\bar{A}), P(\bar{B})$$

$$P(B) + P(\bar{B}) = 1$$

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

Wahrscheinlichkeit von der Schnittmenge

$$P(A \cap B), P(\bar{A} \cap B), P(A \cap \bar{B}), P(\bar{A} \cap \bar{B}).$$

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$$

$$P(\bar{B}) = P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap \bar{B})$$

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B})$$

$$P(\bar{A}) = P(\bar{A} \cap B) + P(\bar{A} \cap \bar{B})$$

Berechnungen mit den bedingten Wahrscheinlichkeiten

$$P(A \cap B) = P_A(B) \cdot P(A)$$

$$P(A \cap \bar{B}) = P_A(\bar{B}) \cdot P(A)$$

$$P(\bar{A} \cap B) = P_{\bar{A}}(B) \cdot P(\bar{A})$$

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P_{\bar{A}}(\bar{B}) \cdot P(\bar{A})$$

Wahrscheinlichkeit von der Vereinigungsmenge

$$P(A \cup B), P(\bar{A} \cup B), P(A \cup \bar{B}), P(\bar{A} \cup \bar{B})$$

$$P(A \cup B) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap B)$$

$$P(\bar{A} \cup B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) + P(A \cap \bar{B})$$

$$P(A \cup \bar{B}) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap \bar{B})$$

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap B) + P(\bar{A} \cap \bar{B})$$

$$P(A \cup B) = 1 - P(\bar{A} \cap \bar{B})$$

$$P(\bar{A} \cup B) = 1 - P(A \cap \bar{B})$$

$$P(A \cup \bar{B}) = 1 - P(\bar{A} \cap B)$$

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - P(A \cap B)$$

Stochastische Unabhängigkeit

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \Leftrightarrow A, B \text{ unabhängig}$$

$$P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B) \Leftrightarrow A, B \text{ abhängig}$$

5.3.7 Binomialverteilung

Definition

$$P(X = k) = B(n, p, k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$$

Voraussetzung

- Zufallsexperiment mit nur zwei möglichen Ausgängen (Bernoulli-Experiment)
- p - Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A
- Stichprobe mit Zurücklegen - Wahrscheinlichkeit p ändert sich nicht
- n - Anzahl der Wiederholungen des Versuchs (Bernoullikette der Länge n)

- Das Ereignis A tritt genau k-mal ein.

Verteilungsfunktion

$$F(k) = P(0 \leq X \leq k) = \sum_{i=0}^k B(n; p; i)$$

Bereiche der Binomialverteilung

höchstens k-mal

$$P(x \leq k) = \sum_{i=0}^k B(n; p; i) = F(k)$$

weniger als k-mal

$$P(x < k) = \sum_{i=0}^{k-1} B(n; p; i) = F(k-1)$$

mindestens k-mal

$$P(x \geq k) = \sum_{i=k}^n B(n; p; i) = 1 - F(k-1)$$

mehr als k-mal

$$P(x > k) = \sum_{i=k+1}^n B(n; p; i) = 1 - F(k)$$

mindestens 1-mal

$$P(x \geq 1) = \sum_{i=1}^n B(n; p; i) = 1 - F(0) =$$

$$1 - B(n; p; 0) = 1 - \binom{n}{0} \cdot p^0 \cdot (1-p)^n = 1 - (1-p)^n$$

3-mindestens-Aufgabe

P_{min} ist die Mindestwahrscheinlichkeit für mindesten einen Treffer ($x \geq 1$) und der Trefferwahrscheinlichkeit p bei mindestens n Versuchen.

$$P_p^n(x \geq 1) \geq P_{min}$$

Gesucht: n - Mindestanzahl der Versuche

$$P_p^n(x \geq 1) \geq P_{min}$$

$$1 - P_p^n(0) \geq P_{min}$$

$$1 - \binom{n}{0} \cdot p^0 \cdot (1-p)^n \geq P_{min}$$

$$1 - (1-p)^n \geq P_{min} \quad / - P_{min} / + (1-p)^n$$

$$1 - P_{min} \geq (1-p)^n \quad / \ln$$

$$\ln(1 - P_{min}) \geq \ln((1-p)^n)$$

$$\ln(1 - P_{min}) \geq n \ln((1-p)) \quad / : \ln(1-p)$$

$$\frac{\ln(1 - P_{min})}{\ln(1-p)} \leq n$$

$$n \geq \frac{\ln(1 - P_{min})}{\ln(1-p)}$$

Gesucht: p - Wahrscheinlichkeit eines Treffers

$$P_p^n(x \geq 1) \geq P_{min}$$

$$1 - P_p^n(0) \geq P_{min}$$

$$1 - \binom{n}{0} \cdot p^0 \cdot (1-p)^n \geq P_{min}$$

$$1 - (1-p)^n \geq P_{min} \quad / - P_{min} / + (1-p)^n$$

$$1 - P_{min} \geq (1-p)^n \quad / \frac{1}{n}$$

$$(1 - P_{min})^{\frac{1}{n}} \geq 1 - p \quad / + p / - (1 - P_{min})^{\frac{1}{n}}$$

$$p \geq 1 - (1 - P_{min})^{\frac{1}{n}}$$

Wartezeitaufgaben

Erster Treffer im n-ten Versuch

$$P(E) = (1-p)^{n-1} \cdot p$$

Erster Treffer frühestens im n-ten Versuch

$$P(E) = (1-p)^{n-1}$$

Erster Treffer spätestens im n-ten Versuch

$$P(E) = 1 - (1-p)^n$$

k-ter Treffer im n-ten Versuch

$$P(E) = \binom{n-1}{k-1} \cdot p^{k-1} \cdot (1-p)^{n-k} \cdot p$$

k-ter Treffer frühestens im n-ten Versuch

$$P(E) = P(x \leq k-1) = \sum_{i=0}^{k-1} B(n-1; p; i)$$

k-ter Treffer spätestens im n-ten Versuch

$$P(E) = 1 - P(x \leq k-1) = 1 - \sum_{i=0}^{k-1} B(n; p; i)$$

5.3.8 Hypergeometrische Verteilung

$$\sigma = \sqrt{\text{Var}(x)}$$

Definition

$$P(X = k) = \frac{\binom{K}{k} \cdot \binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

Voraussetzung

- Zufallsexperiment mit nur zwei möglichen Ausgängen
- Stichprobe ohne Zurücklegen - Wahrscheinlichkeit p ändert sich
- N - Anzahl aller Elemente
- n - Anzahl der Wiederholungen des Versuchs
- K - Anzahl von A unter den N - Elementen
- Das Ereignis A tritt genau k-mal ein

5.3.9 Erwartungswert - Varianz - Standardabweichung

Wahrscheinlichkeitsverteilung

Zufallsgröße X mit den Werten x_1, x_2, x_3, \dots

Wahrscheinlichkeitsverteilung

X	x_1	x_2	x_3	x_4	..
P(X)	p_1	p_2	p_3	p_4	..

Erwartungswert:

$$E(x) = \mu = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + x_3 \cdot p_3 + \dots$$

$$E(x) = \mu = \sum_{i=1}^n x_i \cdot P(x_i)$$

Varianz:

$$\text{Var}(x) = (x_1 - \mu)^2 \cdot p_1 + (x_2 - \mu)^2 \cdot p_2 + (x_3 - \mu)^2 \cdot p_3 + \dots$$

$$\text{Var}(x) = \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \cdot P(x_i)$$

Standardabweichung:

$$\sigma = \sqrt{\text{Var}(x)}$$

Binominalverteilung

Binominalverteilung B(n;p)

X	0	1	2	3	..
P(X)	$B(n; p; 0)$	$B(n; p; 1)$	$B(n; p; 2)$	$B(n; p; 3)$..

Erwartungswert:

$$E(x) = \mu = n \cdot p$$

Varianz:

$$\text{Var}(x) = n \cdot p \cdot (1 - p)$$

Standardabweichung:

5.4 Testen von Hypothesen

5.4.1 Einseitiger Signifikanztest

Definitionen

- Testgröße: Binominal verteilte Zufallsgröße X
- Nullhypothese H_0 : Vermutete Wahrscheinlichkeit für die Zufallsgröße X
- Gegenhypothese H_1 : Alternative Wahrscheinlichkeit
- Stichprobenlänge n : Anzahl der durchgeführten Versuche
- Entscheidungsregel: Annahme- und Ablehnungsbereich für die Nullhypothese
- Fehler 1. Art (α -Fehler): H_0 wird irrtümlich abgelehnt. Entscheidung gegen H_0 , aber H_0 ist richtig.
- Fehler 2. Art (β -Fehler): H_0 wird irrtümlich angenommen. Entscheidung für H_0 , aber H_0 ist nicht richtig.
- Irrtumswahrscheinlichkeit: Wahrscheinlichkeit für Fehler 1 Art. Berechnung durch: $\alpha = P_{p_0}^n(\text{Ablehnungsbereich von } H_0)$
- Signifikanzniveau: maximale Irrtumswahrscheinlichkeit

Rechtsseitiger Signifikanztest

	Annahmebereich	Ablehnungsbereich
	$A = \{0, \dots, k\}$	$\bar{A} = \{k + 1, \dots, n\}$
$H_0 : p \leq p_0$	richtig	Fehler 1. Art
$H_1 : p > p_0$	Fehler 2. Art	richtig

Aufgabentyp 1

Gegeben: n, H_0 , Annahme- und Ablehnungsbereich

Gesucht: Irrtumswahrscheinlichkeit (Fehler 1. Art)

$$\alpha = P_{p_0}^n(\bar{A})$$

$$\alpha = P_{p_0}^n(X \geq k + 1) = \sum_{i=k+1}^n B(n; p_0; i)$$

$$\alpha = 1 - P_{p_0}^n(X \leq k) = 1 - \sum_{i=0}^k B(n; p_0; i) = 1 - F(k)$$

Aufgabentyp 2

Gegeben: n, H_0 , Signifikanzniveau

Gesucht: Annahme- und Ablehnungsbereich

$$P_{p_0}^n(\bar{A}) \leq \alpha$$

$$P_{p_0}^n(X \geq k + 1) \leq \alpha$$

$$1 - P_{p_0}^n(X \leq k) \leq \alpha$$

$$P_{p_0}^n(X \leq k) \geq 1 - \alpha$$

Linksseitiger Signifikanztest

	Ablehnungsbereich	Annahmebereich
	$\bar{A} = \{0, \dots, k\}$	$A = \{k + 1, \dots, n\}$
$H_0 : p \geq p_0$	Fehler 1. Art	richtig
$H_1 : p < p_0$	richtig	Fehler 2. Art

Aufgabentyp 1

Gegeben: n, H_0 , Annahme- und Ablehnungsbereich

Gesucht: Irrtumswahrscheinlichkeit (Fehler 1. Art)

$$\alpha = P_{p_0}^n(\bar{A})$$

$$\alpha = P_{p_0}^n(X \leq k) = \sum_{i=0}^k B(n; p_0; i) = F(k)$$

Aufgabentyp 2

Gegeben: n, H_0 , Signifikanzniveau α

Gesucht: Annahme- und Ablehnungsbereich

$$P_{p_0}^n(\bar{A}) \leq \alpha$$

$$P_{p_0}^n(X \leq k) \leq \alpha$$

6 Analytische Geometrie

6.1 Vektorrechnung in der Ebene

6.1.1 Vektor - Abstand - Steigung - Mittelpunkt

Vektor - Ortsvektor

- Vektor \vec{v} - Menge aller paralleler Pfeile

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

- Ortsvektor \vec{v} - Vektor zwischen einem Punkt und dem Koordinatenursprung $A(x_a/y_a)$

$$\vec{A} = \vec{OA} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix}$$

- Gegenvektor \vec{v} - gleiche Länge und Richtung aber entgegengesetzte Orientierung

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$$

Vektor zwischen 2 Punkten

2 Punkte: $A(x_a/y_a)$ $B(x_b/y_b)$

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} x_b - x_a \\ y_b - y_a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \end{pmatrix}$$

Länge des Vektors - Betrag des Vektors - Abstand zwischen zwei Punkten

$$|\vec{AB}| = \sqrt{x_c^2 + y_c^2}$$

$$|\vec{AB}| = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2}$$

Steigung der Geraden AB

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Steigung der Geraden AB

$$m = \frac{y}{x}$$

Winkel des Vektors mit der x-Achse

$$\tan \alpha = m$$

Mittelpunkt der Strecke AB

$$\vec{M} = \frac{1}{2} (\vec{A} + \vec{B})$$

$$\vec{M} = \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \end{pmatrix} \right)$$

$$M \left(\frac{x_a + x_b}{2} / \frac{y_a + y_b}{2} \right)$$

Vektorkette

Punkt: $A(x_a/y_a)$ Vektor: $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$\vec{OB} = \vec{OA} + \vec{v} \quad \vec{B} = \vec{A} + \vec{v}$$

$$\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

6.1.2 Skalarprodukt - Fläche - Winkel

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \end{pmatrix}$$

Steigung der Vektoren

$$m_a = \frac{y_a}{x_a} \quad m_b = \frac{y_b}{x_b}$$

 $m_a = m_b \Rightarrow$ Vektoren sind parallel

Skalarprodukt

$$\vec{a} \circ \vec{b} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \end{pmatrix} = x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b$$

Senkrechte Vektoren:

$$\vec{a} \circ \vec{b} = 0 \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$$

Fläche aus 2 Vektoren

Fläche des Parallelogramms aus \vec{a}, \vec{b}

$$A = \begin{vmatrix} x_a & x_b \\ y_a & y_b \end{vmatrix} = x_a \cdot y_b - y_a \cdot x_b$$

Fläche des Dreiecks aus \vec{a}, \vec{b}

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_a & x_b \\ y_a & y_b \end{vmatrix} = \frac{1}{2} (x_a \cdot y_b - y_a \cdot x_b)$$

Winkel zwischen Vektoren

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$\cos \alpha = \frac{x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2} \cdot \sqrt{x_b^2 + y_b^2}}$$

6.1.3 Abbildungen

Lineare Abbildung in Matrixform - Koordinatenform

Matrixform

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

Koordinatenform

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot x + b \cdot y \\ c \cdot x + d \cdot y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot x + b \cdot y + e \\ c \cdot x + d \cdot y + f \end{pmatrix}$$

$$x' = a \cdot x + b \cdot y + e \quad y' = c \cdot x + d \cdot y + f$$

Verschiebung

Punkt: $P(x_p/y_p)$ Vektor: $\vec{v} = \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x_{P'} \\ y_{P'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_{P'} \\ y_{P'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix}$$

$$\vec{OP'} = \vec{OP} + \vec{v}$$

$$\vec{OP'} = \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix}$$

Spiegelung an den Koordinatenachsen

Spiegelung an der x -Achse

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$$

$$x' = x \quad y' = -y$$

Spiegelung an der y -Achse

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$$

$$x' = -x \quad y' = y$$

Spiegelung am Ursprung

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$$

$$x' = -x \quad y' = -y$$

Spiegelung an der Ursprungsgerade

$$y = m \cdot x \quad \tan \alpha = m$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' = x \cdot \cos 2\alpha + y \cdot \sin 2\alpha \\ y' = x \cdot \sin 2\alpha - y \cdot \cos 2\alpha \end{pmatrix}$$

$$x' = x \cdot \cos 2\alpha + y \cdot \sin 2\alpha \quad y' = x \cdot \sin 2\alpha - y \cdot \cos 2\alpha$$

Zentrische StreckungStreckzentrum: $Z(0/0)$ Streckungsfaktor : k Urpunkt: $P(x_P/y_P)$ Bildpunkt: $P'(x_{P'}/y_{P'})$

$$\begin{pmatrix} x_{P'} \\ y_{P'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_{P'} \\ y_{P'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot x \\ k \cdot y \end{pmatrix}$$

Streckzentrum: $Z(x_Z/y_Z)$ Streckungsfaktor: k Urpunkt: $P(x_P/y_P)$ Bildpunkt: $P'(x_{P'}/y_{P'})$

Vektorform

$$Z\vec{P}' = k \cdot Z\vec{P}$$

$$\begin{pmatrix} x_{P'} - x_Z \\ y_{P'} - y_Z \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} x_P - x_Z \\ y_P - y_Z \end{pmatrix}$$

$$O\vec{P}' = k \cdot Z\vec{P} + O\vec{Z}$$

$$\begin{pmatrix} x_{P'} \\ y_{P'} \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} x_P - x_Z \\ y_P - y_Z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_Z \\ y_Z \end{pmatrix}$$

Drehung um den Ursprung

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' = x \cdot \cos \alpha - y \cdot \sin \alpha \\ y' = x \cdot \sin \alpha + y \cdot \cos \alpha \end{pmatrix}$$

$$x' = x \cdot \cos \alpha - y \cdot \sin \alpha \quad y' = x \cdot \sin \alpha + y \cdot \cos \alpha$$

Orthogonale Affinität mit der x-Achse als Affinitätsachse

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ k \cdot y \end{pmatrix}$$

$$x' = x \quad y' = k \cdot y$$

6.2 Vektor

6.2.1 Vektor - Abstand - Mittelpunkt

Vektor - Ortsvektor

- Vektor \vec{v} - Menge aller parallelgleicher Pfeile

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

- Ortsvektor \vec{v} - Vektor zwischen einem Punkt und dem Koordinatenursprung
 $A(x_a/y_a)$

$$\vec{A} = \vec{OA} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

- Gegenvektor \vec{v} - gleiche Länge und Richtung aber entgegengesetzte Orientierung

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ -x_3 \end{pmatrix}$$

Vektor zwischen 2 Punkten

2 Punkte: $A(a_1/a_2/a_3)$ $B(b_1/b_2/b_3)$

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

Länge des Vektors - Betrag des Vektors - Abstand zwischen zwei Punkten

$$\begin{aligned} |\vec{AB}| &= \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2} \\ |\vec{AB}| &= \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2} \end{aligned}$$

Mittelpunkt der Strecke AB

$$\vec{M} = \frac{1}{2} (\vec{A} + \vec{B})$$

$$\vec{M} = \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \right)$$

$$M\left(\frac{a_1+b_1}{2} / \frac{a_2+b_2}{2} / \frac{a_3+b_3}{2}\right)$$

6.2.2 Winkel - Skalarprodukt - Vektorprodukt - Abhängigkeit

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Länge der Vektoren

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}$$

Skalarprodukt

$$\vec{a} \circ \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} =$$

$$a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$$

Senkrechte Vektoren:

$$\vec{a} \circ \vec{b} = 0 \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$$

Vektorprodukt - Fläche des Parallelogramms

$\vec{c} \perp \vec{a}$ und $\vec{c} \perp \vec{b}$

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_1 - b_3 \cdot a_1 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

Fläche des Parallelogramms:

$$A = |\vec{a} \times \vec{b}|$$

$$A = |\vec{c}| = \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}$$

Fläche des Dreiecks aus \vec{a}, \vec{b}

$$A = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|$$

Winkel zwischen Vektoren

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$\cos \alpha = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

Lineare Abhängigkeit von 2 Vektoren

$$\begin{aligned} a_1 &= b_1 k & / : b_1 &\Rightarrow k_1 \\ a_2 &= b_2 k & / : b_2 &\Rightarrow k_2 \\ a_3 &= b_3 k & / : b_3 &\Rightarrow k_3 \end{aligned}$$

$$k_1 = k_2 = k_3 \Rightarrow$$

Vektoren sind linear abhängig - parallel

nicht alle k gleich \Rightarrow

Vektoren sind linear unabhängig - nicht parallel

- sind linear abhängig

- liegen in einer Ebene (komplanar)

- sind keine Basisvektoren

• $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} \neq 0 \Rightarrow$ die drei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

- sind linear unabhängig

- liegen nicht in einer Ebene

- sind Basisvektoren

6.2.3 Spatprodukt - lineare Abhängigkeit - Basisvektoren - Komplanarität

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Spatprodukt: } (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} =$$

$$\left(\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \right) \right) \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

Vektorprodukt von \vec{a}, \vec{b} skalar multipliziert mit \vec{c}

Spatprodukt = Wert der Determinante

$$\text{Spatprodukt: } (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) =$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = a_1 \cdot b_2 \cdot c_3 + b_1 \cdot c_2 \cdot a_3 + c_1 \cdot a_2 \cdot b_3 - c_1 \cdot b_2 \cdot a_3 - a_1 \cdot c_2 \cdot b_3 - b_1 \cdot a_2 \cdot c_3$$

Spatprodukt - Volumen

• Volumen von Prisma oder Spat

$$V = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

• Volumen einer Pyramide mit den Grundflächen:

Quadrat, Rechteck, Parallelogramm

$$V = \frac{1}{3} (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

• Volumen ein dreiseitigen Pyramide

$$V = \frac{1}{6} (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

Eigenschaften von 3 Vektoren

• $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0 \Rightarrow$ die drei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

6.3 Gerade

6.3.1 Gerade aus 2 Punkten

Punkte: $A(a_1/a_2/a_3)$ $B(b_1/b_2/b_3)$

Richtungsvektor

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

Punkt A oder B als Aufpunkt wählen

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

Besondere Geraden

$$\begin{array}{ccc} x_1 - \text{Achse} & x_2 - \text{Achse} & x_3 - \text{Achse} \\ \vec{x} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \vec{x} = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \vec{x} = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

6.4 Ebene

6.4.1 Parameterform - Normalenform

Parameterform

\vec{x} - Ortsvektor zu einem Punkt X in der Ebene

\vec{P} - Aufpunkt (Stützvektor, Ortsvektor)

\vec{u}, \vec{v} - Richtungsvektoren

λ, σ - Parameter

$$\vec{x} = \vec{P} + \lambda \cdot \vec{u} + \sigma \cdot \vec{v}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

Normalenform - Koordinatenform

\vec{x} - Ortsvektor zu einem Punkt X in der Ebene

\vec{n} - Normalenvektor

\vec{P} - Aufpunkt (Stützvektor, Ortsvektor)

$$\vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{p}) = 0$$

$$\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \right) = 0$$

Koordinatenform:

$$n_1(x_1 - p_1) + n_2(x_2 - p_2) + n_3(x_3 - p_3) = 0$$

$$n_1x_1 - n_1p_1 + n_2x_2 - n_2p_2 + n_3x_3 - n_3p_3 = 0$$

$$c = -(n_1p_1 + n_2p_2 + n_3p_3)$$

$$n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + c = 0$$

Besondere Ebenen

Ebene	Parameterform	Koordinatenform
$x_1 - x_2$	$\vec{x} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$x_3 = 0$
$x_1 - x_3$	$\vec{x} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	$x_2 = 0$
$x_2 - x_3$	$\vec{x} = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	$x_1 = 0$

6.4.2 Ebenengleichung aufstellen

Ebene aus 3 Punkten

Punkte: $A(a_1/a_2/a_3)$ $B(b_1/b_2/b_3)$ $C(c_1/c_2/c_3)$

Die 3 Punkte dürfen nicht auf einer Geraden liegen.

Ebene aus drei Punkten:

$$\text{Richtungsvektor: } \vec{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Richtungsvektor: } \vec{AC} = \begin{pmatrix} c_1 - a_1 \\ c_2 - a_2 \\ c_3 - a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$$

Ebenengleichung aus Aufpunkt und den Richtungsvektoren.

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$$

Ebene aus Gerade und Punkt

Der Punkte darf nicht auf der Geraden liegen.

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Punkt: $C(c_1/c_2/c_3)$

Richtungsvektor zwischen Aufpunkt A und dem Punkt C

$$\vec{AC} = \begin{pmatrix} c_1 - a_1 \\ c_2 - a_2 \\ c_3 - a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$$

Ebene aus zwei parallelen Geraden

$$\text{Gerade 1: } \vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Gerade 2: } \vec{x} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$$

Bei parallelen Geraden sind Richtungsvektoren linear abhängig. Für die Ebenengleichung muß ein 2. Richtungsvektor erstellt werden. 2. Richtungsvektor zwischen den Aufpunkten A und C.

Ebenengleichung in Parameterform

$$\vec{AC} = \begin{pmatrix} c_1 - a_1 \\ c_2 - a_2 \\ c_3 - a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$$

Ebene aus zwei sich schneidenden Geraden

$$\text{Gerade 1: } \vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Gerade 2: } \vec{x} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$$

Bei sich schneidenden Geraden sind Richtungsvektoren linear unabhängig.

Ebenengleichung in Parameterform

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$$

6.4.3 Parameterform - Koordinatenform

1. Methode: Determinante

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{vmatrix} x_1 - a_1 & b_1 & c_1 & x_1 - a_1 & b_1 \\ x_2 - a_2 & b_2 & c_2 & x_2 - a_2 & b_2 \\ x_3 - a_3 & b_3 & c_3 & x_3 - a_3 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x_1 - a_1) \cdot b_2 \cdot c_3 + b_1 \cdot c_2 \cdot (x_3 - a_3) + c_1 \cdot (x_2 - a_2) \cdot b_3 - c_1 \cdot b_2 \cdot (x_3 - a_3) - (x_1 - a_1) \cdot c_2 \cdot b_3 - b_1 \cdot (x_2 - a_2) \cdot c_3 = 0$$

Koordinatenform:

$$n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + k = 0$$

2. Methode: Vektorprodukt

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

Normalenvektor der Ebene mit dem Vektorprodukt

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_2 \cdot c_3 - b_3 \cdot c_2 \\ b_3 \cdot c_1 - c_3 \cdot b_1 \\ b_1 \cdot c_2 - b_2 \cdot c_1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$$

Normalenvektor der Ebene und Aufpunkt in die Koordinatenform einsetzen.

$$n_1 a_1 + n_2 a_2 + n_3 a_3 + k = 0$$

k berechnen

$$n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 + k = 0$$

6.4.4 Koordinatenform - Parameterform

1. Methode

$$n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 + k = 0$$

- x_1 durch einen Parameter ersetzen

$$x_1 = \lambda$$

- x_2 durch einen Parameter σ ersetzen

$$x_2 = \sigma$$

- Koordinatenform nach x_3 auflösen

$$x_3 = -\frac{k}{n_3} - \frac{n_1}{n_3} x_1 - \frac{n_2}{n_3} x_2$$

- Ebene in Punktdarstellung :

$$x_1 = 0 + 1 \cdot \lambda + 0 \cdot \sigma$$

$$x_2 = 0 + 0 \cdot \lambda + 1 \cdot \sigma$$

$$x_3 = -\frac{k}{n_3} - \frac{n_1}{n_3} \lambda - \frac{n_2}{n_3} \sigma$$

- Parameterform der Ebene

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{k}{n_3} \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{n_1}{n_3} \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{n_2}{n_3} \end{pmatrix}$$

2. Methode

- Drei beliebige Punkte, die in der Ebene liegen ermitteln.
- Die Richtungsvektoren müssen linear unabhängig sein.
- Ebenengleichung aus 3 Punkten aufstellen.

6.4.5 Koordinatenform - Hessesche Normalenform

Koordinatenform:

$$n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 + k_1 = 0$$

Normalenvektor

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$$

Länge des Normalenvektors:

$$|\vec{n}| = \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}$$

Hessesche Normalenform:

$$k_1 < 0$$

$$\text{HNF: } \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 + k_1}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}} = 0$$

$$k_1 > 0$$

$$\text{HNF: } \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 + k_1}{-\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}} = 0$$

6.5 Kugel

6.5.1 Kugelgleichung

$M(m_1/m_2/m_3)$ - Mittelpunkt der Kugel

r - Radius der Kugel

$X(x_1/x_2/x_3)$ - beliebiger Punkt auf der Kugel

Kugelgleichung:

$$(x_1 - m_1)^2 + (x_2 - m_2)^2 + (x_3 - m_3)^2 = r^2$$

6.6 Lagebeziehung

6.6.1 Punkt - Gerade

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Punkt: $C(c_1/c_2/c_3)$

$$c_1 = a_1 + b_1\lambda_1 \Rightarrow \lambda_1$$

$$c_2 = a_2 + b_2\lambda_2 \Rightarrow \lambda_2$$

$$c_3 = a_3 + b_3\lambda_3 \Rightarrow \lambda_3$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 \Rightarrow$$

Punkt liegt auf der Geraden

nicht alle λ gleich \Rightarrow

Punkt liegt nicht auf der Geraden

Lotfußpunkt und Abstand des Punktes berechnen.

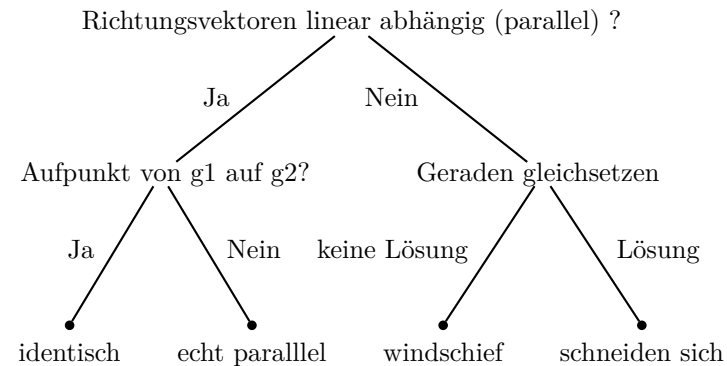
Die Koordinatenform der Ebenengleichung aufstellen, die senkrecht zur Geraden ist und den Punkt C enthält.

Richtungsvektor der Geraden = Normalenvektor der Ebene. Der Lotfußpunkt ist der Schnittpunkt zwischen Gerade und Ebene.

Abstand des Punktes, ist die Länge des Vektors \vec{LC}

6.6.2 Gerade - Gerade

$$\begin{aligned} \text{Gerade 1: } \vec{x} &= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \\ \text{Gerade 2: } \vec{x} &= \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$



6.6.3 Punkt - Ebene (Koordinatenform)

Punkt: $A(a_1/a_2/a_3)$

Ebene: $n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + c_1 = 0$

$n_1 \cdot a_1 + n_2 \cdot a_2 + n_3 \cdot a_3 + c_1 = 0$

- Liegt der Punkt in der Ebene?

Punkt in die Ebene einsetzen.

Gleichung nach Umformung: $0 = 0 \Rightarrow$ Punkt liegt in der Ebene

- Abstand Punkt - Ebene

Punkt in die HNF einsetzen.

6.6.4 Gerade - Ebene (Koordinatenform)

Gerade: $\vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

Ebene: $n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + c_1 = 0$

Gerade1 in Punktdarstellung

$$x_1 = a_1 + b_1\lambda$$

$$x_2 = a_2 + b_2\lambda$$

$$x_3 = a_3 + b_3\lambda$$

x_1, x_2, x_3 in die Ebenengleichung einsetzen

$$n_1(a_1 + b_1\lambda) + n_2(a_2 + b_2\lambda) + n_3(a_3 + b_3\lambda) + c_1 = 0$$

Die Gleichung nach der Variablen auflösen.

- Schnittpunkt zwischen Gerade und Ebene

Auflösung nach einer Variablen ist möglich. Variable in die Gerade einsetzen

- Geraden und Ebene sind parallel

Auflösung nach der Variablen ist nicht möglich. λ heben sich auf.

Gleichung nach Umformung: *Konstante* = 0

- Gerade liegt in der Ebene

Auflösung nach der Variablen ist nicht möglich. λ heben sich auf.

Gleichung nach Umformung: $0 = 0$

6.6.5 Ebene - Ebene

Parameterform - Koordinatenform

Parameterform - Ebene1

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

Koordinatenform - Ebene2

$$n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + k_1 = 0$$

Ebene1 in Punktdarstellung

$$x_1 = a_1 + b_1\lambda + c_1\sigma$$

$$x_2 = a_2 + b_2\lambda + c_2\sigma$$

$$x_3 = a_3 + b_3\lambda + c_2\sigma$$

x_1, x_2, x_3 in die Ebenengleichung einsetzen

$$n_1(a_1 + b_1\lambda + c_1\sigma) +$$

$$n_2(a_2 + b_2\lambda + c_2\sigma) +$$

$$n_3(a_3 + b_3\lambda + c_2\sigma) + k_1 = 0$$

Die Gleichung nach einer Variablen auflösen

- Schnittgerade zwischen den Ebenen

Auflösung nach einer Variablen ist möglich. λ oder σ in die Parameterform einsetzen

- Ebenen sind parallel

Auflösung nach einer Variablen ist nicht möglich. λ und σ heben sich auf

Gleichung nach Umformung: *Konstante* = 0

- Ebenen sind identisch

Auflösung nach einer Variablen ist nicht möglich. λ und σ heben sich auf

Gleichung nach Umformung: $0 = 0$

Parameterform - Parameterform

Eine Ebene in die Koordinatenform umrechnen. Danach die Lösung mit Parameterform - Koordinatenform berechnen.

Koordinatenform - Koordinatenform

Eine Ebene in die Parameterform umrechnen. Danach die Lösung mit Parameterform - Koordinatenform berechnen.