

# Algebra

## Aufgaben und Lösungen

<http://www.fersch.de>

©Klemens Fersch

31. März 2018

## Inhaltsverzeichnis

<b>1 Primfaktoren - ggT - kgV</b>	<b>2</b>
1.1 $ggT(a, b)$ $kgV(a, b)$ . . . . .	3
1.1.1 Aufgaben . . . . .	3
1.1.2 Lösungen . . . . .	4
1.2 $ggT(a, b, c)$ $kgV(a, b, c)$ . . . . .	9
1.2.1 Aufgaben . . . . .	9
1.2.2 Lösungen . . . . .	10
<b>2 Brüche</b>	<b>12</b>
2.1 Kürzen . . . . .	13
2.1.1 Aufgaben . . . . .	13
2.1.2 Lösungen . . . . .	14
2.2 $\frac{a}{b} - \frac{c}{d}$ . . . . .	15
2.2.1 Aufgaben . . . . .	15
2.2.2 Lösungen . . . . .	16
2.3 $a\frac{b}{c} - d\frac{e}{f}$ . . . . .	18
2.3.1 Aufgaben . . . . .	18
2.3.2 Lösungen . . . . .	19
<b>3 Schriftliches Rechnen</b>	<b>22</b>
3.1 Addition . . . . .	23
3.1.1 Aufgaben . . . . .	23
3.1.2 Lösungen . . . . .	24
3.2 Subtraktion . . . . .	27
3.2.1 Aufgaben . . . . .	27
3.2.2 Lösungen . . . . .	28
3.3 Multiplikation . . . . .	29
3.3.1 Aufgaben . . . . .	29
3.3.2 Lösungen . . . . .	30
3.4 Division . . . . .	31
3.4.1 Aufgaben . . . . .	31
3.4.2 Lösungen . . . . .	32
<b>4 Prozentrechnung</b>	<b>33</b>
4.1 $P_w = \frac{p \cdot G}{100}$ . . . . .	33
4.1.1 Aufgaben . . . . .	33
4.1.2 Lösungen . . . . .	34
4.2 $G = \frac{P_w \cdot 100}{p}$ . . . . .	36
4.2.1 Aufgaben . . . . .	36
4.2.2 Lösungen . . . . .	37
4.3 $p = \frac{P_w \cdot 100}{G}$ . . . . .	40
4.3.1 Aufgaben . . . . .	40
4.3.2 Lösungen . . . . .	41

<b>5 Promillerechnung</b>	<b>42</b>
5.1 $P_w = \frac{p \cdot G}{1000}$	42
5.1.1 Aufgaben	42
5.1.2 Lösungen	43
5.2 $G = \frac{P_w \cdot 1000}{p}$	45
5.2.1 Aufgaben	45
5.2.2 Lösungen	46
5.3 $p = \frac{P_w \cdot 1000}{G}$	50
5.3.1 Aufgaben	50
5.3.2 Lösungen	51
<b>6 Prozentuale Ab- und Zunahme</b>	<b>52</b>
6.1 $E = q \cdot A$	52
6.1.1 Aufgaben	52
6.1.2 Lösungen	53
6.2 $A = \frac{E}{q}$	54
6.2.1 Aufgaben	54
6.2.2 Lösungen	55
6.3 $p = \frac{E}{A}$	57
6.3.1 Aufgaben	57
6.3.2 Lösungen	58
<b>7 Potenzen</b>	<b>60</b>
7.1 Aufgaben	61
7.2 Lösungen	62
<b>8 Wurzeln</b>	<b>65</b>
8.1 Aufgaben	65
8.2 Lösungen	66
<b>9 Logarithmen</b>	<b>69</b>
9.1 Aufgaben	69
9.2 Lösungen	70
<b>10 Zahlensysteme</b>	<b>72</b>
10.1 Zahlensysteme	72
10.1.1 Aufgaben	72
10.1.2 Lösungen	74
<b>11 Zahlen</b>	<b>75</b>
11.1 Primzahlen	75

# 1 Primfaktoren - ggT - kgV

## Primzahlen

Eine Primzahl ist eine ganze Zahl, die nur durch eins und sich selbst teilbar ist.

Primzahlen:  
2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43,  
47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107.....

## Primfaktorenzerlegung

Zerlegung einer natürlichen Zahl als Produkt aus Primzahlen.

$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$   
 $120 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$   
 $340 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 17$

## Teilbarkeitsregeln

Eine Zahl ist durch ...  
2 teilbar, wenn ihre letzte Ziffer eine 2, 4, 6, 8 oder 0 ist.  
3 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 3 teilbar ist.  
4 teilbar, wenn ihre letzten 2 Stellen durch 4 teilbar sind.  
5 teilbar, wenn ihre letzte Stelle eine 5 oder eine 0 ist.  
6 teilbar, wenn sie durch 2 und durch 3 teilbar ist.  
8 teilbar, wenn ihre letzten 3 Stellen durch 8 teilbar sind.  
9 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 9 teilbar ist.  
10 teilbar, wenn ihre letzte Stelle eine 0 ist.  
12 teilbar, wenn sie durch 3 und durch 4 teilbar ist.  
15 teilbar, wenn sie durch 3 und durch 5 teilbar ist.  
18 teilbar, wenn sie durch 2 und durch 9 teilbar ist.  
Die Quersumme einer Zahl, ist die Summe ihrer Ziffern.

$5|45$  5 ist Teiler von 45  
 $3|123$  3 ist Teiler von 123  
Quersumme von 123:  $1 + 2 + 3 = 6$   
 $3|6 \Rightarrow 3|123$

## Vielfachmenge $V(a)$

Alle Vielfachen einer natürlichen Zahl a.

$V(4) = \{4; 8; 12; 16; 20; 24; 28; 32; 36; 40; 44; 48..\}$   
 $V(6) = \{6; 12; 18; 24; 30; 36; 42; 48; 54; 60; 66; 72; 78; 84..\}$   
 $V(3) = \{3; 6; 9; 12; 15; 18; 21; 24; 27; 30; 33; 36; 39; 42; 45..\}$

## Teilermenge $T(a)$

Alle ganzzahligen Teiler einer Zahl a.

$T(36) = \{1; 2; 3; 4; 6; 9; 12; 18; 36\}$   
 $T(24) = \{1; 2; 3; 4; 6; 8; 12; 24\}$   
 $T(42) = \{1; 2; 3; 6; 7; 14; 21; 42\}$

## Größter gemeinsamer Teiler $ggT(a,b)$

Methode 1: Aus den Teilmengen von a und b den größten Teiler ablesen.

Methode 2: Das Produkt der gemeinsamen Primfaktoren bilden.

$ggT(12; 18) = 6$   
Aus den Teilmengen den größten Teiler ablesen:  
 $T(12) = \{1; 2; 3; 4; 6; 12\}$   $T(18) = \{1; 2; 3; 6; 9; 18\}$   
Gemeinsame Primfaktoren von 12 und 18:  

12	2	2	3	
18	2		3	3
$ggT(12; 18)$	2		3	

 $ggT(12; 18) = 2 \cdot 3 = 6$

**Kleinstes gemeinsames Vielfaches kgV(a,b)**

Methode 1: Aus den Vielfachmengen von a und b das kleinste Vielfache ablesen.

Methode 2: Das Produkt aller Primfaktoren von a und den zusätzlichen Primfaktoren von b bilden.

$$\text{kgV}(12; 18) = 36$$

Aus den Vielfachmengen das kleinste Vielfache ablesen:

$$V(12) = \{12; 24; \mathbf{36}; 48; 60; 72; \dots\} \quad V(18) = \{18; \mathbf{36}; 54; 72; 90; \dots\}$$

Primfaktoren von 12 und zusätzlichen Primfaktoren von 18:

12	2	2	3	
18	2		3	3
kgV(12; 18)	2	2	3	3

$$\text{kgV}(12; 18) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 36$$

**1.1 ggT(a, b)      kgV(a, b)****1.1.1 Aufgaben**

Um eigene Aufgaben zu lösen, klicken Sie hier: [Neue Rechnung](#)

Gegeben:

Ganzen Zahlen a und b

Gesucht:

Teilmengen von a und b

Vielfachmenge von a und b

Primfaktoren von a und b

ggT(a,b)

kgV(a,b)

- (1)    a = 4      b = 8
- (2)    a = 2      b = 12
- (3)    a = 3      b = 21
- (4)    a = 4      b = 24
- (5)    a = 6      b = 9
- (6)    a = 24     b = 36
- (7)    a = 9      b = 21
- (8)    a = 18     b = 24
- (9)    a = 8      b = 12
- (10)   a = 10     b = 14
- (11)   a = 45     b = 55
- (12)   a = 3      b = 4
- (13)   a = 18     b = 12
- (14)   a = 12     b = 162

- (15)   a = 6      b = 14
- (16)   a = 5      b = 6
- (17)   a = 56     b = 42
- (18)   a = 4      b = 5
- (19)   a = 40     b = 5
- (20)   a = 40     b = 96
- (21)   a = 24     b = 32
- (22)   a = 242    b = 120
- (23)   a = 246    b = 120
- (24)   a = 34     b = 168
- (25)   a = 340    b = 168
- (26)   a = 96     b = 34

## 1.1.2 Lösungen

Aufgabe (1)

Primfaktorzerlegung:

$$8 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \quad 4 = 2 \cdot 2$$

$$\text{ggT}(8; 4) = 2 \cdot 2 = 4$$

$$\text{kgV}(8; 4) = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$$

Teilmengen:

$$T(8) = \{1; 2; 4; 8\}$$

$$T(4) = \{1; 2; 4\}$$

Vielfachmenge:

$$V(8) = \{8; 16; 24; 32; 40; 48; 56; 64; 72; 80; 88; 96; 104; 112; 120; 128; 136; 144; 152\}$$

$$V(4) = \{4; 8; 12; 16; 20; 24; 28; 32; 36; 40; 44; 48; 52; 56; 60; 64; 68; 72; 76\}$$

Aufgabe (2)

Primfaktorzerlegung:

$$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \quad 2 = 2$$

$$\text{ggT}(12; 2) = 2 = 2$$

$$\text{kgV}(12; 2) = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$$

Teilmengen:

$$T(12) = \{1; 2; 3; 4; 6; 12\}$$

$$T(2) = \{1; 2\}$$

Vielfachmenge:

$$V(12) = \{12; 24; 36; 48; 60; 72; 84; 96; 108; 120; 132; 144; 156; 168; 180; 192; 204; 216; 228\}$$

$$V(2) = \{2; 4; 6; 8; 10; 12; 14; 16; 18; 20; 22; 24; 26; 28; 30; 32; 34; 36; 38\}$$

Aufgabe (3)

Primfaktorzerlegung:

$$21 = 3 \cdot 7 \quad 3 = 3$$

$$\text{ggT}(21; 3) = 3 = 3$$

$$\text{kgV}(21; 3) = 3 \cdot 7 = 21$$

Teilmengen:

$$T(21) = \{1; 3; 7; 21\}$$

$$T(3) = \{1; 3\}$$

Vielfachmenge:

$$V(21) = \{21; 42; 63; 84; 105; 126; 147; 168; 189; 210; 231; 252; 273; 294; 315; 336; 357; 378; 399\}$$

$$V(3) = \{3; 6; 9; 12; 15; 18; 21; 24; 27; 30; 33; 36; 39; 42; 45; 48; 51; 54; 57\}$$

Aufgabe (4)

Primfaktorzerlegung:

$$24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \quad 4 = 2 \cdot 2$$

$$\text{ggT}(24; 4) = 2 \cdot 2 = 4$$

$$\text{kgV}(24; 4) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 24$$

Teilmengen:

$$T(24) = \{1; 2; 3; 4; 6; 8; 12; 24\}$$

$$T(4) = \{1; 2; 4\}$$

Vielfachmenge:

$$V(24) = \{24; 48; 72; 96; 120; 144; 168; 192; 216; 240; 264; 288; 312; 336; 360; 384; 408; 432; 456\}$$

$$V(4) = \{4; 8; 12; 16; 20; 24; 28; 32; 36; 40; 44; 48; 52; 56; 60; 64; 68; 72; 76\}$$

Aufgabe (5)

Primfaktorzerlegung:

$$9 = 3 \cdot 3 \quad 6 = 2 \cdot 3$$

$$\text{ggT}(9; 6) = 3 = 3$$

$$\text{kgV}(9; 6) = 2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$$

Teilmengen:

$$T(9) = \{1; 3; 9\}$$

$$T(6) = \{1; 2; 3; 6\}$$

Vielfachmenge:

$$V(9) = \{9; 18; 27; 36; 45; 54; 63; 72; 81; 90; 99; 108; 117; 126; 135; 144; 153; 162; 171\}$$

$$V(6) = \{6; 12; 18; 24; 30; 36; 42; 48; 54; 60; 66; 72; 78; 84; 90; 96; 102; 108; 114\}$$

Aufgabe (6)

Primfaktorzerlegung:

$$36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \quad 24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$$

$$\text{ggT}(36; 24) = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$$

$$\text{kgV}(36; 24) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 72$$

Teilmenge:

$$T(36) = \{1; 2; 3; 4; 6; 9; 12; 18; 36\}$$

$$T(24) = \{1; 2; 3; 4; 6; 8; 12; 24\}$$

Vielfachmenge:

$$V(36) = \{36; 72; 108; 144; 180; 216; 252; 288; 324; 360; 396; 432; 468; 504; 540; 576; 612; 648; 684\}$$

$$V(24) = \{24; 48; 72; 96; 120; 144; 168; 192; 216; 240; 264; 288; 312; 336; 360; 384; 408; 432; 456\}$$

Aufgabe (7)

Primfaktorzerlegung:

$$21 = 3 \cdot 7 \quad 9 = 3 \cdot 3$$

$$\text{ggT}(21; 9) = 3 = 3$$

$$\text{kgV}(21; 9) = 3 \cdot 3 \cdot 7 = 63$$

Teilmenge:

$$T(21) = \{1; 3; 7; 21\}$$

$$T(9) = \{1; 3; 9\}$$

Vielfachmenge:

$$V(21) = \{21; 42; 63; 84; 105; 126; 147; 168; 189; 210; 231; 252; 273; 294; 315; 336; 357; 378; 399\}$$

$$V(9) = \{9; 18; 27; 36; 45; 54; 63; 72; 81; 90; 99; 108; 117; 126; 135; 144; 153; 162; 171\}$$

Aufgabe (8)

Primfaktorzerlegung:

$$24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \quad 18 = 2 \cdot 3 \cdot 3$$

$$\text{ggT}(24; 18) = 2 \cdot 3 = 6$$

$$\text{kgV}(24; 18) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 72$$

Teilmenge:

$$T(24) = \{1; 2; 3; 4; 6; 8; 12; 24\}$$

$$T(18) = \{1; 2; 3; 6; 9; 18\}$$

Vielfachmenge:

$$V(24) = \{24; 48; 72; 96; 120; 144; 168; 192; 216; 240; 264; 288; 312; 336; 360; 384; 408; 432; 456\}$$

$$V(18) = \{18; 36; 54; 72; 90; 108; 126; 144; 162; 180; 198; 216; 234; 252; 270; 288; 306; 324; 342\}$$

Aufgabe (9)

Primfaktorzerlegung:

$$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \quad 8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$$

$$\text{ggT}(12; 8) = 2 \cdot 2 = 4$$

$$\text{kgV}(12; 8) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 24$$

Teilmenge:

$$T(12) = \{1; 2; 3; 4; 6; 12\}$$

$$T(8) = \{1; 2; 4; 8\}$$

Vielfachmenge:

$$V(12) = \{12; 24; 36; 48; 60; 72; 84; 96; 108; 120; 132; 144; 156; 168; 180; 192; 204; 216; 228\}$$

$$V(8) = \{8; 16; 24; 32; 40; 48; 56; 64; 72; 80; 88; 96; 104; 112; 120; 128; 136; 144; 152\}$$

Aufgabe (10)

Primfaktorzerlegung:

$$14 = 2 \cdot 7 \quad 10 = 2 \cdot 5$$

$$\text{ggT}(14; 10) = 2 = 2$$

$$\text{kgV}(14; 10) = 2 \cdot 5 \cdot 7 = 70$$

Teilmenge:

$$T(14) = \{1; 2; 7; 14\}$$

$$T(10) = \{1; 2; 5; 10\}$$

Vielfachmenge:

$$V(14) = \{14; 28; 42; 56; 70; 84; 98; 112; 126; 140; 154; 168; 182; 196; 210; 224; 238; 252; 266\}$$

$$V(10) = \{10; 20; 30; 40; 50; 60; 70; 80; 90; 100; 110; 120; 130; 140; 150; 160; 170; 180; 190\}$$

Aufgabe (11)

Primfaktorzerlegung:

$$55 = 5 \cdot 11 \quad 45 = 3 \cdot 3 \cdot 5$$

$$\text{ggT}(55; 45) = 5 = 5$$

$$\text{kgV}(55; 45) = 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 = 495$$

Teilmenge:

$$T(55) = \{1; 5; 11; 55\}$$

$$T(45) = \{1; 3; 5; 9; 15; 45\}$$

Vielfachmenge:

$$V(55) = \{55; 110; 165; 220; 275; 330; 385; 440; 495; 550; 605; 660; 715; 770; 825; 880; 935; 990; 1045\}$$

$$V(45) = \{45; 90; 135; 180; 225; 270; 315; 360; 405; 450; 495; 540; 585; 630; 675; 720; 765; 810; 855\}$$

Aufgabe (12)

Primfaktorzerlegung:

$$4 = 2 \cdot 2 \quad 3 = 3$$

$$\text{ggT}(4, 3) = 1$$

$$\text{kgV}(4, 3) = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$$

Teilmengen:

$$T(4) = \{1; 2; 4\}$$

$$T(3) = \{1; 3\}$$

Vielfachmenge:

$$V(4) = \{4; 8; 12; 16; 20; 24; 28; 32; 36; 40; 44; 48; 52; 56; 60; 64; 68; 72; 76\}$$

$$V(3) = \{3; 6; 9; 12; 15; 18; 21; 24; 27; 30; 33; 36; 39; 42; 45; 48; 51; 54; 57\}$$

Aufgabe (13)

Primfaktorzerlegung:

$$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \quad 18 = 2 \cdot 3 \cdot 3$$

$$\text{ggT}(12; 18) = 2 \cdot 3 = 6$$

$$\text{kgV}(12; 18) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 36$$

Teilmengen:

$$T(12) = \{1; 2; 3; 4; 6; 12\}$$

$$T(18) = \{1; 2; 3; 6; 9; 18\}$$

Vielfachmenge:

$$V(12) = \{12; 24; 36; 48; 60; 72; 84; 96; 108; 120;$$

$$132; 144; 156; 168; 180; 192; 204; 216; 228\}$$

$$V(18) = \{18; 36; 54; 72; 90; 108; 126; 144; 162; 180;$$

$$198; 216; 234; 252; 270; 288; 306; 324; 342\}$$

Aufgabe (14)

Primfaktorzerlegung:

$$162 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \quad 12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$$

$$\text{ggT}(162; 12) = 2 \cdot 3 = 6$$

$$\text{kgV}(162; 12) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 324$$

Teilmengen:

$$T(162) = \{1; 2; 3; 6; 9; 18; 27; 54; 81; 162\}$$

$$T(12) = \{1; 2; 3; 4; 6; 12\}$$

Vielfachmenge:

$$V(162) = \{162; 324; 486; 648; 810; 972; 1134; 1296; 1458; 1620;$$

$$1782; 1944; 2106; 2268; 2430; 2592; 2754; 2916; 3078\}$$

$$V(12) = \{12; 24; 36; 48; 60; 72; 84; 96; 108; 120;$$

$$132; 144; 156; 168; 180; 192; 204; 216; 228\}$$

Aufgabe (15)

Primfaktorzerlegung:

$$14 = 2 \cdot 7 \quad 6 = 2 \cdot 3$$

$$\text{ggT}(14; 6) = 2 = 2$$

$$\text{kgV}(14; 6) = 2 \cdot 3 \cdot 7 = 42$$

Teilmengen:

$$T(14) = \{1; 2; 7; 14\}$$

$$T(6) = \{1; 2; 3; 6\}$$

Vielfachmenge:

$$V(14) = \{14; 28; 42; 56; 70; 84; 98; 112; 126; 140;$$

$$154; 168; 182; 196; 210; 224; 238; 252; 266\}$$

$$V(6) = \{6; 12; 18; 24; 30; 36; 42; 48; 54; 60;$$

$$66; 72; 78; 84; 90; 96; 102; 108; 114\}$$

Aufgabe (16)

Primfaktorzerlegung:

$$6 = 2 \cdot 3 \quad 5 = 5$$

$$\text{ggT}(6; 5) = 1$$

$$\text{kgV}(6; 5) = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$$

Teilmengen:

$$T(6) = \{1; 2; 3; 6\}$$

$$T(5) = \{1; 5\}$$

Vielfachmenge:

$$V(6) = \{6; 12; 18; 24; 30; 36; 42; 48; 54; 60;$$

$$66; 72; 78; 84; 90; 96; 102; 108; 114\}$$

$$V(5) = \{5; 10; 15; 20; 25; 30; 35; 40; 45; 50;$$

$$55; 60; 65; 70; 75; 80; 85; 90; 95\}$$

Aufgabe (17)

Primfaktorzerlegung:

$$162 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \quad 42 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7$$

$$\text{ggT}(162; 42) = 2 \cdot 3 = 6$$

$$\text{kgV}(162; 42) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 324$$

Teilmengen:

$$T(162) = \{1; 2; 3; 6; 9; 18; 27; 54; 81; 162\}$$

$$T(42) = \{1; 2; 3; 4; 6; 12\}$$

Primfaktorzerlegung:

$$42 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \quad 56 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7$$

$$\text{ggT}(42; 56) = 2 \cdot 7 = 14$$

$$\text{kgV}(42; 56) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 = 168$$

Teilmenge:

$$T(42) = \{1; 2; 3; 6; 7; 14; 21; 42\}$$

$$T(56) = \{1; 2; 4; 7; 8; 14; 28; 56\}$$

Vielfachmenge:

$$V(42) = \{42; 84; 126; 168; 210; 252; 294; 336; 378; 420;$$

$$462; 504; 546; 588; 630; 672; 714; 756; 798\}$$

$$V(56) = \{56; 112; 168; 224; 280; 336; 392; 448; 504; 560;$$

$$616; 672; 728; 784; 840; 896; 952; 1008; 1064\}$$

Aufgabe (18)

Primfaktorzerlegung:

$$5 = 5 \quad 4 = 2 \cdot 2$$

$$\text{ggT}(5; 4) = 1$$

$$\text{kgV}(5; 4) = 2 \cdot 2 \cdot 5 = 20$$

Teilmenge:

$$T(5) = \{1; 5\}$$

$$T(4) = \{1; 2; 4\}$$

Vielfachmenge:

$$V(5) = \{5; 10; 15; 20; 25; 30; 35; 40; 45; 50;$$

$$55; 60; 65; 70; 75; 80; 85; 90; 95\}$$

$$V(4) = \{4; 8; 12; 16; 20; 24; 28; 32; 36; 40;$$

$$44; 48; 52; 56; 60; 64; 68; 72; 76\}$$

Aufgabe (19)

Primfaktorzerlegung:

$$5 = 5 \quad 40 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5$$

$$\text{ggT}(5; 40) = 5 = 5$$

$$\text{kgV}(5; 40) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 = 40$$

Teilmenge:

$$T(5) = \{1; 5\}$$

$$T(40) = \{1; 2; 4; 5; 8; 10; 20; 40\}$$

Vielfachmenge:

$$V(5) = \{5; 10; 15; 20; 25; 30; 35; 40; 45; 50;$$

$$55; 60; 65; 70; 75; 80; 85; 90; 95\}$$

$$V(40) = \{40; 80; 120; 160; 200; 240; 280; 320; 360; 400;$$

$$440; 480; 520; 560; 600; 640; 680; 720; 760\}$$

Aufgabe (20)

Primfaktorzerlegung:

$$96 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \quad 40 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5$$

$$\text{ggT}(96; 40) = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$$

$$\text{kgV}(96; 40) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 480$$

Teilmenge:

$$T(96) = \{1; 2; 3; 4; 6; 8; 12; 16; 24; 32; 48; 96\}$$

$$T(40) = \{1; 2; 4; 5; 8; 10; 20; 40\}$$

Vielfachmenge:

$$V(96) = \{96; 192; 288; 384; 480; 576; 672; 768; 864; 960;$$

$$1056; 1152; 1248; 1344; 1440; 1536; 1632; 1728; 1824\}$$

$$V(40) = \{40; 80; 120; 160; 200; 240; 280; 320; 360; 400;$$

$$440; 480; 520; 560; 600; 640; 680; 720; 760\}$$

Aufgabe (21)

Primfaktorzerlegung:

$$32 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \quad 24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$$

$$\text{ggT}(32; 24) = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$$

$$\text{kgV}(32; 24) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 96$$

Teilmenge:

$$T(32) = \{1; 2; 4; 8; 16; 32\}$$

$$T(24) = \{1; 2; 3; 4; 6; 8; 12; 24\}$$

Vielfachmenge:

$$V(32) = \{32; 64; 96; 128; 160; 192; 224; 256; 288; 320;$$

$$352; 384; 416; 448; 480; 512; 544; 576; 608\}$$

$$V(24) = \{24; 48; 72; 96; 120; 144; 168; 192; 216; 240;$$

$$264; 288; 312; 336; 360; 384; 408; 432; 456\}$$

Aufgabe (22)

Primfaktorzerlegung:

$$120 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \quad 242 = 2 \cdot 11 \cdot 11$$

$$\text{ggT}(120; 242) = 2 = 2$$

$$\text{kgV}(120; 242) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 11 = 14520$$

Teilmenge:

$$T(120) = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 8; 10; 12; 15; 20; 24; 30; 40; 60; 120\}$$

$$T(242) = \{1; 2; 11; 22; 121; 242\}$$

Vielfachmenge:

$$V(120) = \{120; 240; 360; 480; 600; 720; 840; 960; 1080; 1200;$$

$$1320; 1440; 1560; 1680; 1800; 1920; 2040; 2160; 2280\}$$

$$V(242) = \{242; 484; 726; 968; 1210; 1452; 1694; 1936; 2178; 2420;$$

$$2662; 2904; 3146; 3388; 3630; 3872; 4114; 4356; 4598\}$$



## Aufgabe (25)

## Aufgabe (23)

Primfaktorzerlegung:

$$120 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \quad 246 = 2 \cdot 3 \cdot 41$$

$$\text{ggT}(120; 246) = 2 \cdot 3 = 6$$

$$\text{kgV}(120; 246) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 41 = 4920$$

Teilmengen:

$$T(120) = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 8; 10; 12; 15; 20; 24; 30; 40; 60; 120\}$$

$$T(246) = \{1; 2; 3; 6; 41; 82; 123; 246\}$$

Vielfachmenge:

$$V(120) = \{120; 240; 360; 480; 600; 720; 840; 960; 1080; 1200; 1320; 1440; 1560; 1680; 1800; 1920; 2040; 2160; 2280\}$$

$$V(246) = \{246; 492; 738; 984; 1230; 1476; 1722; 1968; 2214; 2460; 2706; 2952; 3198; 3444; 3690; 3936; 4182; 4428; 4674\}$$

Primfaktorzerlegung:

$$168 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 \quad 340 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 17$$

$$\text{ggT}(168; 340) = 2 \cdot 2 = 4$$

$$\text{kgV}(168; 340) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 17 = 14280$$

Teilmengen:

$$T(168) = \{1; 2; 3; 4; 6; 7; 8; 12; 14; 21; 24; 28; 42; 56; 84; 168\}$$

$$T(340) = \{1; 2; 4; 5; 10; 17; 20; 34; 68; 85; 170; 340\}$$

Vielfachmenge:

$$V(168) = \{168; 336; 504; 672; 840; 1008; 1176; 1344; 1512; 1680; 1848; 2016; 2184; 2352; 2520; 2688; 2856; 3024; 3192\}$$

$$V(340) = \{340; 680; 1020; 1360; 1700; 2040; 2380; 2720; 3060; 3400; 3740; 4080; 4420; 4760; 5100; 5440; 5780; 6120; 6460\}$$

## Aufgabe (24)

## Aufgabe (26)

Primfaktorzerlegung:

$$168 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 \quad 34 = 2 \cdot 17$$

$$\text{ggT}(168; 34) = 2 = 2$$

$$\text{kgV}(168; 34) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 17 = 2856$$

Teilmengen:

$$T(168) = \{1; 2; 3; 4; 6; 7; 8; 12; 14; 21; 24; 28; 42; 56; 84; 168\}$$

$$T(34) = \{1; 2; 17; 34\}$$

Vielfachmenge:

$$V(168) = \{168; 336; 504; 672; 840; 1008; 1176; 1344; 1512; 1680; 1848; 2016; 2184; 2352; 2520; 2688; 2856; 3024; 3192\}$$

$$V(34) = \{34; 68; 102; 136; 170; 204; 238; 272; 306; 340; 374; 408; 442; 476; 510; 544; 578; 612; 646\}$$

Primfaktorzerlegung:

$$34 = 2 \cdot 17 \quad 96 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$$

$$\text{ggT}(34; 96) = 2 = 2$$

$$\text{kgV}(34; 96) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 17 = 1632$$

Teilmengen:

$$T(34) = \{1; 2; 17; 34\}$$

$$T(96) = \{1; 2; 3; 4; 6; 8; 12; 16; 24; 32; 48; 96\}$$

Vielfachmenge:

$$V(34) = \{34; 68; 102; 136; 170; 204; 238; 272; 306; 340; 374; 408; 442; 476; 510; 544; 578; 612; 646\}$$

$$V(96) = \{96; 192; 288; 384; 480; 576; 672; 768; 864; 960; 1056; 1152; 1248; 1344; 1440; 1536; 1632; 1728; 1824\}$$

## 1.2 $ggT(a, b, c)$    $kgV(a, b, c)$

### 1.2.1 Aufgaben

Um eigene Aufgaben zu lösen, klicken Sie hier: [Neue Rechnung](#)

Gegeben:

Natürliche Zahlen  $a, b$  und  $c$

Gesucht:

Teilmengen von  $a, b$  und  $c$

Vielfachmenge von  $a, b$  und  $c$

Primfaktoren von  $a, b$  und  $c$

$ggT(a, b, c)$

$kgV(a, b, c)$

(1)  $a = 8$      $b = 12$      $c = 26$

(2)  $a = 4$      $b = 16$      $c = 48$

(3)  $a = 45$      $b = 24$      $c = 6$

(4)  $a = 18$      $b = 12$      $c = 40$

(5)  $a = 18$      $b = 12$      $c = 48$

(6)  $a = 40$      $b = 72$      $c = 24$

(7)  $a = 15$      $b = 21$      $c = 36$

(8)  $a = 5$      $b = 75$      $c = 30$

(9)  $a = 45$      $b = 75$      $c = 30$

## 1.2.2 Lösungen

## Aufgabe (1)

Primfaktorzerlegung:

$$26 = 2 \cdot 13 \quad 12 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \quad 8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$$

$$\text{ggT}(26; 12; 8) =$$

$$\text{ggT}(26; 12; 8) = 2 = 2$$

$$\text{kgV}(26; 12; 8) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 13 = 312$$

Teilmengen:

$$T(26) = \{1; 2; 13; 26\}$$

$$T(12) = \{1; 2; 3; 4; 6; 12\}$$

$$T(8) = \{1; 2; 4; 8\}$$

Vielfachmenge:

$$V(26) = \{26; 52; 78; 104; 130; 156; 182; 208; 234; 260;$$

$$286; 312; 338; 364; 390; 416; 442; 468; 494\}$$

$$V(12) = \{12; 24; 36; 48; 60; 72; 84; 96; 108; 120;$$

$$132; 144; 156; 168; 180; 192; 204; 216; 228\}$$

$$V(8) = \{8; 16; 24; 32; 40; 48; 56; 64; 72; 80;$$

$$88; 96; 104; 112; 120; 128; 136; 144; 152\}$$

## Aufgabe (2)

Primfaktorzerlegung:

$$48 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \quad 16 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \quad 4 = 2 \cdot 2$$

$$\text{ggT}(48; 16; 4) =$$

$$\text{ggT}(48; 16; 4) = 2 \cdot 2 = 4$$

$$\text{kgV}(48; 16; 4) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 48$$

Teilmengen:

$$T(48) = \{1; 2; 3; 4; 6; 8; 12; 16; 24; 48\}$$

$$T(16) = \{1; 2; 4; 8; 16\}$$

$$T(4) = \{1; 2; 4\}$$

Vielfachmenge:

$$V(48) = \{48; 96; 144; 192; 240; 288; 336; 384; 432; 480;$$

$$528; 576; 624; 672; 720; 768; 816; 864; 912\}$$

$$V(16) = \{16; 32; 48; 64; 80; 96; 112; 128; 144; 160;$$

$$176; 192; 208; 224; 240; 256; 272; 288; 304\}$$

$$V(4) = \{4; 8; 12; 16; 20; 24; 28; 32; 36; 40;$$

$$44; 48; 52; 56; 60; 64; 68; 72; 76\}$$

## Aufgabe (3)

Primfaktorzerlegung:

$$6 = 2 \cdot 3 \quad 24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \quad 45 = 3 \cdot 3 \cdot 5$$

$$\text{ggT}(6; 24; 45) =$$

$$\text{ggT}(6; 24; 45) = 3 = 3$$

$$\text{kgV}(6; 24; 45) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 360$$

Teilmengen:

$$T(6) = \{1; 2; 3; 6\}$$

$$T(24) = \{1; 2; 3; 4; 6; 8; 12; 24\}$$

$$T(45) = \{1; 3; 5; 9; 15; 45\}$$

Vielfachmenge:

$$V(6) = \{6; 12; 18; 24; 30; 36; 42; 48; 54; 60;$$

$$66; 72; 78; 84; 90; 96; 102; 108; 114\}$$

$$V(24) = \{24; 48; 72; 96; 120; 144; 168; 192; 216; 240;$$

$$264; 288; 312; 336; 360; 384; 408; 432; 456\}$$

$$V(45) = \{45; 90; 135; 180; 225; 270; 315; 360; 405; 450;$$

$$495; 540; 585; 630; 675; 720; 765; 810; 855\}$$

## Aufgabe (4)

Primfaktorzerlegung:

$$40 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \quad 12 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \quad 18 = 2 \cdot 3 \cdot 3$$

$$\text{ggT}(40; 12; 18) =$$

$$\text{ggT}(40; 12; 18) = 2 = 2$$

$$\text{kgV}(40; 12; 18) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 360$$

Teilmengen:

$$T(40) = \{1; 2; 4; 5; 8; 10; 20; 40\}$$

$$T(12) = \{1; 2; 3; 4; 6; 12\}$$

$$T(18) = \{1; 2; 3; 6; 9; 18\}$$

Vielfachmenge:

$$V(40) = \{40; 80; 120; 160; 200; 240; 280; 320; 360; 400;$$

$$440; 480; 520; 560; 600; 640; 680; 720; 760\}$$

$$V(12) = \{12; 24; 36; 48; 60; 72; 84; 96; 108; 120;$$

$$132; 144; 156; 168; 180; 192; 204; 216; 228\}$$

$$V(18) = \{18; 36; 54; 72; 90; 108; 126; 144; 162; 180;$$

$$198; 216; 234; 252; 270; 288; 306; 324; 342\}$$

## Aufgabe (5)

Primfaktorzerlegung:

$$48 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \quad 12 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \quad 18 = 2 \cdot 3 \cdot 3$$

$$\text{ggT}(48; 12; 18) =$$

$$\text{ggT}(48; 12; 18) = 2 \cdot 3 = 6$$

$$\text{kgV}(48; 12; 18) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 144$$

Teilmengen:

$$T(48) = \{1; 2; 3; 4; 6; 8; 12; 16; 24; 48\}$$

$$T(12) = \{1; 2; 3; 4; 6; 12\}$$

$$T(18) = \{1; 2; 3; 6; 9; 18\}$$

Vielfachmenge:

$$V(48) = \{48; 96; 144; 192; 240; 288; 336; 384; 432; 480;$$

$$528; 576; 624; 672; 720; 768; 816; 864; 912\}$$

$$V(12) = \{12; 24; 36; 48; 60; 72; 84; 96; 108; 120;$$

$$132; 144; 156; 168; 180; 192; 204; 216; 228\}$$

$$V(18) = \{18; 36; 54; 72; 90; 108; 126; 144; 162; 180;$$

198; 216; 234; 252; 270; 288; 306; 324; 342}

Aufgabe (8)

Aufgabe (6)

Primfaktorzerlegung:

$$24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \quad 72 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \quad 40 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5$$

$$\text{ggT}(24; 72; 40) =$$

$$\text{ggT}(24; 72; 40) = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$$

$$\text{kgV}(24; 72; 40) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 360$$

Teilmengen:

$$T(24) = \{1; 2; 3; 4; 6; 8; 12; 24\}$$

$$T(72) = \{1; 2; 3; 4; 6; 8; 9; 12; 18; 24; 36; 72\}$$

$$T(40) = \{1; 2; 4; 5; 8; 10; 20; 40\}$$

Vielfachmengen:

$$V(24) = \{24; 48; 72; 96; 120; 144; 168; 192; 216; 240;$$

$$264; 288; 312; 336; 360; 384; 408; 432; 456\}$$

$$V(72) = \{72; 144; 216; 288; 360; 432; 504; 576; 648; 720;$$

$$792; 864; 936; 1008; 1080; 1152; 1224; 1296; 1368\}$$

$$V(40) = \{40; 80; 120; 160; 200; 240; 280; 320; 360; 400;$$

$$440; 480; 520; 560; 600; 640; 680; 720; 760\}$$

Primfaktorzerlegung:

$$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \quad 75 = 3 \cdot 5 \cdot 5 \quad 5 = 5$$

$$\text{ggT}(30; 75; 5) =$$

$$\text{ggT}(30; 75; 5) = 5 = 5$$

$$\text{kgV}(30; 75; 5) = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 = 150$$

Teilmengen:

$$T(30) = \{1; 2; 3; 5; 6; 10; 15; 30\}$$

$$T(75) = \{1; 3; 5; 15; 25; 75\}$$

$$T(5) = \{1; 5\}$$

Vielfachmengen:

$$V(30) = \{30; 60; 90; 120; 150; 180; 210; 240; 270; 300;$$

$$330; 360; 390; 420; 450; 480; 510; 540; 570\}$$

$$V(75) = \{75; 150; 225; 300; 375; 450; 525; 600; 675; 750;$$

$$825; 900; 975; 1050; 1125; 1200; 1275; 1350; 1425\}$$

$$V(5) = \{5; 10; 15; 20; 25; 30; 35; 40; 45; 50;$$

$$55; 60; 65; 70; 75; 80; 85; 90; 95\}$$

Aufgabe (9)

Aufgabe (7)

Primfaktorzerlegung:

$$36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \quad 21 = 3 \cdot 7 \quad 15 = 3 \cdot 5$$

$$\text{ggT}(36; 21; 15) =$$

$$\text{ggT}(36; 21; 15) = 3 = 3$$

$$\text{kgV}(36; 21; 15) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 1260$$

Teilmengen:

$$T(36) = \{1; 2; 3; 4; 6; 9; 12; 18; 36\}$$

$$T(21) = \{1; 3; 7; 21\}$$

$$T(15) = \{1; 3; 5; 15\}$$

Vielfachmengen:

$$V(36) = \{36; 72; 108; 144; 180; 216; 252; 288; 324; 360;$$

$$396; 432; 468; 504; 540; 576; 612; 648; 684\}$$

$$V(21) = \{21; 42; 63; 84; 105; 126; 147; 168; 189; 210;$$

$$231; 252; 273; 294; 315; 336; 357; 378; 399\}$$

$$V(15) = \{15; 30; 45; 60; 75; 90; 105; 120; 135; 150;$$

$$165; 180; 195; 210; 225; 240; 255; 270; 285\}$$

Primfaktorzerlegung:

$$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \quad 75 = 3 \cdot 5 \cdot 5 \quad 45 = 3 \cdot 3 \cdot 5$$

$$\text{ggT}(30; 75; 45) =$$

$$\text{ggT}(30; 75; 45) = 3 \cdot 5 = 15$$

$$\text{kgV}(30; 75; 45) = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 = 450$$

Teilmengen:

$$T(30) = \{1; 2; 3; 5; 6; 10; 15; 30\}$$

$$T(75) = \{1; 3; 5; 15; 25; 75\}$$

$$T(45) = \{1; 3; 5; 9; 15; 45\}$$

Vielfachmengen:

$$V(30) = \{30; 60; 90; 120; 150; 180; 210; 240; 270; 300;$$

$$330; 360; 390; 420; 450; 480; 510; 540; 570\}$$

$$V(75) = \{75; 150; 225; 300; 375; 450; 525; 600; 675; 750;$$

$$825; 900; 975; 1050; 1125; 1200; 1275; 1350; 1425\}$$

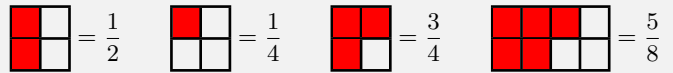
$$V(45) = \{45; 90; 135; 180; 225; 270; 315; 360; 405; 450;$$

$$495; 540; 585; 630; 675; 720; 765; 810; 855\}$$

## 2 Brüche

### Bruch

$$\begin{aligned} \text{Dividend} : \text{Divisor} &= \text{Quotient} \\ \frac{\text{Dividend}}{\text{Divisor}} &= \frac{\text{Zähler}}{\text{Nenner}} = \frac{Z}{N} = \text{Wert des Bruchs} \end{aligned}$$



### Besondere Brüche

- Echter Bruch: Nenner größer als Zähler
- Unechter Bruch: Zähler größer als Nenner
- Gemischte Zahl: Ganze Zahl + Bruch
- Stammbrüche: Zähler ist 1
- Gleichnamige Brüche: Nenner ist gleich
- Ungleichnamige Brüche: Nenner ist verschieden
- Kehrwert: Zähler und Nenner vertauschen
- Scheinbrüche: Scheinbrüche sind natürliche Zahlen

$$\text{Echter Bruch: } \frac{2}{4}; \frac{5}{7}; \frac{1}{3}$$

$$\text{Unechter Bruch: } \frac{20}{4}; \frac{15}{7}; \frac{8}{3}$$

$$\text{Gemischte Zahl: } 2\frac{2}{4}; 6\frac{5}{7}; 7\frac{8}{3}$$

$$\text{Stammbrüche: } \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}$$

$$\text{Gleichnamige Brüche: } \frac{2}{4}; \frac{3}{4}; \frac{8}{4}$$

$$\text{Ungleichnamige Brüche: } \frac{2}{4}; \frac{5}{7}; \frac{8}{3}$$

$$\text{Kehrwert: } \frac{2}{4} \Leftrightarrow \frac{4}{2}; \frac{5}{7} \Leftrightarrow \frac{7}{5}$$

$$\text{Scheinbrüche: } \frac{4}{2} = 2; \frac{28}{7} = 4$$

### Erweitern von Brüchen

$$\begin{aligned} \text{Zähler und Nenner mit der gleichen Zahl multiplizieren} \\ \frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c} \end{aligned}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 2}{4 \cdot 2} = \frac{6}{8}$$

### Kürzen von Brüchen

- Zähler und Nenner mit der gleichen Zahl dividieren
- $$\frac{a}{b} = \frac{a : c}{b : c}$$
- Zähler und Nenner durch den ggT(Zähler; Nenner) teilen
- $$\text{ggT}(a, b) = c$$
- $$\frac{a}{b} = \frac{a : c}{b : c}$$
- Zähler und Nenner in Primfaktoren zerlegen und gleiche Primfaktoren kürzen

$$\frac{12}{18} = \frac{12 : 2}{18 : 2} = \frac{6}{9}$$

$$\frac{6}{9} = \frac{6 : 3}{9 : 3} = \frac{2}{3}$$

$$\text{ggT}(18; 12) = 6$$

$$\frac{12}{18} = \frac{12 : 6}{18 : 6} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{12}{18} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 3}{2 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{2}{3}$$

### Addition und Subtraktion gleichnamiger Brüche

$$\begin{aligned} \text{Zähler addieren bzw. subtrahieren} \\ \frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c} \\ \frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} + \frac{4}{3} &= \frac{2+4}{3} = \frac{6}{3} \\ \frac{5}{7} - \frac{3}{7} &= \frac{5-3}{7} = \frac{2}{7} \end{aligned}$$

## Addition und Subtraktion ungleichnamiger Brüche

Brüche durch Erweitern gleichnamig machen

- Hauptnenner: Produkt der beiden Nenner

Erweiterungsfaktoren: d und b

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} + \frac{c \cdot b}{b \cdot d} = \frac{a \cdot d + c \cdot b}{b \cdot d}$$

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} - \frac{c \cdot b}{b \cdot d} = \frac{a \cdot d - c \cdot b}{b \cdot d}$$

- Hauptnenner:  $\text{kgV}(b,d)=c$

Erweiterungsfaktoren:  $\frac{c}{b}$  und  $\frac{c}{d}$

$$\frac{2}{3} + \frac{3}{4}$$

Hauptnenner:  $3 \cdot 4 = 12$

Erweiterungsfaktoren: 4 **und** 3

$$\frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 4} + \frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 3} = \frac{8}{12} + \frac{9}{12} = \frac{17}{12} = 1 \frac{5}{12}$$

$$\frac{3}{12} + \frac{5}{18}$$

Hauptnenner:  $\text{kgV}(12,18) = 36$

Erweiterungsfaktoren:  $\frac{36}{12} = 3$  und  $\frac{36}{18} = 2$

$$\frac{3}{12} + \frac{5}{18} = \frac{3 \cdot 3}{12 \cdot 3} + \frac{5 \cdot 2}{18 \cdot 2} = \frac{9}{36} + \frac{10}{36} = \frac{19}{36}$$

## Multiplikation von Brüchen

Zähler mal Zähler und Nenner mal Nenner

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} = \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 6} = \frac{15}{24}$$

## Division von Brüchen

Mit dem Kehrwert des Bruches multiplizieren

Bruch durch Bruch

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

Bruch durch Zahl

$$\frac{\frac{a}{b}}{e} = \frac{a}{b} : e = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{e} = \frac{a}{b \cdot e}$$

Zahl durch Bruch

$$\frac{e}{\frac{c}{d}} = e : \frac{c}{d} = \frac{e}{1} \cdot \frac{d}{c} = \frac{e \cdot d}{c}$$

Doppelbruch

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

$$\frac{3}{4} : \frac{5}{6} = \frac{3}{4} \cdot \frac{6}{5} = \frac{3 \cdot 6}{4 \cdot 5} = \frac{18}{20}$$

$$4 : \frac{5}{6} = 4 \cdot \frac{6}{5} = \frac{4 \cdot 6}{5} = \frac{24}{5}$$

$$\frac{3}{4} : 5 = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{5} = \frac{3}{4 \cdot 5} = \frac{3}{20}$$

$$\frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{6}} = \frac{3}{4} : \frac{5}{6} = \frac{3}{4} \cdot \frac{6}{5} = \frac{3 \cdot 6}{4 \cdot 5} = \frac{18}{20}$$

## 2.1 Kürzen

### 2.1.1 Aufgaben

Um eigene Aufgaben zu lösen, klicken Sie hier: [Neue Rechnung](#)

Gegeben:

Bruch:  $\frac{a}{b}$

Gesucht:

Gekürzter Bruch

(1)  $a = 12$      $b = 18$

(2)  $a = 21$      $b = 14$

(3)  $a = 56$      $b = 18$

(4)  $a = 120$      $b = 25$

(5)  $a = 17$      $b = 54$

(6)  $a = 7$      $b = 14$

(7)  $a = 20$      $b = 18$

(8)  $a = 88$      $b = 118$

(9)  $a = 6$      $b = 36$

(10)  $a = 5$      $b = 15$

(11)  $a = 11$      $b = 7$

(12)  $a = 13$      $b = 52$

(13)  $a = 66$      $b = 3$

## 2.1.2 Lösungen

	Aufgabe (1)	$\begin{aligned} \text{ggt}(20, 18) &= 2 \\ \frac{20 : 2}{18 : 2} &= \frac{10}{9} = 1\frac{1}{9} \end{aligned}$	
$\frac{12}{18}$ $\text{ggt}(12, 18) = 6$ $\frac{12 : 6}{18 : 6} = \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$			Aufgabe (8)
	Aufgabe (2)	$\frac{88}{118}$ $\text{ggt}(88, 118) = 2$ $\frac{88 : 2}{118 : 2} = \frac{44}{59} = \frac{44}{59}$	
$\frac{21}{14}$ $\text{ggt}(21, 14) = 7$ $\frac{21 : 7}{14 : 7} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$			Aufgabe (9)
	Aufgabe (3)	$\frac{6}{36}$ $\text{ggt}(6, 36) = 6$ $\frac{6 : 6}{36 : 6} = \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$	
$\frac{56}{18}$ $\text{ggt}(56, 18) = 2$ $\frac{56 : 2}{18 : 2} = \frac{28}{9} = 3\frac{1}{9}$			Aufgabe (10)
	Aufgabe (4)	$\frac{5}{15}$ $\text{ggt}(5, 15) = 5$ $\frac{5 : 5}{15 : 5} = \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$	
$\frac{120}{25}$ $\text{ggt}(120, 25) = 5$ $\frac{120 : 5}{25 : 5} = \frac{24}{5} = 4\frac{4}{5}$			Aufgabe (11)
	Aufgabe (5)	$\frac{11}{7}$ $\text{ggt}(11, 7) = 1$ $\frac{11 : 1}{7 : 1} = \frac{11}{7} = 1\frac{4}{7}$	
$\frac{17}{54}$ $\text{ggt}(17, 54) = 1$ $\frac{17 : 1}{54 : 1} = \frac{17}{54} = \frac{17}{54}$			Aufgabe (12)
	Aufgabe (6)	$\frac{13}{52}$ $\text{ggt}(13, 52) = 13$ $\frac{13 : 13}{52 : 13} = \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$	
$\frac{7}{14}$ $\text{ggt}(7, 14) = 7$ $\frac{7 : 7}{14 : 7} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$			Aufgabe (13)
	Aufgabe (7)	$\frac{66}{3}$ $\text{ggt}(66, 3) = 3$ $\frac{66 : 3}{3 : 3} = \frac{22}{1} = 22$	
$\frac{20}{18}$			

## 2.2 $\frac{a}{b} - \frac{c}{d}$

### 2.2.1 Aufgaben

Um eigene Aufgaben zu lösen, klicken Sie hier: [Neue Rechnung](#)

Gegeben:

Bruch1:  $\frac{a}{b}$

Bruch2:  $\frac{c}{d}$

Gesucht:

Summe, Differenz, Produkt, Quotient

- (1)  $a = 3$     $b = 4$     $c = 5$     $d = 6$
- (2)  $a = 3$     $b = 4$     $c = 5$     $d = 9$
- (3)  $a = 5$     $b = 6$     $c = 2$     $d = 7$
- (4)  $a = 4$     $b = 5$     $c = 7$     $d = 3$
- (5)  $a = 11$     $b = 5$     $c = 7$     $d = 3$
- (6)  $a = 4$     $b = 5$     $c = 4$     $d = 12$

- (7)  $a = 14$     $b = 5$     $c = 16$     $d = 7$
- (8)  $a = 7$     $b = 50$     $c = 3$     $d = 40$
- (9)  $a = 3$     $b = 4$     $c = 2$     $d = 15$
- (10)  $a = 4$     $b = 5$     $c = 6$     $d = 7$



## 2.2.2 Lösungen

Aufgabe (1)

$$\begin{aligned} \text{Hauptnenner: } \text{kgV}(4, 6) &= 12 \\ \text{Erweiterungsfaktoren: } \frac{12}{4} &= 3 \quad \frac{12}{6} = 2 \end{aligned}$$

Summe

$$\frac{3}{4} + \frac{5}{6} = \frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 3} + \frac{5 \cdot 2}{6 \cdot 2} = \frac{9+10}{12} = \frac{19}{12} = 1 \frac{7}{12}$$

Differenz

$$\frac{3}{4} - \frac{5}{6} = \frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 3} - \frac{5 \cdot 2}{6 \cdot 2} = \frac{9-10}{12} = \frac{-1}{12} = -\frac{1}{12}$$

Produkt

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} = \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 6} = \frac{15}{24} = \frac{5}{8}$$

Quotient

$$\frac{3}{4} : \frac{5}{6} = \frac{3}{4} \cdot \frac{6}{5} = \frac{18}{20} = \frac{9}{10}$$

Aufgabe (2)

$$\begin{aligned} \text{Hauptnenner: } \text{kgV}(4, 9) &= 36 \\ \text{Erweiterungsfaktoren: } \frac{36}{4} &= 9 \quad \frac{36}{9} = 4 \end{aligned}$$

Summe

$$\frac{3}{4} + \frac{5}{9} = \frac{3 \cdot 9}{4 \cdot 9} + \frac{5 \cdot 4}{9 \cdot 4} = \frac{27+20}{36} = \frac{47}{36} = 1 \frac{11}{36}$$

Differenz

$$\frac{3}{4} - \frac{5}{9} = \frac{3 \cdot 9}{4 \cdot 9} - \frac{5 \cdot 4}{9 \cdot 4} = \frac{27-20}{36} = \frac{7}{36} = \frac{7}{36}$$

Produkt

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{9} = \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 9} = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$$

Quotient

$$\frac{3}{4} : \frac{5}{9} = \frac{3}{4} \cdot \frac{9}{5} = \frac{27}{20} = 1 \frac{7}{20}$$

Aufgabe (3)

$$\begin{aligned} \text{Hauptnenner: } \text{kgV}(6, 7) &= 42 \\ \text{Erweiterungsfaktoren: } \frac{42}{6} &= 7 \quad \frac{42}{7} = 6 \end{aligned}$$

Summe

$$\frac{5}{6} + \frac{2}{7} = \frac{5 \cdot 7}{6 \cdot 7} + \frac{2 \cdot 6}{7 \cdot 6} = \frac{35+12}{42} = \frac{47}{42} = 1 \frac{5}{42}$$

Differenz

$$\frac{5}{6} - \frac{2}{7} = \frac{5 \cdot 7}{6 \cdot 7} - \frac{2 \cdot 6}{7 \cdot 6} = \frac{35-12}{42} = \frac{23}{42} = \frac{23}{42}$$

Produkt

$$\frac{5}{6} \cdot \frac{2}{7} = \frac{5 \cdot 2}{6 \cdot 7} = \frac{10}{42} = \frac{5}{21}$$

Quotient

$$\frac{5}{6} : \frac{2}{7} = \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{2} = \frac{35}{12} = 2 \frac{11}{12}$$

Aufgabe (4)

$$\begin{aligned} \text{Hauptnenner: } \text{kgV}(5, 3) &= 15 \\ \text{Erweiterungsfaktoren: } \frac{15}{5} &= 3 \quad \frac{15}{3} = 5 \end{aligned}$$

Summe

$$\frac{4}{5} + \frac{7}{3} = \frac{4 \cdot 3}{5 \cdot 3} + \frac{7 \cdot 5}{3 \cdot 5} = \frac{12+35}{15} = \frac{47}{15} = 3 \frac{2}{15}$$

Differenz

$$\frac{4}{5} - \frac{7}{3} = \frac{4 \cdot 3}{5 \cdot 3} - \frac{7 \cdot 5}{3 \cdot 5} = \frac{12-35}{15} = \frac{-23}{15} = -1 \frac{8}{15}$$

Produkt

$$\frac{4}{5} \cdot \frac{7}{3} = \frac{4 \cdot 7}{5 \cdot 3} = \frac{28}{15} = 1 \frac{13}{15}$$

Quotient

$$\frac{4}{5} : \frac{7}{3} = \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{7} = \frac{12}{35} = \frac{12}{35}$$

Aufgabe (5)

$$\begin{aligned} \text{Hauptnenner: } \text{kgV}(5, 3) &= 15 \\ \text{Erweiterungsfaktoren: } \frac{15}{5} &= 3 \quad \frac{15}{3} = 5 \end{aligned}$$

Summe

$$\frac{11}{5} + \frac{7}{3} = \frac{11 \cdot 3}{5 \cdot 3} + \frac{7 \cdot 5}{3 \cdot 5} = \frac{33+35}{15} = \frac{68}{15} = 4 \frac{8}{15}$$

Differenz

$$\frac{11}{5} - \frac{7}{3} = \frac{11 \cdot 3}{5 \cdot 3} - \frac{7 \cdot 5}{3 \cdot 5} = \frac{33-35}{15} = \frac{-2}{15} = -\frac{2}{15}$$

Produkt

$$\frac{11}{5} \cdot \frac{7}{3} = \frac{11 \cdot 7}{5 \cdot 3} = \frac{77}{15} = 5 \frac{2}{15}$$

Quotient

$$\frac{11}{5} : \frac{7}{3} = \frac{11}{5} \cdot \frac{3}{7} = \frac{33}{35} = \frac{33}{35}$$

Aufgabe (6)

$$\begin{aligned} \text{Hauptnenner: } \text{kgV}(5, 12) &= 60 \\ \text{Erweiterungsfaktoren: } \frac{60}{5} &= 12 \quad \frac{60}{12} = 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Hauptnenner: } \text{kgV}(5, 12) &= 60 \\ \text{Erweiterungsfaktoren: } \frac{60}{5} &= 12 \quad \frac{60}{12} = 5 \end{aligned}$$

Summe

$$\frac{4}{5} + \frac{4}{12} = \frac{4 \cdot 12}{5 \cdot 12} + \frac{4 \cdot 5}{12 \cdot 5} = \frac{48+20}{60} = \frac{68}{60} = 1 \frac{2}{15}$$

Summe

$$\frac{4}{5} + \frac{4}{12} = \frac{4 \cdot 12}{5 \cdot 12} + \frac{4 \cdot 5}{12 \cdot 5} = \frac{48+20}{60} = \frac{68}{60} = 1 \frac{2}{15}$$

Differenz

$$\frac{4}{5} - \frac{4}{12} = \frac{4 \cdot 12}{5 \cdot 12} - \frac{4 \cdot 5}{12 \cdot 5} = \frac{48-20}{60} = \frac{28}{60} = \frac{7}{15}$$

Differenz

$$\frac{4}{5} - \frac{4}{12} = \frac{4 \cdot 12}{5 \cdot 12} - \frac{4 \cdot 5}{12 \cdot 5} = \frac{48-20}{60} = \frac{28}{60} = \frac{7}{15}$$

Produkt

$$\frac{4}{5} \cdot \frac{4}{12} = \frac{4 \cdot 4}{5 \cdot 12} = \frac{16}{60} = \frac{4}{15}$$

Produkt

$$\frac{4}{5} \cdot \frac{4}{12} = \frac{4 \cdot 4}{5 \cdot 12} = \frac{16}{60} = \frac{4}{15}$$

Quotient

$$\frac{4}{5} : \frac{4}{12} = \frac{4}{5} \cdot \frac{12}{4} = \frac{48}{20} = 2 \frac{2}{5}$$

Quotient

$$\frac{4}{5} : \frac{4}{12} = \frac{4}{5} \cdot \frac{12}{4} = \frac{48}{20} = 2 \frac{2}{5}$$

## Aufgabe (7)

Hauptnenner:  $\text{kgV}(5, 7) = 35$ Erweiterungsfaktoren:  $\frac{35}{5} = 7$      $\frac{35}{7} = 5$ 

Summe

$$\frac{14}{5} + \frac{16}{7} = \frac{14 \cdot 7}{5 \cdot 7} + \frac{16 \cdot 5}{7 \cdot 5} = \frac{98+80}{35} = \frac{178}{35} = 5 \frac{3}{35}$$

Differenz

$$\frac{14}{5} - \frac{16}{7} = \frac{14 \cdot 7}{5 \cdot 7} - \frac{16 \cdot 5}{7 \cdot 5} = \frac{98-80}{35} = \frac{18}{35} = \frac{18}{35}$$

Produkt

$$\frac{14}{5} \cdot \frac{16}{7} = \frac{14 \cdot 16}{5 \cdot 7} = \frac{224}{35} = 6 \frac{2}{5}$$

Quotient

$$\frac{14}{5} : \frac{16}{7} = \frac{14}{5} \cdot \frac{7}{16} = \frac{98}{80} = 1 \frac{9}{80}$$

## Aufgabe (9)

Hauptnenner:  $\text{kgV}(4, 15) = 60$ Erweiterungsfaktoren:  $\frac{60}{4} = 15$      $\frac{60}{15} = 4$ 

Summe

$$\frac{3}{4} + \frac{2}{15} = \frac{3 \cdot 15}{4 \cdot 15} + \frac{2 \cdot 4}{15 \cdot 4} = \frac{45+8}{60} = \frac{53}{60} = \frac{53}{60}$$

Differenz

$$\frac{3}{4} - \frac{2}{15} = \frac{3 \cdot 15}{4 \cdot 15} - \frac{2 \cdot 4}{15 \cdot 4} = \frac{45-8}{60} = \frac{37}{60} = \frac{37}{60}$$

Produkt

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{15} = \frac{3 \cdot 2}{4 \cdot 15} = \frac{6}{60} = \frac{1}{10}$$

Quotient

$$\frac{3}{4} : \frac{2}{15} = \frac{3}{4} \cdot \frac{15}{2} = \frac{45}{8} = 5 \frac{5}{8}$$

## Aufgabe (8)

Hauptnenner:  $\text{kgV}(50, 40) = 200$ Erweiterungsfaktoren:  $\frac{200}{50} = 4$      $\frac{200}{40} = 5$ 

Summe

$$\frac{7}{50} + \frac{3}{40} = \frac{7 \cdot 4}{50 \cdot 4} + \frac{3 \cdot 5}{40 \cdot 5} = \frac{28+15}{200} = \frac{43}{200} = 0,215$$

Differenz

$$\frac{7}{50} - \frac{3}{40} = \frac{7 \cdot 4}{50 \cdot 4} - \frac{3 \cdot 5}{40 \cdot 5} = \frac{28-15}{200} = \frac{13}{200} = 0,065$$

Produkt

$$\frac{7}{50} \cdot \frac{3}{40} = \frac{7 \cdot 3}{50 \cdot 40} = \frac{21}{2 \cdot 10^3} = 0,0105$$

Quotient

$$\frac{7}{50} : \frac{3}{40} = \frac{7}{50} \cdot \frac{40}{3} = \frac{280}{150} = 1 \frac{13}{15}$$

## Aufgabe (10)

Hauptnenner:  $\text{kgV}(5, 7) = 35$ Erweiterungsfaktoren:  $\frac{35}{5} = 7$      $\frac{35}{7} = 5$ 

Summe

$$\frac{4}{5} + \frac{6}{7} = \frac{4 \cdot 7}{5 \cdot 7} + \frac{6 \cdot 5}{7 \cdot 5} = \frac{28+30}{35} = \frac{58}{35} = 1 \frac{23}{35}$$

Differenz

$$\frac{4}{5} - \frac{6}{7} = \frac{4 \cdot 7}{5 \cdot 7} - \frac{6 \cdot 5}{7 \cdot 5} = \frac{28-30}{35} = \frac{-2}{35} = -\frac{2}{35}$$

Produkt

$$\frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} = \frac{4 \cdot 6}{5 \cdot 7} = \frac{24}{35} = \frac{24}{35}$$

Quotient

$$\frac{4}{5} : \frac{6}{7} = \frac{4}{5} \cdot \frac{7}{6} = \frac{28}{30} = \frac{14}{15}$$

## 2.3 $a\frac{b}{c} - d\frac{e}{f}$

### 2.3.1 Aufgaben

Um eigene Aufgaben zu lösen, klicken Sie hier: [Neue Rechnung](#)

Gegeben:

Bruch1:  $a\frac{b}{c}$

Bruch2:  $d\frac{e}{f}$

Gesucht:

Summe, Differenz, Produkt, Quotient

- |     |          |         |         |         |         |            |          |         |         |         |         |         |
|-----|----------|---------|---------|---------|---------|------------|----------|---------|---------|---------|---------|---------|
| (1) | $a = 4$  | $b = 5$ | $c = 6$ | $d = 7$ | $e = 8$ | $f = 9(5)$ | $a = 1$  | $b = 7$ | $c = 9$ | $d = 3$ | $e = 2$ | $f = 5$ |
| (2) | $a = 1$  | $b = 2$ | $c = 3$ | $d = 3$ | $e = 2$ | $f = 5(6)$ | $a = 1$  | $b = 4$ | $c = 3$ | $d = 3$ | $e = 2$ | $f = 5$ |
| (3) | $a = 1$  | $b = 2$ | $c = 3$ | $d = 3$ | $e = 2$ | $f = 5(7)$ | $a = 15$ | $b = 2$ | $c = 8$ | $d = 3$ | $e = 2$ | $f = 3$ |
| (4) | $a = 10$ | $b = 2$ | $c = 3$ | $d = 8$ | $e = 2$ | $f = 5$    |          |         |         |         |         |         |

### 2.3.2 Lösungen

#### Aufgabe (1)

Hauptnenner:  $\text{kgV}(6, 9) = 18$

Erweiterungsfaktoren:  $\frac{18}{6} = 3$      $\frac{18}{9} = 2$

Summe

$$4\frac{5}{6} + 7\frac{8}{9} = 4 + 7 + \frac{5 \cdot 3}{6 \cdot 3} + \frac{8 \cdot 2}{9 \cdot 2} = 11 + \frac{15+16}{18} = 11 + \frac{31}{18} = 12\frac{13}{18}$$

Differenz

$$4\frac{5}{6} - 7\frac{8}{9} = 4 - 7 + \frac{5 \cdot 3}{6 \cdot 3} - \frac{8 \cdot 2}{9 \cdot 2} = -3 + \frac{15-16}{18} = -3 + \frac{-1}{18} = -3\frac{1}{18}$$

Produkt

$$4\frac{5}{6} \cdot 7\frac{8}{9} = \frac{4 \cdot 6 + 5}{6} \cdot \frac{7 \cdot 9 + 8}{9} = \frac{29}{6} \cdot \frac{71}{9} = \frac{29 \cdot 71}{6 \cdot 9} = \frac{2 \cdot 06 \cdot 10^3}{54} = 38\frac{7}{54}$$

Quotient

$$4\frac{5}{6} : 7\frac{8}{9} = \frac{4 \cdot 6 + 5}{6} : \frac{7 \cdot 9 + 8}{9} = \frac{29}{6} : \frac{71}{9} = \frac{29}{6} \cdot \frac{9}{71} = \frac{261}{426} = 0,613$$

#### Aufgabe (2)

Hauptnenner:  $\text{kgV}(3, 5) = 15$

Erweiterungsfaktoren:  $\frac{15}{3} = 5$      $\frac{15}{5} = 3$

Summe

$$1\frac{2}{3} + 3\frac{2}{5} = 1 + 3 + \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 5} + \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 3} = 4 + \frac{10+6}{15} = 4 + \frac{16}{15} = 5\frac{1}{15}$$

Differenz

$$1\frac{2}{3} - 3\frac{2}{5} = 1 - 3 + \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 5} - \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 3} = -2 + \frac{10-6}{15} = -2 + \frac{4}{15} = -1\frac{11}{15}$$

Produkt

$$1\frac{2}{3} \cdot 3\frac{2}{5} = \frac{1 \cdot 3 + 2}{3} \cdot \frac{3 \cdot 5 + 2}{5} = \frac{5}{3} \cdot \frac{17}{5} = \frac{5 \cdot 17}{3 \cdot 5} = \frac{85}{15} = 5\frac{2}{3}$$

Quotient

$$1\frac{2}{3} : 3\frac{2}{5} = \frac{1 \cdot 3 + 2}{3} : \frac{3 \cdot 5 + 2}{5} = \frac{5}{3} : \frac{17}{5} = \frac{5}{3} \cdot \frac{5}{17} = \frac{25}{51} = \frac{25}{51}$$

#### Aufgabe (3)

Hauptnenner:  $\text{kgV}(3, 5) = 15$

Erweiterungsfaktoren:  $\frac{15}{3} = 5$      $\frac{15}{5} = 3$

Summe

$$1\frac{2}{3} + 3\frac{2}{5} = 1 + 3 + \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 5} + \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 3} = 4 + \frac{10+6}{15} = 4 + \frac{16}{15} = 5\frac{1}{15}$$

Differenz

$$1\frac{2}{3} - 3\frac{2}{5} = 1 - 3 + \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 5} - \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 3} = -2 + \frac{10-6}{15} = -2 + \frac{4}{15} = -1\frac{11}{15}$$

Produkt

$$1\frac{2}{3} \cdot 3\frac{2}{5} = \frac{1 \cdot 3 + 2}{3} \cdot \frac{3 \cdot 5 + 2}{5} = \frac{5}{3} \cdot \frac{17}{5} = \frac{5 \cdot 17}{3 \cdot 5} = \frac{85}{15} = 5\frac{2}{3}$$

Quotient

$$1\frac{2}{3} : 3\frac{2}{5} = \frac{1 \cdot 3 + 2}{3} : \frac{3 \cdot 5 + 2}{5} = \frac{5}{3} : \frac{17}{5} = \frac{5}{3} \cdot \frac{5}{17} = \frac{25}{51} = \frac{25}{51}$$

## Aufgabe (4)

Hauptnenner:  $\text{kgV}(3, 5) = 15$ Erweiterungsfaktoren:  $\frac{15}{3} = 5$       $\frac{15}{5} = 3$ 

Summe

$$10\frac{2}{3} + 8\frac{2}{5} = 10 + 8 + \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 5} + \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 3} = 18 + \frac{10+6}{15} = 18 + \frac{16}{15} = 19\frac{1}{15}$$

Differenz

$$10\frac{2}{3} - 8\frac{2}{5} = 10 - 8 + \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 5} - \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 3} = 2 + \frac{10-6}{15} = 2 + \frac{4}{15} = 2\frac{4}{15}$$

Produkt

$$10\frac{2}{3} \cdot 8\frac{2}{5} = \frac{10 \cdot 3 + 2}{3} \cdot \frac{8 \cdot 5 + 2}{5} = \frac{32}{3} \cdot \frac{42}{5} = \frac{32 \cdot 42}{3 \cdot 5} = \frac{1 \cdot 34 \cdot 10^3}{15} = 89\frac{3}{5}$$

Quotient

$$10\frac{2}{3} : 8\frac{2}{5} = \frac{10 \cdot 3 + 2}{3} : \frac{8 \cdot 5 + 2}{5} = \frac{32}{3} : \frac{42}{5} = \frac{32}{3} \cdot \frac{5}{42} = \frac{160}{126} = 1\frac{17}{63}$$

## Aufgabe (5)

Hauptnenner:  $\text{kgV}(9, 5) = 45$ Erweiterungsfaktoren:  $\frac{45}{9} = 5$       $\frac{45}{5} = 9$ 

Summe

$$1\frac{7}{9} + 3\frac{2}{5} = 1 + 3 + \frac{7 \cdot 5}{9 \cdot 5} + \frac{2 \cdot 9}{5 \cdot 9} = 4 + \frac{35+18}{45} = 4 + \frac{53}{45} = 5\frac{8}{45}$$

Differenz

$$1\frac{7}{9} - 3\frac{2}{5} = 1 - 3 + \frac{7 \cdot 5}{9 \cdot 5} - \frac{2 \cdot 9}{5 \cdot 9} = -2 + \frac{35-18}{45} = -2 + \frac{17}{45} = -1\frac{28}{45}$$

Produkt

$$1\frac{7}{9} \cdot 3\frac{2}{5} = \frac{1 \cdot 9 + 7}{9} \cdot \frac{3 \cdot 5 + 2}{5} = \frac{16}{9} \cdot \frac{17}{5} = \frac{16 \cdot 17}{9 \cdot 5} = \frac{272}{45} = 6\frac{2}{45}$$

Quotient

$$1\frac{7}{9} : 3\frac{2}{5} = \frac{1 \cdot 9 + 7}{9} : \frac{3 \cdot 5 + 2}{5} = \frac{16}{9} : \frac{17}{5} = \frac{16}{9} \cdot \frac{5}{17} = \frac{80}{153} = 0,523$$

## Aufgabe (6)

Hauptnenner:  $\text{kgV}(3, 5) = 15$ Erweiterungsfaktoren:  $\frac{15}{3} = 5$       $\frac{15}{5} = 3$ 

Summe

$$1\frac{4}{3} + 3\frac{2}{5} = 1 + 3 + \frac{4 \cdot 5}{3 \cdot 5} + \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 3} = 4 + \frac{20+6}{15} = 4 + \frac{26}{15} = 5\frac{11}{15}$$

Differenz

$$1\frac{4}{3} - 3\frac{2}{5} = 1 - 3 + \frac{4 \cdot 5}{3 \cdot 5} - \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 3} = -2 + \frac{20-6}{15} = -2 + \frac{14}{15} = -1\frac{1}{15}$$

Produkt

$$1\frac{4}{3} \cdot 3\frac{2}{5} = \frac{1 \cdot 3 + 4}{3} \cdot \frac{3 \cdot 5 + 2}{5} = \frac{7}{3} \cdot \frac{17}{5} = \frac{7 \cdot 17}{3 \cdot 5} = \frac{119}{15} = 7\frac{14}{15}$$

Quotient

$$1\frac{4}{3} : 3\frac{2}{5} = \frac{1 \cdot 3 + 4}{3} : \frac{3 \cdot 5 + 2}{5} = \frac{7}{3} : \frac{17}{5} = \frac{7}{3} \cdot \frac{5}{17} = \frac{35}{51} = \frac{35}{51}$$

## Aufgabe (7)

Hauptnenner:  $\text{kgV}(8, 3) = 24$

Erweiterungsfaktoren:  $\frac{24}{8} = 3$      $\frac{24}{3} = 8$

Summe

$$15\frac{2}{8} + 3\frac{2}{3} = 15 + 3 + \frac{2 \cdot 3}{8 \cdot 3} + \frac{2 \cdot 8}{3 \cdot 8} = 18 + \frac{6+16}{24} = 18 + \frac{22}{24} = 18\frac{11}{12}$$

Differenz

$$15\frac{2}{8} - 3\frac{2}{3} = 15 - 3 + \frac{2 \cdot 3}{8 \cdot 3} - \frac{2 \cdot 8}{3 \cdot 8} = 12 + \frac{6-16}{24} = 12 + \frac{-10}{24} = 11\frac{7}{12}$$

Produkt

$$15\frac{2}{8} \cdot 3\frac{2}{3} = \frac{15 \cdot 8 + 2}{8} \cdot \frac{3 \cdot 3 + 2}{3} = \frac{122}{8} \cdot \frac{11}{3} = \frac{122 \cdot 11}{8 \cdot 3} = \frac{1 \cdot 34 \cdot 10^3}{24} = 55\frac{11}{12}$$

Quotient

$$15\frac{2}{8} : 3\frac{2}{3} = \frac{15 \cdot 8 + 2}{8} : \frac{3 \cdot 3 + 2}{3} = \frac{122}{8} : \frac{11}{3} = \frac{122}{8} \cdot \frac{3}{11} = \frac{366}{88} = 4\frac{7}{44}$$

### 3 Schriftliches Rechnen

#### Schriftliche Addition

1. Summand + 2. Summand = Summe

Zahlen stellenweise untereinander schreiben.

Komma unter Komma - Einer unter Einer usw.

1. Summand (obere Zahl)

+ 2. Summand (untere Zahl)

\_\_\_\_\_ Übertragszeile

Summe (Ergebniszeile)

Von rechts beginnend die einzelne Ziffern addieren.

Obere Ziffer + untere Ziffer oder

Obere Ziffer + untere Ziffer + Übertrag

- Ist das Ergebnis kleiner als 10, wird das Ergebnis in die Ergebniszeile geschrieben.

- Ist das Ergebnis größer als 9, wird die Einerziffern in die Ergebniszeile geschrieben. Die Zehnerziffer schreibt man in die nächste Spalte der Übertragszeile.

$$89,9 + 5,92 =$$

89,90		
+	5,92	
	—	
	2	0 + 2 = 2
		Ergebnis:2
	89,90	
+	5,92	
	1	9 + 9 = 18
	82	Ergebnis:8
		Übertrag:1
	89,90	
+	5,92	
	1 1	9 + 5 + 1 = 15
	5,82	Ergebnis:5
		Übertrag:1
	89,90	
+	5,92	
	1 1	8 + 0 + 1 = 9
	95,82	Ergebnis:9
		Übertrag:0

$$89,90 + 5,92 = 95,82$$

#### Schriftliche Subtraktion

Minuend - Subtrahend = Differenz

Zahlen stellenweise untereinander schreiben.

Komma unter Komma - Einer unter Einer usw.

Minuend (obere Zahl)

- Subtrahend (untere Zahl)

\_\_\_\_\_ Übertragszeile

Differenz (Ergebniszeile)

Von rechts beginnend die einzelne Ziffern subtrahieren.

Obere Ziffer - untere Ziffer oder

Obere Ziffer - (untere Ziffer + Übertrag)

Ist das Ergebnis größer gleich als Null, wird das Ergebnis in die Ergebniszeile geschrieben.

Ist das Ergebnis kleiner als Null, fügt man bei der oberen Ziffer eine Zehnerstelle hinzu, so dass das Ergebnis größer gleich Null wird. Die Einerziffer kommt in die Ergebniszeile. Die Zehnerziffer schreibt man in die nächste Spalte der Übertragszeile.

$$123,48 - 89,47 =$$

123,48		
-	89,47	
	—	
	1	8 - 7 = 1
		Ergebnis:1
	123,48	
-	89,47	
	—	
	01	4 - 4 = 0
		Ergebnis:0
	123,48	
-	89,47	
	1	13 - 9 = 4
	4,01	Ergebnis:4
		Übertrag:1
	123,48	
-	89,47	
	11	12 - (8 + 1) = 3
	34,01	Ergebnis:3
		Übertrag:1
	123,48	
-	89,47	
	11	1 - (0 + 1) = 0
	034,01	Ergebnis:0
		Übertrag:0

$$123,48 - 89,47 = 34,01$$

## Schriftliche Multiplikation

1. Faktor  $\cdot$  2. Faktor = Produkt  
 linke Zahl  $\cdot$  rechte Zahl = Ergebnis  
 Die einzelnen Ziffern der rechten Zahl mit der linken Zahl multiplizieren.  
 Das Ergebnis unter die Ziffer der rechten Zahl schreiben.  
 Die Ergebnisse addieren.  
 Die Nachkommastellen der beiden Faktoren addieren und beim Ergebnis das Komma setzen.

Schriftliche Multiplikation

$$34,61 \cdot 9,3 =$$

$$\underline{3461 \cdot 93}$$

$$31149$$

$$10383$$

$$\hline 321873$$

Nachkommastellen:  $2 + 1 = 3$ 

$$34,61 \cdot 9,3 = 321,873$$

## Schriftliche Division

Dividend : Divisor = Quotient  
 linke Zahl : rechte Zahl = Ergebnis  
 Enthält der Divisor (rechte Zahl) ein Komma, wird das Komma beider Zahlen um soviel Stellen nach rechts verschoben, bis der Divisor eine ganze Zahl ist.  
 Versuch die erste Ziffer (die ersten beiden Ziffer usw.) der linken Zahl durch die rechte Zahl zu teilen, bis man bei der Teilung eine ganze Zahl erhält.  
 Das Ergebnis der Teilung mit der rechten Zahl multiplizieren und von den verwendeten Ziffern subtrahieren.  
 Die nächste Ziffer der linken Zahl an das Ergebnis anfügen und wieder versuchen zu teilen.  
 Ein Komma im Ergebnis entsteht,  
 - wenn man eine Ziffer, die nach dem Komma steht anfügt.  
 - wenn die linken Ziffern einer ganzen Zahl aufgebraucht sind und man eine Null anfügt.

$$15 : 2 =$$

$$15 : 2 = 7,5$$

$$15$$

$$- \underline{14}$$

$$10$$

$$- \underline{10}$$

$$0$$

$$15,45 : 2,456 =$$

$$15450 : 2456 = 6,2$$

$$15450$$

$$- \underline{14736}$$

$$7140$$

$$- \underline{4912}$$

$$2228$$

$$6,2 \text{ Rest } 2228$$

## 3.1 Addition

### 3.1.1 Aufgaben

Um eigene Aufgaben zu lösen, klicken Sie hier: [Neue Rechnung](#)

Gegeben: 1. Summand, 2. Summand

Gesucht: Summe

(1)  $54 + 12$

(2)  $234 + 745$

(3)  $9754 + 65$

(4)  $893 + 92$

(5)  $75560 + 900$

(6)  $5765;969$

(7)  $6456 + 854450$

(8)  $6123089 + 845405$



## 3.1.2 Lösungen

Aufgabe (1)

Schriftliche Addition

$12 + 54 =$

$$\begin{array}{r}
 + \quad 12 \\
 \quad 54 \\
 \hline
 \quad \quad 6 \\
 \hline
 + \quad 12 \\
 \quad 54 \\
 \hline
 \quad \quad 66 \\
 \hline
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 2 + 4 = 6 \\
 \text{Ergebnis:}6 \\
 \text{Übertrag:}0 \\
 \\
 1 + 5 = 6 \\
 \text{Ergebnis:}6 \\
 \text{Übertrag:}0
 \end{array}$$

$12 + 54 = 66$

$$\begin{array}{r}
 + \quad 9754 \\
 \quad \quad 65 \\
 \hline
 \quad \quad \quad 9 \\
 \hline
 + \quad 9754 \\
 \quad \quad 65 \\
 \quad \quad \quad 1 \\
 \hline
 \quad \quad \quad 19 \\
 \hline
 + \quad 9754 \\
 \quad \quad 65 \\
 \quad \quad \quad 1 \\
 \hline
 \quad \quad \quad 819 \\
 \hline
 + \quad 9754 \\
 \quad \quad 65 \\
 \quad \quad \quad 1 \\
 \hline
 \quad \quad \quad 9819 \\
 \hline
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 4 + 5 = 9 \\
 \text{Ergebnis:}9 \\
 \text{Übertrag:}0 \\
 \\
 5 + 6 = 11 \\
 \text{Ergebnis:}1 \\
 \text{Übertrag:}1 \\
 \\
 7 + 0 + 1 = 8 \\
 \text{Ergebnis:}8 \\
 \text{Übertrag:}0 \\
 \\
 9 + 0 = 9 \\
 \text{Ergebnis:}9 \\
 \text{Übertrag:}0
 \end{array}$$

$9754 + 65 = 9819$

Aufgabe (2)

Schriftliche Addition

$234 + 745 =$

$$\begin{array}{r}
 + \quad 234 \\
 \quad 745 \\
 \hline
 \quad \quad 9 \\
 \hline
 + \quad 234 \\
 \quad 745 \\
 \hline
 \quad \quad 79 \\
 \hline
 + \quad 234 \\
 \quad 745 \\
 \hline
 \quad \quad 979 \\
 \hline
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 4 + 5 = 9 \\
 \text{Ergebnis:}9 \\
 \text{Übertrag:}0 \\
 \\
 3 + 4 = 7 \\
 \text{Ergebnis:}7 \\
 \text{Übertrag:}0 \\
 \\
 2 + 7 = 9 \\
 \text{Ergebnis:}9 \\
 \text{Übertrag:}0
 \end{array}$$

$234 + 745 = 979$

Aufgabe (4)

Schriftliche Addition

$893 + 92 =$

$$\begin{array}{r}
 + \quad 893 \\
 \quad \quad 92 \\
 \hline
 \quad \quad \quad 5 \\
 \hline
 + \quad 893 \\
 \quad \quad 92 \\
 \quad \quad \quad 1 \\
 \hline
 \quad \quad \quad 85 \\
 \hline
 + \quad 893 \\
 \quad \quad 92 \\
 \quad \quad \quad 1 \\
 \hline
 \quad \quad \quad 985 \\
 \hline
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 3 + 2 = 5 \\
 \text{Ergebnis:}5 \\
 \text{Übertrag:}0 \\
 \\
 9 + 9 = 18 \\
 \text{Ergebnis:}8 \\
 \text{Übertrag:}1 \\
 \\
 8 + 0 + 1 = 9 \\
 \text{Ergebnis:}9 \\
 \text{Übertrag:}0
 \end{array}$$

$893 + 92 = 985$

Aufgabe (3)

Schriftliche Addition

$9754 + 65 =$

Aufgabe (5)

Schriftliche Addition

$75560 + 900 =$

$$\begin{array}{r}
 + \quad 75560 \\
 \quad 900 \\
 \hline
 \quad 0 \\
 \hline
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 0 + 0 = 0 \\
 \text{Ergebnis:}0 \\
 \text{Übertrag:}0
 \end{array}$$


---


$$\begin{array}{r}
 + \quad 75560 \\
 \quad 900 \\
 \hline
 \quad 60 \\
 \hline
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 6 + 0 = 6 \\
 \text{Ergebnis:}6 \\
 \text{Übertrag:}0
 \end{array}$$


---


$$\begin{array}{r}
 + \quad 75560 \\
 \quad 900 \\
 \hline
 \quad 1 \\
 \hline
 \quad 460 \\
 \hline
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 5 + 9 = 14 \\
 \text{Ergebnis:}4 \\
 \text{Übertrag:}1
 \end{array}$$


---


$$\begin{array}{r}
 + \quad 75560 \\
 \quad 900 \\
 \hline
 \quad 1 \\
 \hline
 \quad 6460 \\
 \hline
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 5 + 0 + 1 = 6 \\
 \text{Ergebnis:}6 \\
 \text{Übertrag:}0
 \end{array}$$


---


$$\begin{array}{r}
 + \quad 75560 \\
 \quad 900 \\
 \hline
 \quad 1 \\
 \hline
 \quad 76460 \\
 \hline
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 7 + 0 = 7 \\
 \text{Ergebnis:}7 \\
 \text{Übertrag:}0
 \end{array}$$

$$75560 + 900 = 76460$$

$$\begin{array}{r}
 + \quad 6456 \\
 854450 \\
 \hline
 \quad 6 \\
 \hline
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 6 + 0 = 6 \\
 \text{Ergebnis:}6 \\
 \text{Übertrag:}0
 \end{array}$$


---


$$\begin{array}{r}
 + \quad 6456 \\
 854450 \\
 \hline
 \quad 1 \\
 \hline
 \quad 06 \\
 \hline
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 5 + 5 = 10 \\
 \text{Ergebnis:}0 \\
 \text{Übertrag:}1
 \end{array}$$


---


$$\begin{array}{r}
 + \quad 6456 \\
 854450 \\
 \hline
 \quad 1 \\
 \hline
 \quad 906 \\
 \hline
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 4 + 4 + 1 = 9 \\
 \text{Ergebnis:}9 \\
 \text{Übertrag:}0
 \end{array}$$


---


$$\begin{array}{r}
 + \quad 6456 \\
 854450 \\
 \hline
 \quad 1 \quad 1 \\
 \hline
 \quad 0906 \\
 \hline
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 6 + 4 = 10 \\
 \text{Ergebnis:}0 \\
 \text{Übertrag:}1
 \end{array}$$


---


$$\begin{array}{r}
 + \quad 6456 \\
 854450 \\
 \hline
 \quad 1 \quad 1 \\
 \hline
 \quad 60906 \\
 \hline
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 0 + 5 + 1 = 6 \\
 \text{Ergebnis:}6 \\
 \text{Übertrag:}0
 \end{array}$$


---


$$\begin{array}{r}
 + \quad 6456 \\
 854450 \\
 \hline
 \quad 1 \quad 1 \\
 \hline
 \quad 860906 \\
 \hline
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 0 + 8 = 8 \\
 \text{Ergebnis:}8 \\
 \text{Übertrag:}0
 \end{array}$$

$$6456 + 854450 = 860906$$

Aufgabe (6)

Schriftliche Addition

$$5765 + 969 =$$

$$\begin{array}{r}
 + \quad 5765 \\
 \quad 969 \\
 \hline
 \quad 1 \\
 \hline
 \quad 4 \\
 \hline
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 5 + 9 = 14 \\
 \text{Ergebnis:}4 \\
 \text{Übertrag:}1
 \end{array}$$


---


$$\begin{array}{r}
 + \quad 5765 \\
 \quad 969 \\
 \hline
 \quad 11 \\
 \hline
 \quad 34 \\
 \hline
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 6 + 6 + 1 = 13 \\
 \text{Ergebnis:}3 \\
 \text{Übertrag:}1
 \end{array}$$


---


$$\begin{array}{r}
 + \quad 5765 \\
 \quad 969 \\
 \hline
 \quad 111 \\
 \hline
 \quad 734 \\
 \hline
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 7 + 9 + 1 = 17 \\
 \text{Ergebnis:}7 \\
 \text{Übertrag:}1
 \end{array}$$


---


$$\begin{array}{r}
 + \quad 5765 \\
 \quad 969 \\
 \hline
 \quad 111 \\
 \hline
 \quad 6734 \\
 \hline
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 5 + 0 + 1 = 6 \\
 \text{Ergebnis:}6 \\
 \text{Übertrag:}0
 \end{array}$$

$$5765 + 969 = 6734$$

Aufgabe (8)

Aufgabe (7)

Schriftliche Addition

$$6456 + 854450 =$$

Schriftliche Addition

$$6123089 + 845405 =$$

	6123089		
+	845405		$9 + 5 = 14$
	<u>  1</u>		Ergebnis:4
	4		Übertrag:1
<hr/>			
	6123089		
+	845405		$8 + 0 + 1 = 9$
	<u>  1</u>		Ergebnis:9
	94		Übertrag:0
<hr/>			
	6123089		
+	845405		$0 + 4 = 4$
	<u>  1</u>		Ergebnis:4
	494		Übertrag:0
<hr/>			
	6123089		
+	845405		$3 + 5 = 8$
	<u>  1</u>		Ergebnis:8
	8494		Übertrag:0
<hr/>			
	6123089		
+	845405		$2 + 4 = 6$
	<u>  1</u>		Ergebnis:6
	68494		Übertrag:0
<hr/>			
	6123089		
+	845405		$1 + 8 = 9$
	<u>  1</u>		Ergebnis:9
	968494		Übertrag:0
<hr/>			
	6123089		
+	845405		$6 + 0 = 6$
	<u>  1</u>		Ergebnis:6
	6968494		Übertrag:0
<hr/>			

$$6123089 + 845405 = 6968494$$

## 3.2 Subtraktion

### 3.2.1 Aufgaben

Um eigene Aufgaben zu lösen, klicken Sie hier: [Neue Rechnung](#)

Gegeben: Minuend, Subtrahend

Gesucht: Differenz

(1)

(2)

(3)

## 3.2.2 Lösungen

Aufgabe (1)

$$4564 - 4345 = 219$$

Schriftliche Subtraktion

$$12 - 7 =$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ - 7 \\ \hline 1 \\ \frac{1}{5} \end{array} \quad \begin{array}{l} 12 - 7 = 5 \\ \text{Ergebnis:} 5 \\ \text{Übertrag:} 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ - 7 \\ \hline 1 \\ \frac{1}{05} \end{array} \quad \begin{array}{l} 1 - (0 + 1) = 0 \\ \text{Ergebnis:} 0 \\ \text{Übertrag:} 0 \end{array}$$

$$12 - 7 = 5$$

Aufgabe (2)

Schriftliche Subtraktion

$$4564 - 4345 =$$

$$\begin{array}{r} 4564 \\ - 4345 \\ \hline 1 \\ \frac{1}{9} \end{array} \quad \begin{array}{l} 14 - 5 = 9 \\ \text{Ergebnis:} 9 \\ \text{Übertrag:} 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4564 \\ - 4345 \\ \hline 1 \\ \frac{1}{19} \end{array} \quad \begin{array}{l} 6 - (4 + 1) = 1 \\ \text{Ergebnis:} 1 \\ \text{Übertrag:} 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4564 \\ - 4345 \\ \hline 1 \\ \frac{1}{219} \end{array} \quad \begin{array}{l} 5 - 3 = 2 \\ \text{Ergebnis:} 2 \\ \text{Übertrag:} 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4564 \\ - 4345 \\ \hline 1 \\ \frac{1}{0219} \end{array} \quad \begin{array}{l} 4 - 4 = 0 \\ \text{Ergebnis:} 0 \\ \text{Übertrag:} 0 \end{array}$$

Aufgabe (3)

Schriftliche Subtraktion

$$456 - 99 =$$

$$\begin{array}{r} 456 \\ - 99 \\ \hline 1 \\ \frac{1}{7} \end{array} \quad \begin{array}{l} 16 - 9 = 7 \\ \text{Ergebnis:} 7 \\ \text{Übertrag:} 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 456 \\ - 99 \\ \hline 11 \\ \frac{11}{57} \end{array} \quad \begin{array}{l} 15 - (9 + 1) = 5 \\ \text{Ergebnis:} 5 \\ \text{Übertrag:} 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 456 \\ - 99 \\ \hline 11 \\ \frac{11}{357} \end{array} \quad \begin{array}{l} 4 - (0 + 1) = 3 \\ \text{Ergebnis:} 3 \\ \text{Übertrag:} 0 \end{array}$$

$$456 - 99 = 357$$

## 3.3 Multiplikation

### 3.3.1 Aufgaben

Um eigene Aufgaben zu lösen, klicken Sie hier: [Neue Rechnung](#)

Gegeben: 1. Faktor, 2. Faktor

Gesucht: Produkt

(1)

(2)

(3)

### 3.3.2 Lösungen

Aufgabe (1)

Schriftliche Multiplikation

$$\begin{array}{r} 12 \cdot 7 = \\ \underline{12 \cdot 7} \\ 84 \\ \hline 84 \end{array}$$

Nachkommastellen:  $0 + 0 = 0$

$$12 \cdot 7 = 84$$

Aufgabe (2)

Schriftliche Multiplikation

$$\begin{array}{r} 4345 \cdot 4564 = \\ \underline{4345 \cdot 4564} \\ 17380 \\ 21725 \\ 26070 \\ 17380 \\ \hline 19830580 \end{array}$$

Nachkommastellen:  $0 + 0 = 0$

$$4345 \cdot 4564 = 19830580$$

Aufgabe (3)

Schriftliche Multiplikation

$$\begin{array}{r} 456 \cdot 99 = \\ \underline{456 \cdot 99} \\ 4104 \\ 4104 \end{array}$$

$$\hline 45144$$

Nachkommastellen:  $0 + 0 = 0$

$$456 \cdot 99 = 45144$$

## 3.4 Division

### 3.4.1 Aufgaben

Um eigene Aufgaben zu lösen, klicken Sie hier: [Neue Rechnung](#)

Gegeben: Dividend, Divisor

Gesucht: Quotient

(1)

(2)

(3)



### 3.4.2 Lösungen

Aufgabe (1)

Schriftliche Division

$$12 : 7 =$$

$$12 : 7 = 1,71$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ - \quad 7 \\ \hline 50 \\ - \quad 49 \\ \hline 10 \\ - \quad \quad 7 \\ \hline 3 \end{array}$$

$$1,71 \text{ Rest } 3$$

Aufgabe (2)

Schriftliche Division

$$4345 : 4564 =$$

$$4345 : 4564 = 0,95$$

$$\begin{array}{r} 43450 \\ - \quad 41076 \\ \hline 23740 \\ - \quad 22820 \\ \hline 920 \end{array}$$

$$0,95 \text{ Rest } 920$$

Aufgabe (3)

Schriftliche Division

$$456 : 99 =$$

$$456 : 99 = 4,60$$

$$\begin{array}{r} 456 \\ - \quad 396 \\ \hline 600 \\ - \quad 594 \\ \hline 60 \end{array}$$

$$4,60 \text{ Rest } 60$$

# 4 Prozentrechnung

## Prozentrechnung

- Verhältnisgleichung:  $\frac{P_w}{p} = \frac{G}{100}$
- $P_w = \frac{p \cdot G}{100}$       $P_w = p\% \cdot G$
- $G = \frac{P_w \cdot 100}{p}$       $G = \frac{P_w}{p\%}$
- $p = \frac{P_w \cdot 100}{G}$       $p\% = \frac{P_w}{G}$

G - Grundwert  
 p - Prozentzahl  
 p% - Prozentsatz  
 P<sub>w</sub> - Prozentwert

Wie viel sind 25% von 800 €?

$$P_w = \frac{25 \cdot 800 \text{ €}}{100} = 200 \text{ €}$$

$$p\% = 25\% = \frac{25}{100} = 0,25$$

$$P_w = 0,25 \cdot 800 \text{ €} = 200 \text{ €}$$

25% sind 200 €. Grundwert?

$$G = \frac{200 \cdot 100}{25} = 800 \text{ €} \quad G = \frac{200}{0,25} = 800 \text{ €}$$

Wie viel Prozent sind 200 € von 800 €?

$$p = \frac{200 \cdot 100}{800} = 25 \quad p\% = 25\%$$

$$p\% = \frac{200}{800} = 0,25 = \frac{25}{100} = 25\%$$

### 4.1 $P_w = \frac{p \cdot G}{100}$

#### 4.1.1 Aufgaben

Um eigene Aufgaben zu lösen, klicken Sie hier: [Neue Rechnung](#)

Gegeben:

Grundwert     G  
 Prozentsatz     p     [%]

Gesucht:

Prozentwert     P<sub>w</sub>

(1)  $G = 100$       $p = 5\%$

(2)  $G = 90$       $p = 3\%$

(3)  $G = 100$       $p = 60\%$

(4)  $G = 200$       $p = 1\%$

(5)  $G = 136$       $p = \frac{1}{4}\%$

(6)  $G = 1,48 \cdot 10^3$       $p = 2\frac{1}{2}\%$

(7)  $G = 600$       $p = 4\%$

(8)  $G = 3$       $p = 5\%$

(9)  $G = 300$       $p = 4\%$

(10)  $G = 240$       $p = 3\%$

(11)  $G = 652$       $p = 3\%$

(12)  $G = 4$       $p = 5\%$

## 4.1.2 Lösungen

Aufgabe (1)

$$P_w = \frac{p \cdot G}{100}$$

$$G = 100$$

$$p = 5\%$$

$$P_w = \frac{5 \cdot 100}{100}$$

$$P_w = 5$$

oder

$$P_w = p\% \cdot G$$

$$p\% = \frac{5}{100} = \frac{1}{20}$$

$$P_w = \frac{1}{20} \cdot 100$$

$$P_w = 5$$

$$G = 200$$

$$p = 1\%$$

$$P_w = \frac{1 \cdot 200}{100}$$

$$P_w = 2$$

oder

$$P_w = p\% \cdot G$$

$$p\% = \frac{1}{100} = 0,01$$

$$P_w = 0,01 \cdot 200$$

$$P_w = 2$$

Aufgabe (5)

Aufgabe (2)

$$P_w = \frac{p \cdot G}{100}$$

$$G = 90$$

$$p = 3\%$$

$$P_w = \frac{3 \cdot 90}{100}$$

$$P_w = 2\frac{7}{10}$$

oder

$$P_w = p\% \cdot G$$

$$p\% = \frac{3}{100} = 0,03$$

$$P_w = 0,03 \cdot 90$$

$$P_w = 2\frac{7}{10}$$

$$P_w = \frac{p \cdot G}{100}$$

$$G = 136$$

$$p = \frac{1}{4}\%$$

$$P_w = \frac{\frac{1}{4} \cdot 136}{100}$$

$$P_w = \frac{17}{50}$$

oder

$$P_w = p\% \cdot G$$

$$p\% = \frac{\frac{1}{4}}{100} = 0,0025$$

$$P_w = 0,0025 \cdot 136$$

$$P_w = \frac{17}{50}$$

Aufgabe (6)

Aufgabe (3)

$$P_w = \frac{p \cdot G}{100}$$

$$G = 100$$

$$p = 60\%$$

$$P_w = \frac{60 \cdot 100}{100}$$

$$P_w = 60$$

oder

$$P_w = p\% \cdot G$$

$$p\% = \frac{60}{100} = \frac{3}{5}$$

$$P_w = \frac{3}{5} \cdot 100$$

$$P_w = 60$$

$$P_w = \frac{p \cdot G}{100}$$

$$G = 1,48 \cdot 10^3$$

$$p = 2\frac{1}{2}\%$$

$$P_w = \frac{2\frac{1}{2} \cdot 1,48 \cdot 10^3}{100}$$

$$P_w = 37$$

oder

$$P_w = p\% \cdot G$$

$$p\% = \frac{2\frac{1}{2}}{100} = \frac{1}{40}$$

$$P_w = \frac{1}{40} \cdot 1,48 \cdot 10^3$$

$$P_w = 37$$

Aufgabe (7)

Aufgabe (4)

$$P_w = \frac{p \cdot G}{100}$$

$$P_w = \frac{p \cdot G}{100}$$

$$G = 600$$

$$p = 4\%$$

$$P_w = \frac{4 \cdot 600}{100}$$

$$P_w = 24$$

oder

$$P_w = p\% \cdot G$$

$$p\% = \frac{4}{100} = \frac{1}{25}$$

$$P_w = \frac{1}{25} \cdot 600$$

$$P_w = 24$$

Aufgabe (8)

$$G = 240$$

$$p = 3\%$$

$$P_w = \frac{3 \cdot 240}{100}$$

$$P_w = 7\frac{1}{5}$$

oder

$$P_w = p\% \cdot G$$

$$p\% = \frac{3}{100} = 0,03$$

$$P_w = 0,03 \cdot 240$$

$$P_w = 7\frac{1}{5}$$

$$P_w = \frac{p \cdot G}{100}$$

$$G = 3$$

$$p = 5\%$$

$$P_w = \frac{5 \cdot 3}{100}$$

$$P_w = \frac{3}{20}$$

oder

$$P_w = p\% \cdot G$$

$$p\% = \frac{5}{100} = \frac{1}{20}$$

$$P_w = \frac{1}{20} \cdot 3$$

$$P_w = \frac{3}{20}$$

Aufgabe (9)

$$P_w = \frac{p \cdot G}{100}$$

$$G = 652$$

$$p = 3\%$$

$$P_w = \frac{3 \cdot 652}{100}$$

$$P_w = 19\frac{14}{25}$$

oder

$$P_w = p\% \cdot G$$

$$p\% = \frac{3}{100} = 0,03$$

$$P_w = 0,03 \cdot 652$$

$$P_w = 19\frac{14}{25}$$

Aufgabe (11)

$$P_w = \frac{p \cdot G}{100}$$

$$G = 300$$

$$p = 4\%$$

$$P_w = \frac{4 \cdot 300}{100}$$

$$P_w = 12$$

oder

$$P_w = p\% \cdot G$$

$$p\% = \frac{4}{100} = \frac{1}{25}$$

$$P_w = \frac{1}{25} \cdot 300$$

$$P_w = 12$$

Aufgabe (10)

$$P_w = \frac{p \cdot G}{100}$$

$$G = 4$$

$$p = 5\%$$

$$P_w = \frac{5 \cdot 4}{100}$$

$$P_w = \frac{1}{5}$$

oder

$$P_w = p\% \cdot G$$

$$p\% = \frac{5}{100} = \frac{1}{20}$$

$$P_w = \frac{1}{20} \cdot 4$$

$$P_w = \frac{1}{5}$$

Aufgabe (12)

$$P_w = \frac{p \cdot G}{100}$$

$$4.2 \quad G = \frac{P_w \cdot 100}{p}$$

### 4.2.1 Aufgaben

Um eigene Aufgaben zu lösen, klicken Sie hier: [Neue Rechnung](#)

Gegeben:

Prozentwert  $P_w$   
Prozentsatz  $p$  [%]

Gesucht:

Grundwert  $G$

- |     |                       |                      |      |                       |            |
|-----|-----------------------|----------------------|------|-----------------------|------------|
| (1) | $P_w = 50$            | $p = 10\%$           | (10) | $P_w = 12\frac{2}{5}$ | $p = 4\%$  |
| (2) | $P_w = 10$            | $p = 5\%$            | (11) | $P_w = 9\frac{1}{2}$  | $p = 5\%$  |
| (3) | $P_w = 30$            | $p = 50\%$           | (12) | $P_w = 30$            | $p = 5\%$  |
| (4) | $P_w = 100$           | $p = 20\%$           | (13) | $P_w = 20$            | $p = 11\%$ |
| (5) | $P_w = 83\frac{1}{2}$ | $p = 25\%$           | (14) | $P_w = 4$             | $p = 6\%$  |
| (6) | $P_w = 35$            | $p = \frac{8}{15}\%$ | (15) | $P_w = 3$             | $p = 4\%$  |
| (7) | $P_w = 42$            | $p = 1\frac{1}{6}\%$ | (16) | $P_w = 4$             | $p = 50\%$ |
| (8) | $P_w = 2\frac{3}{20}$ | $p = 6\frac{1}{3}\%$ | (17) | $P_w = 10$            | $p = 3\%$  |
| (9) | $P_w = 28$            | $p = 4\%$            |      |                       |            |

## 4.2.2 Lösungen

Aufgabe (1)

$$G = \frac{P_w \cdot 100}{p}$$

$$P_w = 50$$

$$p = 10\%$$

$$G = \frac{50 \cdot 100}{10}$$

$$G = 500$$

oder

$$G = \frac{P_w}{p\%}$$

$$p\% = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}$$

$$G = \frac{50}{\frac{1}{10}}$$

$$G = 500$$

Aufgabe (4)

$$G = \frac{P_w \cdot 100}{p}$$

$$P_w = 100$$

$$p = 20\%$$

$$G = \frac{100 \cdot 100}{20}$$

$$G = 500$$

oder

$$G = \frac{P_w}{p\%}$$

$$p\% = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$$

$$G = \frac{100}{\frac{1}{5}}$$

$$G = 500$$

Aufgabe (2)

$$G = \frac{P_w \cdot 100}{p}$$

$$P_w = 10$$

$$p = 5\%$$

$$G = \frac{10 \cdot 100}{5}$$

$$G = 200$$

oder

$$G = \frac{P_w}{p\%}$$

$$p\% = \frac{5}{100} = \frac{1}{20}$$

$$G = \frac{10}{\frac{1}{20}}$$

$$G = 200$$

Aufgabe (5)

$$G = \frac{P_w \cdot 100}{p}$$

$$P_w = 83\frac{1}{2}$$

$$p = 25\%$$

$$G = \frac{83\frac{1}{2} \cdot 100}{25}$$

$$G = 334$$

oder

$$G = \frac{P_w}{p\%}$$

$$p\% = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$$

$$G = \frac{83\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}}$$

$$G = 334$$

Aufgabe (3)

$$G = \frac{P_w \cdot 100}{p}$$

$$P_w = 30$$

$$p = 50\%$$

$$G = \frac{30 \cdot 100}{50}$$

$$G = 60$$

oder

$$G = \frac{P_w}{p\%}$$

$$p\% = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}$$

$$G = \frac{30}{\frac{1}{2}}$$

$$G = 60$$

Aufgabe (6)

$$G = \frac{P_w \cdot 100}{p}$$

$$P_w = 35$$

$$p = \frac{8}{15}\%$$

$$G = \frac{35 \cdot 100}{\frac{8}{15}}$$

$$G = 6562\frac{1}{2}$$

oder

$$G = \frac{P_w}{p\%}$$

$$p\% = \frac{\frac{8}{100}}{35} = 0,00533$$

$$G = \frac{28 \cdot 100}{0,00533}$$

$$G = 6562\frac{1}{2}$$

$$G = \frac{28 \cdot 100}{\frac{1}{25}}$$

$$G = 700$$

oder

$$G = \frac{P_w}{p\%}$$

$$p\% = \frac{4}{100} = \frac{1}{25}$$

$$G = \frac{28}{\frac{1}{25}}$$

$$G = 700$$

Aufgabe (7)

$$G = \frac{P_w \cdot 100}{p}$$

$$P_w = 42$$

$$p = 1\frac{1}{6}\%$$

$$G = \frac{42 \cdot 100}{1\frac{1}{6}}$$

$$G = 3,6 \cdot 10^3$$

oder

$$G = \frac{P_w}{p\%}$$

$$p\% = \frac{\frac{1}{6}}{100} = 0,0117$$

$$G = \frac{42}{0,0117}$$

$$G = 3,6 \cdot 10^3$$

Aufgabe (10)

$$G = \frac{P_w \cdot 100}{p}$$

$$P_w = 12\frac{2}{5}$$

$$p = 4\%$$

$$G = \frac{12\frac{2}{5} \cdot 100}{4}$$

$$G = 310$$

oder

$$G = \frac{P_w}{p\%}$$

$$p\% = \frac{4}{100} = \frac{1}{25}$$

$$G = \frac{12\frac{2}{5}}{\frac{1}{25}}$$

$$G = 310$$

Aufgabe (8)

$$G = \frac{P_w \cdot 100}{p}$$

$$P_w = 2\frac{3}{20}$$

$$p = 6\frac{1}{3}\%$$

$$G = \frac{2\frac{3}{20} \cdot 100}{6\frac{1}{3}}$$

$$G = 33\frac{18}{19}$$

oder

$$G = \frac{P_w}{p\%}$$

$$p\% = \frac{6\frac{1}{3}}{100} = 0,0633$$

$$G = \frac{2\frac{3}{20}}{0,0633}$$

$$G = 33\frac{18}{19}$$

Aufgabe (11)

$$G = \frac{P_w \cdot 100}{p}$$

$$P_w = 9\frac{1}{2}$$

$$p = 5\%$$

$$G = \frac{9\frac{1}{2} \cdot 100}{5}$$

$$G = 190$$

oder

$$G = \frac{P_w}{p\%}$$

$$p\% = \frac{5}{100} = \frac{1}{20}$$

$$G = \frac{9\frac{1}{2}}{\frac{1}{20}}$$

$$G = 190$$

Aufgabe (9)

$$G = \frac{P_w \cdot 100}{p}$$

$$P_w = 28$$

$$p = 4\%$$

Aufgabe (12)

$$G = \frac{P_w \cdot 100}{p}$$

$$P_w = 30$$

$$p = 5\%$$

$$G = \frac{30 \cdot 100}{5}$$

$$G = 600$$

oder

$$G = \frac{P_w}{p\%}$$

$$p\% = \frac{5}{100} = \frac{1}{20}$$

$$G = \frac{30}{\frac{1}{20}}$$

$$G = 600$$

Aufgabe (13)

$$G = \frac{P_w \cdot 100}{p}$$

$$P_w = 3$$

$$p = 4\%$$

$$G = \frac{3 \cdot 100}{4}$$

$$G = 75$$

oder

$$G = \frac{P_w}{p\%}$$

$$p\% = \frac{4}{100} = \frac{1}{25}$$

$$G = \frac{3}{\frac{1}{25}}$$

$$G = 75$$

Aufgabe (16)

$$G = \frac{P_w \cdot 100}{p}$$

$$P_w = 20$$

$$p = 11\%$$

$$G = \frac{20 \cdot 100}{11}$$

$$G = 181 \frac{9}{11}$$

oder

$$G = \frac{P_w}{p\%}$$

$$p\% = \frac{11}{100} = 0,11$$

$$G = \frac{20}{0,11}$$

$$G = 181 \frac{9}{11}$$

Aufgabe (14)

$$G = \frac{P_w \cdot 100}{p}$$

$$P_w = 4$$

$$p = 50\%$$

$$G = \frac{4 \cdot 100}{50}$$

$$G = 8$$

oder

$$G = \frac{P_w}{p\%}$$

$$p\% = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}$$

$$G = \frac{4}{\frac{1}{2}}$$

$$G = 8$$

Aufgabe (17)

$$G = \frac{P_w \cdot 100}{p}$$

$$P_w = 4$$

$$p = 6\%$$

$$G = \frac{4 \cdot 100}{6}$$

$$G = 66 \frac{2}{3}$$

oder

$$G = \frac{P_w}{p\%}$$

$$p\% = \frac{6}{100} = \frac{3}{50}$$

$$G = \frac{4}{\frac{3}{50}}$$

$$G = 66 \frac{2}{3}$$

Aufgabe (15)

$$G = \frac{P_w \cdot 100}{p}$$

$$P_w = 10$$

$$p = 3\%$$

$$G = \frac{10 \cdot 100}{3}$$

$$G = 333 \frac{1}{3}$$

oder

$$G = \frac{P_w}{p\%}$$

$$p\% = \frac{3}{100} = 0,03$$

$$G = \frac{10}{0,03}$$

$$G = 333 \frac{1}{3}$$



**4.3**  $p = \frac{P_w \cdot 100}{G}$

**4.3.1 Aufgaben**

Um eigene Aufgaben zu lösen, klicken Sie hier: [Neue Rechnung](#)

Gegeben:

Prozentwert  $P_w$

Grundwert  $G$

Gesucht:

Prozentsatz  $p$  [%]

(1)  $P_w = 9$      $G = 180$

(2)  $P_w = 4$      $G = 80$

(3)  $P_w = 3$      $G = 12$

(4)  $P_w = 2$      $G = 500$

(5)  $P_w = 9$      $G = 990$

(6)  $P_w = 12$      $G = 120$

## 4.3.2 Lösungen

Aufgabe (1)

$$\begin{aligned}
 P_w &= 9 \\
 G &= 180 \\
 p &= \frac{P_w \cdot 100}{G} \\
 p &= \frac{9 \cdot 100}{180} \\
 p &= 5 \\
 p\% &= 5\% \\
 \text{oder} \\
 p\% &= \frac{P_w}{G} \\
 p\% &= \frac{9}{180} = \frac{1}{20} \\
 p\% &= \frac{1}{20} \cdot 100\% = 5\%
 \end{aligned}$$

Aufgabe (4)

$$\begin{aligned}
 P_w &= 2 \\
 G &= 500 \\
 p &= \frac{P_w \cdot 100}{G} \\
 p &= \frac{2 \cdot 100}{500} \\
 p &= \frac{2}{5} \\
 p\% &= \frac{2}{5}\% \\
 \text{oder} \\
 p\% &= \frac{P_w}{G} \\
 p\% &= \frac{2}{500} = 0,004 \\
 p\% &= 0,004 \cdot 100\% = \frac{2}{5}\%
 \end{aligned}$$

Aufgabe (2)

$$\begin{aligned}
 P_w &= 4 \\
 G &= 80 \\
 p &= \frac{P_w \cdot 100}{G} \\
 p &= \frac{4 \cdot 100}{80} \\
 p &= 5 \\
 p\% &= 5\% \\
 \text{oder} \\
 p\% &= \frac{P_w}{G} \\
 p\% &= \frac{4}{80} = \frac{1}{20} \\
 p\% &= \frac{1}{20} \cdot 100\% = 5\%
 \end{aligned}$$

Aufgabe (5)

$$\begin{aligned}
 P_w &= 9 \\
 G &= 990 \\
 p &= \frac{P_w \cdot 100}{G} \\
 p &= \frac{9 \cdot 100}{990} \\
 p &= \frac{10}{11} \\
 p\% &= \frac{10}{11}\% \\
 \text{oder} \\
 p\% &= \frac{P_w}{G} \\
 p\% &= \frac{9}{990} = 0,00909 \\
 p\% &= 0,00909 \cdot 100\% = \frac{10}{11}\%
 \end{aligned}$$

Aufgabe (3)

$$\begin{aligned}
 P_w &= 3 \\
 G &= 12 \\
 p &= \frac{P_w \cdot 100}{G} \\
 p &= \frac{3 \cdot 100}{12} \\
 p &= 25 \\
 p\% &= 25\% \\
 \text{oder} \\
 p\% &= \frac{P_w}{G} \\
 p\% &= \frac{3}{12} = \frac{1}{4} \\
 p\% &= \frac{1}{4} \cdot 100\% = 25\%
 \end{aligned}$$

Aufgabe (6)

$$\begin{aligned}
 P_w &= 12 \\
 G &= 120 \\
 p &= \frac{P_w \cdot 100}{G} \\
 p &= \frac{12 \cdot 100}{120} \\
 p &= 10 \\
 p\% &= 10\% \\
 \text{oder} \\
 p\% &= \frac{P_w}{G} \\
 p\% &= \frac{12}{120} = \frac{1}{10} \\
 p\% &= \frac{1}{10} \cdot 100\% = 10\%
 \end{aligned}$$

## 5 Promillerechnung

### Promillerechnung

- Verhältnisgleichung:  $\frac{P_w}{p} = \frac{G}{1000}$

- $P_w = \frac{p \cdot G}{1000}$       $P_w = p\% \cdot G$

- $G = \frac{P_w \cdot 1000}{p}$       $G = \frac{P_w}{p\%}$

- $p = \frac{P_w \cdot 1000}{G}$       $p\% = \frac{P_w}{G}$

G - Grundwert

p - Promillezahl

p% - Promillesatz

$P_w$  - Promillewert

Wie viel sind 25‰ von 800 €?

$$P_w = \frac{25 \cdot 800 \text{ €}}{1000} = 20 \text{ €}$$

$$p\% = \frac{25}{1000} = 0,025$$

$$P_w = 0,025 \cdot 800 \text{ €} = 20 \text{ €}$$

25‰ sind 20 €. Grundwert?

$$G = \frac{20 \cdot 1000}{25} = 800 \text{ €} \quad G = \frac{200}{0,025} = 800 \text{ €}$$

Wie viel Promille sind 20 € von 800 €?

$$p = \frac{20 \cdot 1000}{800} = 25 \quad p\% = 25\%$$

$$p\% = \frac{20}{800} = 0,025 = \frac{25}{1000} = 25\%$$

### 5.1 $P_w = \frac{p \cdot G}{1000}$

#### 5.1.1 Aufgaben

Um eigene Aufgaben zu lösen, klicken Sie hier: [Neue Rechnung](#)

Gegeben:

Grundwert     G

Promille     p

Gesucht:

Promillewert      $P_w$

(1)  $G = 100$       $p = 5$

(2)  $G = 90$       $p = 3$

(3)  $G = 100$       $p = 60$

(4)  $G = 2 \cdot 10^3$       $p = 1$

(5)  $G = 136$       $p = \frac{1}{4}$

(6)  $G = 1,48 \cdot 10^3$       $p = 2\frac{1}{2}$

(7)  $G = 600$       $p = 4$

(8)  $G = 3$       $p = 5$

(9)  $G = 300$       $p = 4$

(10)  $G = 240$       $p = 3$

(11)  $G = 652$       $p = 3$

(12)  $G = 680$       $p = 7$

## 5.1.2 Lösungen

Aufgabe (1)

$$P_w = \frac{p \cdot G}{1000}$$

$$G = 100$$

$$p = 5$$

$$P_w = \frac{5 \cdot 100}{1000}$$

$$P_w = \frac{1}{2}$$

oder

$$P_w = p\%_0 \cdot G$$

$$p\%_0 = \frac{5}{1000} = 0,005$$

$$P_w = 0,005 \cdot 100$$

$$P_w = \frac{1}{2}$$

$$P_w = 2$$

oder

$$P_w = p\%_0 \cdot G$$

$$p\%_0 = \frac{1}{1000} = 0,001$$

$$P_w = 0,001 \cdot 2 \cdot 10^3$$

$$P_w = 2$$

Aufgabe (5)

Aufgabe (2)

$$P_w = \frac{p \cdot G}{1000}$$

$$G = 90$$

$$p = 3$$

$$P_w = \frac{3 \cdot 90}{1000}$$

$$P_w = 0,27$$

oder

$$P_w = p\%_0 \cdot G$$

$$p\%_0 = \frac{3}{1000} = 0,003$$

$$P_w = 0,003 \cdot 90$$

$$P_w = 0,27$$

$$P_w = \frac{p \cdot G}{1000}$$

$$G = 136$$

$$p = \frac{1}{4}$$

$$P_w = \frac{\frac{1}{4} \cdot 136}{1000}$$

$$P_w = 0,034$$

oder

$$P_w = p\%_0 \cdot G$$

$$p\%_0 = \frac{\frac{1}{4}}{1000} = 0,00025$$

$$P_w = 0,00025 \cdot 136$$

$$P_w = 0,034$$

Aufgabe (6)

Aufgabe (3)

$$P_w = \frac{p \cdot G}{1000}$$

$$G = 100$$

$$p = 60$$

$$P_w = \frac{60 \cdot 100}{1000}$$

$$P_w = 6$$

oder

$$P_w = p\%_0 \cdot G$$

$$p\%_0 = \frac{60}{1000} = \frac{3}{50}$$

$$P_w = \frac{3}{50} \cdot 100$$

$$P_w = 6$$

$$P_w = \frac{p \cdot G}{1000}$$

$$G = 1,48 \cdot 10^3$$

$$p = 2\frac{1}{2}$$

$$P_w = \frac{2\frac{1}{2} \cdot 1,48 \cdot 10^3}{1000}$$

$$P_w = 3\frac{7}{10}$$

oder

$$P_w = p\%_0 \cdot G$$

$$p\%_0 = \frac{2\frac{1}{2}}{1000} = 0,0025$$

$$P_w = 0,0025 \cdot 1,48 \cdot 10^3$$

$$P_w = 3\frac{7}{10}$$

Aufgabe (7)

Aufgabe (4)

$$P_w = \frac{p \cdot G}{1000}$$

$$G = 2 \cdot 10^3$$

$$p = 1$$

$$P_w = \frac{1 \cdot 2 \cdot 10^3}{1000}$$

$$P_w = \frac{p \cdot G}{1000}$$

$$G = 600$$

$$p = 4$$

$$P_w = \frac{4 \cdot 600}{1000}$$

$$P_w = 2\frac{2}{5}$$

oder

$$P_w = p\%_0 \cdot G$$

$$p\%_0 = \frac{4}{1000} = 0,004$$

$$P_w = 0,004 \cdot 600$$

$$P_w = 2\frac{2}{5}$$

Aufgabe (8)

$$P_w = \frac{p \cdot G}{1000}$$

$$G = 3$$

$$p = 5$$

$$P_w = \frac{5 \cdot 3}{1000}$$

$$P_w = 0,015$$

oder

$$P_w = p\% \cdot G$$

$$p\% = \frac{5}{1000} = 0,005$$

$$P_w = 0,005 \cdot 3$$

$$P_w = 0,015$$

Aufgabe (9)

$$P_w = \frac{p \cdot G}{1000}$$

$$G = 300$$

$$p = 4$$

$$P_w = \frac{4 \cdot 300}{1000}$$

$$P_w = 1\frac{1}{5}$$

oder

$$P_w = p\% \cdot G$$

$$p\% = \frac{4}{1000} = 0,004$$

$$P_w = 0,004 \cdot 300$$

$$P_w = 1\frac{1}{5}$$

Aufgabe (10)

$$P_w = \frac{p \cdot G}{1000}$$

$$G = 240$$

$$p = 3$$

$$P_w = \frac{3 \cdot 240}{1000}$$

$$P_w = \frac{18}{25}$$

oder

$$P_w = p\% \cdot G$$

$$p\% = \frac{3}{1000} = 0,003$$

$$P_w = 0,003 \cdot 240$$

$$P_w = \frac{18}{25}$$

Aufgabe (11)

$$P_w = \frac{p \cdot G}{1000}$$

$$G = 652$$

$$p = 3$$

$$P_w = \frac{3 \cdot 652}{1000}$$

$$P_w = 1,96$$

oder

$$P_w = p\% \cdot G$$

$$p\% = \frac{3}{1000} = 0,003$$

$$P_w = 0,003 \cdot 652$$

$$P_w = 1,96$$

Aufgabe (12)

$$P_w = \frac{p \cdot G}{1000}$$

$$G = 680$$

$$p = 7$$

$$P_w = \frac{7 \cdot 680}{1000}$$

$$P_w = 4\frac{19}{25}$$

oder

$$P_w = p\% \cdot G$$

$$p\% = \frac{7}{1000} = 0,007$$

$$P_w = 0,007 \cdot 680$$

$$P_w = 4\frac{19}{25}$$

$$5.2 \quad G = \frac{P_w \cdot 1000}{p}$$

### 5.2.1 Aufgaben

Um eigene Aufgaben zu lösen, klicken Sie hier: [Neue Rechnung](#)

Gegeben:

Promillewert  $P_w$

Promille  $p$

Gesucht:

Grundwert  $G$

(1)  $P_w = 100$   $p = 5$

(2)  $P_w = 90$   $p = 3$

(3)  $P_w = 100$   $p = 60$

(4)  $P_w = 2 \cdot 10^3$   $p = 1$

(5)  $P_w = 136$   $p = \frac{1}{4}$

(6)  $P_w = 1,48 \cdot 10^3$   $p = 2\frac{1}{2}$

(7)  $P_w = 600$   $p = 4$

(8)  $P_w = 3$   $p = 5$

(9)  $P_w = 300$   $p = 4$

(10)  $P_w = 240$   $p = 3$

(11)  $P_w = 652$   $p = 3$

(12)  $P_w = 680$   $p = 7$

(13)  $P_w = 986$   $p = 7$

(14)  $P_w = 545$   $p = 67$

(15)  $P_w = 3$   $p = 5$

(16)  $P_w = 7,92 \cdot 10^3$   $p = 5$

(17)  $P_w = 3$   $p = 5$

(18)  $P_w = 8,88 \cdot 10^3$   $p = 5$

(19)  $P_w = 3$   $p = 4$

(20)  $P_w = 4,01 \cdot 10^3$   $p = 4$

## 5.2.2 Lösungen

Aufgabe (1)

$$G = \frac{P_w \cdot 1000}{p}$$

$$P_w = 100$$

$$p = 5$$

$$G = \frac{100 \cdot 1000}{5}$$

$$G = 2 \cdot 10^4$$

oder

$$G = \frac{P_w}{p\%_0}$$

$$p\%_0 = \frac{5}{100} = 0,005$$

$$G = \frac{100}{0,005}$$

$$G = 2 \cdot 10^4$$

Aufgabe (4)

$$G = \frac{P_w \cdot 1000}{p}$$

$$P_w = 2 \cdot 10^3$$

$$p = 1$$

$$G = \frac{2 \cdot 10^3 \cdot 1000}{1}$$

$$G = 2 \cdot 10^6$$

oder

$$G = \frac{P_w}{p\%_0}$$

$$p\%_0 = \frac{1}{100} = 0,001$$

$$G = \frac{2 \cdot 10^3}{0,001}$$

$$G = 2 \cdot 10^6$$

Aufgabe (2)

$$G = \frac{P_w \cdot 1000}{p}$$

$$P_w = 90$$

$$p = 3$$

$$G = \frac{90 \cdot 1000}{3}$$

$$G = 3 \cdot 10^4$$

oder

$$G = \frac{P_w}{p\%_0}$$

$$p\%_0 = \frac{3}{100} = 0,003$$

$$G = \frac{90}{0,003}$$

$$G = 3 \cdot 10^4$$

Aufgabe (5)

$$G = \frac{P_w \cdot 1000}{p}$$

$$P_w = 136$$

$$p = \frac{1}{4}$$

$$G = \frac{136 \cdot 1000}{\frac{1}{4}}$$

$$G = 5,44 \cdot 10^5$$

oder

$$G = \frac{P_w}{p\%_0}$$

$$p\%_0 = \frac{\frac{1}{4}}{100} = 0,00025$$

$$G = \frac{136}{0,00025}$$

$$G = 5,44 \cdot 10^5$$

Aufgabe (3)

$$G = \frac{P_w \cdot 1000}{p}$$

$$P_w = 100$$

$$p = 60$$

$$G = \frac{100 \cdot 1000}{60}$$

$$G = 1666\frac{2}{3}$$

oder

$$G = \frac{P_w}{p\%_0}$$

$$p\%_0 = \frac{60}{100} = \frac{3}{50}$$

$$G = \frac{100}{\frac{3}{50}}$$

$$G = 1666\frac{2}{3}$$

Aufgabe (6)

$$G = \frac{P_w \cdot 1000}{p}$$

$$P_w = 1,48 \cdot 10^3$$

$$p = 2\frac{1}{2}$$

$$G = \frac{1,48 \cdot 10^3 \cdot 1000}{2\frac{1}{2}}$$

$$G = 5,92 \cdot 10^5$$

oder

$$G = \frac{P_w}{p\%_0}$$

$$p\%_0 = \frac{2\frac{1}{2}}{100} = 0,0025$$

$$G = \frac{1,48 \cdot 10^3}{0,0025}$$

$$G = 5,92 \cdot 10^5$$

Aufgabe (10)

Aufgabe (7)

$$\begin{aligned}
 G &= \frac{P_w \cdot 1000}{p} \\
 P_w &= 600 \\
 p &= 4 \\
 G &= \frac{600 \cdot 1000}{4} \\
 G &= 1,5 \cdot 10^5 \\
 \text{oder} \\
 G &= \frac{P_w}{p\%} \\
 p\% &= \frac{4}{100} = 0,004 \\
 G &= \frac{600}{0,004} \\
 G &= 1,5 \cdot 10^5
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 G &= \frac{P_w \cdot 1000}{p} \\
 P_w &= 240 \\
 p &= 3 \\
 G &= \frac{240 \cdot 1000}{3} \\
 G &= 8 \cdot 10^4 \\
 \text{oder} \\
 G &= \frac{P_w}{p\%} \\
 p\% &= \frac{3}{100} = 0,003 \\
 G &= \frac{240}{0,003} \\
 G &= 8 \cdot 10^4
 \end{aligned}$$

Aufgabe (11)

Aufgabe (8)

$$\begin{aligned}
 G &= \frac{P_w \cdot 1000}{p} \\
 P_w &= 3^p \\
 p &= 5 \\
 G &= \frac{3 \cdot 1000}{5} \\
 G &= 600 \\
 \text{oder} \\
 G &= \frac{P_w}{p\%} \\
 p\% &= \frac{5}{100} = 0,005 \\
 G &= \frac{600}{0,005} \\
 G &= 600
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 G &= \frac{P_w \cdot 1000}{p} \\
 P_w &= 652 \\
 p &= 3 \\
 G &= \frac{652 \cdot 1000}{3} \\
 G &= 217333\frac{1}{3} \\
 \text{oder} \\
 G &= \frac{P_w}{p\%} \\
 p\% &= \frac{3}{100} = 0,003 \\
 G &= \frac{652}{0,003} \\
 G &= 217333\frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

Aufgabe (12)

Aufgabe (9)

$$\begin{aligned}
 G &= \frac{P_w \cdot 1000}{p} \\
 P_w &= 300 \\
 p &= 4 \\
 G &= \frac{300 \cdot 1000}{4} \\
 G &= 7,5 \cdot 10^4 \\
 \text{oder} \\
 G &= \frac{P_w}{p\%} \\
 p\% &= \frac{4}{100} = 0,004 \\
 G &= \frac{300}{0,004} \\
 G &= 7,5 \cdot 10^4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 G &= \frac{P_w \cdot 1000}{p} \\
 P_w &= 680 \\
 p &= 7 \\
 G &= \frac{680 \cdot 1000}{7} \\
 G &= 97142\frac{6}{7} \\
 \text{oder} \\
 G &= \frac{P_w}{p\%} \\
 p\% &= \frac{7}{100} = 0,007 \\
 G &= \frac{680}{0,007} \\
 G &= 97142\frac{6}{7}
 \end{aligned}$$

Aufgabe (13)



$$G = \frac{P_w \cdot 1000}{p}$$

$$P_w = 986$$

$$p = 7$$

$$G = \frac{986 \cdot 1000}{7}$$

$$G = 140857 \frac{1}{7}$$

oder

$$G = \frac{P_w}{p\%_{00}}$$

$$p\%_{00} = \frac{7}{100} = 0,007$$

$$G = \frac{986}{0,007}$$

$$G = 140857 \frac{1}{7}$$

Aufgabe (14)

$$G = \frac{P_w \cdot 1000}{p}$$

$$P_w = 545$$

$$p = 67$$

$$G = \frac{545 \cdot 1000}{67}$$

$$G = 8134 \frac{22}{67}$$

oder

$$G = \frac{P_w}{p\%_{00}}$$

$$p\%_{00} = \frac{67}{100} = 0,067$$

$$G = \frac{545}{0,067}$$

$$G = 8134 \frac{22}{67}$$

Aufgabe (15)

$$G = \frac{P_w \cdot 1000}{p}$$

$$P_w = 3$$

$$p = 5$$

$$G = \frac{3 \cdot 1000}{5}$$

$$G = 600$$

oder

$$G = \frac{P_w}{p\%_{00}}$$

$$p\%_{00} = \frac{5}{100} = 0,005$$

$$G = \frac{3}{0,005}$$

$$G = 600$$

Aufgabe (16)

$$G = \frac{P_w \cdot 1000}{p}$$

$$P_w = 7,92 \cdot 10^3$$

$$p = 5$$

$$G = \frac{7,92 \cdot 10^3 \cdot 1000}{5}$$

$$G = 1,58 \cdot 10^6$$

oder

$$G = \frac{P_w}{p\%_{00}}$$

$$p\%_{00} = \frac{5}{100} = 0,005$$

$$G = \frac{7,92 \cdot 10^3}{0,005}$$

$$G = 1,58 \cdot 10^6$$

Aufgabe (17)

$$G = \frac{P_w \cdot 1000}{p}$$

$$P_w = 3$$

$$p = 5$$

$$G = \frac{3 \cdot 1000}{5}$$

$$G = 600$$

oder

$$G = \frac{P_w}{p\%_{00}}$$

$$p\%_{00} = \frac{5}{100} = 0,005$$

$$G = \frac{3}{0,005}$$

$$G = 600$$

Aufgabe (18)

$$G = \frac{P_w \cdot 1000}{p}$$

$$P_w = 8,88 \cdot 10^3$$

$$p = 5$$

$$G = \frac{8,88 \cdot 10^3 \cdot 1000}{5}$$

$$G = 1,78 \cdot 10^6$$

oder

$$G = \frac{P_w}{p\%_{00}}$$

$$p\%_{00} = \frac{5}{100} = 0,005$$

$$G = \frac{8,88 \cdot 10^3}{0,005}$$

$$G = 1,78 \cdot 10^6$$

Aufgabe (19)

$$G = \frac{P_w \cdot 1000}{p}$$

$$P_w = 3$$

$$p = 4$$

$$G = \frac{3 \cdot 1000}{4}$$

$$G = 750$$

oder

$$G = \frac{P_w}{p\%}$$

$$p\% = \frac{4}{100} = 0,004$$

$$G = \frac{3000}{0,004}$$

$$G = 750$$

$$G = \frac{P_w \cdot 1000}{p}$$

$$P_w = 4,01 \cdot 10^3$$

$$p = 4$$

$$G = \frac{4,01 \cdot 10^3 \cdot 1000}{4}$$

$$G = 10^6$$

oder

$$G = \frac{P_w}{p\%}$$

$$p\% = \frac{4}{100} = 0,004$$

$$G = \frac{4,01 \cdot 10^3}{0,004}$$

$$G = 10^6$$

Aufgabe (20)

**5.3**  $p = \frac{P_w \cdot 1000}{G}$

**5.3.1 Aufgaben**

Um eigene Aufgaben zu lösen, klicken Sie hier: [Neue Rechnung](#)

Gegeben:

Promillewert  $P_w$

Grundwert  $G$

Gesucht:

Promille  $p$

(1)  $P_w = 9$      $G = 180$

(2)  $P_w = 4$      $G = 80$

(3)  $P_w = 3$      $G = 12$

(4)  $P_w = 2$      $G = 500$

(5)  $P_w = 9$      $G = 990$

(6)  $P_w = 12$      $G = 120$

## 5.3.2 Lösungen

Aufgabe (1)

$$\begin{aligned}
 p &= \frac{P_w \cdot 1000}{G} \\
 P_w &= 9 \\
 G &= 180 \\
 p &= \frac{9 \cdot 1000}{180} \\
 p &= 50 \\
 p\%_{00} &= 50\%_{00} \\
 \text{oder} \\
 p\%_{00} &= \frac{P_w}{G} \\
 p\%_{00} &= \frac{9}{180} = \frac{1}{20} \\
 p\%_{00} &= \frac{1}{20} \cdot 1000\%_{00} = 50\%_{00}
 \end{aligned}$$

Aufgabe (4)

$$\begin{aligned}
 p &= \frac{P_w \cdot 1000}{G} \\
 P_w &= 2 \\
 G &= 500 \\
 p &= \frac{2 \cdot 1000}{500} \\
 p &= 4 \\
 p\%_{00} &= 4\%_{00} \\
 \text{oder} \\
 p\%_{00} &= \frac{P_w}{G} \\
 p\%_{00} &= \frac{2}{500} = 0,004 \\
 p\%_{00} &= 0,004 \cdot 1000\%_{00} = 4\%_{00}
 \end{aligned}$$

Aufgabe (2)

$$\begin{aligned}
 p &= \frac{P_w \cdot 1000}{G} \\
 P_w &= 4 \\
 G &= 80 \\
 p &= \frac{4 \cdot 1000}{80} \\
 p &= 50 \\
 p\%_{00} &= 50\%_{00} \\
 \text{oder} \\
 p\%_{00} &= \frac{P_w}{G} \\
 p\%_{00} &= \frac{4}{80} = \frac{1}{20} \\
 p\%_{00} &= \frac{1}{20} \cdot 1000\%_{00} = 50\%_{00}
 \end{aligned}$$

Aufgabe (5)

$$\begin{aligned}
 p &= \frac{P_w \cdot 1000}{G} \\
 P_w &= 9 \\
 G &= 990 \\
 p &= \frac{9 \cdot 1000}{990} \\
 p &= 9\frac{1}{11} \\
 p\%_{00} &= 9\frac{1}{11}\%_{00} \\
 \text{oder} \\
 p\%_{00} &= \frac{P_w}{G} \\
 p\%_{00} &= \frac{9}{990} = 0,00909 \\
 p\%_{00} &= 0,00909 \cdot 1000\%_{00} = 9\frac{1}{11}\%_{00}
 \end{aligned}$$

Aufgabe (3)

$$\begin{aligned}
 p &= \frac{P_w \cdot 1000}{G} \\
 P_w &= 3 \\
 G &= 12 \\
 p &= \frac{3 \cdot 1000}{12} \\
 p &= 250 \\
 p\%_{00} &= 250\%_{00} \\
 \text{oder} \\
 p\%_{00} &= \frac{P_w}{G} \\
 p\%_{00} &= \frac{3}{12} = \frac{1}{4} \\
 p\%_{00} &= \frac{1}{4} \cdot 1000\%_{00} = 250\%_{00}
 \end{aligned}$$

Aufgabe (6)

$$\begin{aligned}
 p &= \frac{P_w \cdot 1000}{G} \\
 P_w &= 12 \\
 G &= 120 \\
 p &= \frac{12 \cdot 1000}{120} \\
 p &= 100 \\
 p\%_{00} &= 100\%_{00} \\
 \text{oder} \\
 p\%_{00} &= \frac{P_w}{G} \\
 p\%_{00} &= \frac{12}{120} = \frac{1}{10} \\
 p\%_{00} &= \frac{1}{10} \cdot 1000\%_{00} = 100\%_{00}
 \end{aligned}$$

## 6 Prozentuale Ab- und Zunahme

### Prozentuale Ab- und Zunahme

- Endwert= Änderungsfaktor · Anfangswert

$$E = q \cdot A \quad q = \frac{E}{A} \quad A = \frac{E}{q}$$

- Prozentuale Zunahme  $q > 1$

$$q = 1 + \frac{p}{100} \quad p = (q - 1) \cdot 100$$

Endwert=Anfangswert+Veränderung

- Prozentuale Abnahme  $0 < q < 1$

$$q = 1 - \frac{p}{100} \quad p = (1 - q) \cdot 100$$

Endwert=Anfangswert-Veränderung

A - Anfangswert

E - Endwert

q - Änderungsfaktor

p - Prozentuale Zu- bzw. Abnahme

Eine Artikel kostet 200 €.

Der Preis wird um 10% erhöht.

$$q = 1 + \frac{10}{100} = 1.1 \quad E = 1.1 \cdot 200 \text{ €} = 220 \text{ €}$$

Der Preis wird um 10% gesenkt.

$$q = 1 - \frac{10}{100} = 0.9 \quad E = 0.9 \cdot 200 \text{ €} = 180 \text{ €}$$

Eine Artikel kostet nach Preiserhöhung 220 €.

Der Preis wurde um 10% erhöht.

$$q = 1 + \frac{10}{100} = 1.1 \quad A = \frac{220}{1.1} = 200 \text{ €}$$

Eine Artikel kostet nach der Preissenkung 180 €.

Der Preis wurde um 10% gesenkt.

$$q = 1 - \frac{10}{100} = 0.9 \quad A = \frac{180}{0.9} = 200 \text{ €}$$

Eine Artikel kostet 200 €.

Nach einer Preiserhöhung kostet er 220 €.

$$q = \frac{220}{200} = 1.1 \quad p = (1.1 - 1) \cdot 100 = 10\%$$

Nach einer Preissenkung kostet er 180 €.

$$q = \frac{180}{200} = 0.9 \quad p = (1 - 0.9) \cdot 100 = 10\%$$

### 6.1 $E = q \cdot A$

#### 6.1.1 Aufgaben

Um eigene Aufgaben zu lösen, klicken Sie hier: [Neue Rechnung](#)

Gegeben:

Anfangswert  $A$

Änderung  $p$  [%]

Gesucht:

Endwert  $E$

(1)  $A = 100 \quad p = 10$

(2)  $A = 400 \quad p = 10$

(3)  $A = 200 \quad p = 5$

(4)  $A = 5 \quad p = 100$

(5)  $A = 3 \quad p = 90$

(6)  $A = 600 \quad p = 75$

(7)  $A = 450 \quad p = 15$

### 6.1.2 Lösungen

Aufgabe (1)

$$E = q \cdot A$$

$$A = 100$$

$$p = 10$$

Prozentuale Zunahme

$$q = 1 + \frac{10}{100} = 1\frac{1}{10}$$

$$E = 1\frac{1}{10} \cdot 100$$

$$E = 110$$

Prozentuale Abnahme

$$q = 1 - \frac{10}{100} = \frac{9}{10}$$

$$E = \frac{9}{10} \cdot 100$$

$$E = 90$$

$$E = 2 \cdot 5$$

$$E = 10$$

Prozentuale Abnahme

$$q = 1 - \frac{100}{100} = 0$$

$$E = 0 \cdot 5$$

$$E = 0$$

Aufgabe (5)

Aufgabe (2)

$$E = q \cdot A$$

$$A = 400$$

$$p = 10$$

Prozentuale Zunahme

$$q = 1 + \frac{10}{100} = 1\frac{1}{10}$$

$$E = 1\frac{1}{10} \cdot 400$$

$$E = 440$$

Prozentuale Abnahme

$$q = 1 - \frac{10}{100} = \frac{9}{10}$$

$$E = \frac{9}{10} \cdot 400$$

$$E = 360$$

$$E = q \cdot A$$

$$A = 3$$

$$p = 90$$

Prozentuale Zunahme

$$q = 1 + \frac{90}{100} = 1\frac{9}{10}$$

$$E = 1\frac{9}{10} \cdot 3$$

$$E = 5\frac{7}{10}$$

Prozentuale Abnahme

$$q = 1 - \frac{90}{100} = \frac{1}{10}$$

$$E = \frac{1}{10} \cdot 3$$

$$E = \frac{3}{10}$$

Aufgabe (6)

Aufgabe (3)

$$E = q \cdot A$$

$$A = 200$$

$$p = 5$$

Prozentuale Zunahme

$$q = 1 + \frac{5}{100} = 1\frac{1}{20}$$

$$E = 1\frac{1}{20} \cdot 200$$

$$E = 210$$

Prozentuale Abnahme

$$q = 1 - \frac{5}{100} = \frac{19}{20}$$

$$E = \frac{19}{20} \cdot 200$$

$$E = 190$$

$$E = q \cdot A$$

$$A = 600$$

$$p = 75$$

Prozentuale Zunahme

$$q = 1 + \frac{75}{100} = 1\frac{3}{4}$$

$$E = 1\frac{3}{4} \cdot 600$$

$$E = 1,05 \cdot 10^3$$

Prozentuale Abnahme

$$q = 1 - \frac{75}{100} = \frac{1}{4}$$

$$E = \frac{1}{4} \cdot 600$$

$$E = 150$$

Aufgabe (7)

Aufgabe (4)

$$E = q \cdot A$$

$$A = 5$$

$$p = 100$$

Prozentuale Zunahme

$$q = 1 + \frac{100}{100} = 2$$

$$E = q \cdot A$$

$$A = 450$$

$$p = 15$$

Prozentuale Zunahme

$$q = 1 + \frac{15}{100} = 1\frac{3}{20}$$

$$E = 1\frac{3}{20} \cdot 450$$

$$E = 517\frac{1}{2}$$

Prozentuale Abnahme

$$q = 1 - \frac{15}{100} = \frac{17}{20}$$

$$E = \frac{17}{20} \cdot 450$$

$$E = 382\frac{1}{2}$$

**6.2**  $A = \frac{E}{q}$

**6.2.1 Aufgaben**

Um eigene Aufgaben zu lösen, klicken Sie hier: [Neue Rechnung](#)

Gegeben:

Endwert  $E$

Änderung  $p$  [%]

Gesucht:

Anfangswert  $A$

(1)  $E = 110$      $p = 10$

(2)  $E = 120$      $p = 20$

(3)  $E = 50$      $p = 10$

(4)  $E = 10$      $p = 5$

(5)  $E = 30$      $p = 50$

(6)  $E = 100$      $p = 20$

(7)  $E = 800$      $p = 25$

### 6.2.2 Lösungen

Aufgabe (1)

$$A = \frac{E}{q}$$

$$E = 110$$

$$p = 10$$

Prozentuale Zunahme

$$q = 1 + \frac{10}{100} = 1\frac{1}{10}$$

$$A = \frac{110}{1\frac{1}{10}}$$

$$A = 100$$

Prozentuale Abnahme

$$q = 1 - \frac{10}{100} = \frac{9}{10}$$

$$A = \frac{110}{\frac{9}{10}}$$

$$A = 122\frac{2}{9}$$

$$A = \frac{E}{q}$$

$$E = 10$$

$$p = 5$$

Prozentuale Zunahme

$$q = 1 + \frac{5}{100} = 1\frac{1}{20}$$

$$A = \frac{10}{1\frac{1}{20}}$$

$$A = 9\frac{11}{21}$$

Prozentuale Abnahme

$$q = 1 - \frac{5}{100} = \frac{19}{20}$$

$$A = \frac{10}{\frac{19}{20}}$$

$$A = 10\frac{10}{19}$$

Aufgabe (5)

Aufgabe (2)

$$A = \frac{E}{q}$$

$$E = 120$$

$$p = 20$$

Prozentuale Zunahme

$$q = 1 + \frac{20}{100} = 1\frac{1}{5}$$

$$A = \frac{120}{1\frac{1}{5}}$$

$$A = 100$$

Prozentuale Abnahme

$$q = 1 - \frac{20}{100} = \frac{4}{5}$$

$$A = \frac{120}{\frac{4}{5}}$$

$$A = 150$$

$$A = \frac{E}{q}$$

$$E = 30$$

$$p = 50$$

Prozentuale Zunahme

$$q = 1 + \frac{50}{100} = 1\frac{1}{2}$$

$$A = \frac{30}{1\frac{1}{2}}$$

$$A = 20$$

Prozentuale Abnahme

$$q = 1 - \frac{50}{100} = \frac{1}{2}$$

$$A = \frac{30}{\frac{1}{2}}$$

$$A = 60$$

Aufgabe (6)

Aufgabe (3)

$$A = \frac{E}{q}$$

$$E = 50$$

$$p = 10$$

Prozentuale Zunahme

$$q = 1 + \frac{10}{100} = 1\frac{1}{10}$$

$$A = \frac{50}{1\frac{1}{10}}$$

$$A = 45\frac{5}{11}$$

Prozentuale Abnahme

$$q = 1 - \frac{10}{100} = \frac{9}{10}$$

$$A = \frac{50}{\frac{9}{10}}$$

$$A = 55\frac{5}{9}$$

$$A = \frac{E}{q}$$

$$E = 100$$

$$p = 20$$

Prozentuale Zunahme

$$q = 1 + \frac{20}{100} = 1\frac{1}{5}$$

$$A = \frac{100}{1\frac{1}{5}}$$

$$A = 83\frac{1}{3}$$

Prozentuale Abnahme

$$q = 1 - \frac{20}{100} = \frac{4}{5}$$

$$A = \frac{100}{\frac{4}{5}}$$

$$A = 125$$

Aufgabe (4)

Aufgabe (7)



$$A = \frac{E}{q}$$

$$E = 800$$

$$p = 25$$

Prozentuale Zunahme

$$q = 1 + \frac{25}{100} = 1\frac{1}{4}$$

$$A = \frac{800}{1\frac{1}{4}}$$

$$A = 640$$

Prozentuale Abnahme

$$q = 1 - \frac{25}{100} = \frac{3}{4}$$

$$A = \frac{800}{\frac{3}{4}}$$

$$A = 1066\frac{2}{3}$$

## 6.3 $p = \frac{E}{A}$

### 6.3.1 Aufgaben

Um eigene Aufgaben zu lösen, klicken Sie hier: [Neue Rechnung](#)

Gegeben:

Endwert  $E$

Anfangswert  $A$

Gesucht:

Änderung  $p$  [%]

(1)  $E = 110$      $A = 100$

(2)  $E = 40$      $A = 80$

(3)  $E = 30$      $A = 12$

(4)  $E = 200$      $A = 500$

(5)  $E = 150$      $A = NaN$

(6)  $E = 80$      $A = 65$

(7)  $E = 24$      $A = 48$

(8)  $E = 48$      $A = 24$

(9)  $E = 48$      $A = 32$

(10)  $E = 74$      $A = 44$

(11)  $E = 19$      $A = 26$

(12)  $E = 36$      $A = 52$

(13)  $E = 82$      $A = 90$

(14)  $E = 92$      $A = 6$

(15)  $E = 72$      $A = 61$

### 6.3.2 Lösungen

Aufgabe (1)

$$E = 110$$

$$A = \frac{100}{E}$$

$$q = \frac{A}{110}$$

$$q = \frac{100}{110}$$

$$q = 1\frac{1}{10}$$

$$\text{Zunahme: } p = 1\frac{1}{10} \cdot 100 - 100 = 10\%$$

Aufgabe (2)

$$E = 40$$

$$A = \frac{80}{E}$$

$$q = \frac{A}{40}$$

$$q = \frac{80}{80}$$

$$q = \frac{1}{2}$$

$$\text{Abnahme: } p = 100 - \frac{1}{2} \cdot 100 = 50\%$$

Aufgabe (3)

$$E = 30$$

$$A = \frac{12}{E}$$

$$q = \frac{A}{30}$$

$$q = \frac{12}{30}$$

$$q = 2\frac{1}{2}$$

$$\text{Zunahme: } p = 2\frac{1}{2} \cdot 100 - 100 = 150\%$$

Aufgabe (4)

$$E = 200$$

$$A = \frac{500}{E}$$

$$q = \frac{A}{200}$$

$$q = \frac{500}{500}$$

$$q = \frac{2}{5}$$

$$\text{Abnahme: } p = 100 - \frac{2}{5} \cdot 100 = 60\%$$

Aufgabe (5)

$$E = 150$$

$$A = \frac{NaN}{E}$$

$$q = \frac{A}{150}$$

$$q = \frac{NaN}{150}$$

$$q = NaN$$

$$\text{Zunahme: } p = NaN \cdot 100 - 100 = NaN\%$$

Aufgabe (6)

$$E = 80$$

$$A = \frac{65}{E}$$

$$q = \frac{A}{80}$$

$$q = \frac{65}{80}$$

$$q = 1\frac{3}{13}$$

$$\text{Zunahme: } p = 1\frac{3}{13} \cdot 100 - 100 = 23\frac{1}{13}\%$$

Aufgabe (7)

$$E = 24$$

$$A = \frac{48}{E}$$

$$q = \frac{A}{24}$$

$$q = \frac{48}{48}$$

$$q = \frac{1}{2}$$

$$\text{Abnahme: } p = 100 - \frac{1}{2} \cdot 100 = 50\%$$

Aufgabe (8)

$$E = 48$$

$$A = \frac{24}{E}$$

$$q = \frac{A}{48}$$

$$q = \frac{24}{48}$$

$$q = 2$$

$$\text{Zunahme: } p = 2 \cdot 100 - 100 = 100\%$$

Aufgabe (9)

$$E = 48$$

$$A = \frac{32}{E}$$

$$q = \frac{A}{48}$$

$$q = \frac{32}{48}$$

$$q = 1\frac{1}{2}$$

$$\text{Zunahme: } p = 1\frac{1}{2} \cdot 100 - 100 = 50\%$$

Aufgabe (10)

$$E = 74$$

$$A = \frac{44}{E}$$

$$q = \frac{A}{74}$$

$$q = \frac{74}{44}$$

$$q = 1\frac{15}{22}$$

$$\text{Zunahme: } p = 1\frac{15}{22} \cdot 100 - 100 = 68\frac{2}{11}\%$$

Aufgabe (11)

$$A = 90$$

$$q = \frac{E}{A}$$

$$q = \frac{82}{90}$$

$$q = \frac{41}{45}$$

$$\text{Abnahme: } p = 100 - \frac{41}{45} \cdot 100 = 8\frac{8}{9}\%$$

Aufgabe (14)

$$E = 19$$

$$A = 26$$

$$q = \frac{E}{A}$$

$$q = \frac{19}{26}$$

$$q = \frac{19}{26}$$

$$\text{Abnahme: } p = 100 - \frac{19}{26} \cdot 100 = 26\frac{12}{13}\%$$

Aufgabe (12)

$$E = 92$$

$$A = 6$$

$$q = \frac{E}{A}$$

$$q = \frac{92}{6}$$

$$q = 15\frac{1}{3}$$

$$\text{Zunahme: } p = 15\frac{1}{3} \cdot 100 - 100 = 1433\frac{1}{3}\%$$

Aufgabe (15)

$$E = 36$$

$$A = 52$$

$$q = \frac{E}{A}$$

$$q = \frac{36}{52}$$

$$q = \frac{9}{13}$$

$$\text{Abnahme: } p = 100 - \frac{9}{13} \cdot 100 = 30\frac{10}{13}\%$$

Aufgabe (13)

$$E = 72$$

$$A = 61$$

$$q = \frac{E}{A}$$

$$q = \frac{72}{61}$$

$$q = 1\frac{11}{61}$$

$$\text{Zunahme: } p = 1\frac{11}{61} \cdot 100 - 100 = 18\frac{2}{61}\%$$

$$E = 82$$

# 7 Potenzen

## Definition

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n\text{-Faktoren}}$$

a = Basis n = Exponent

$$a^0 = 1 \quad a^1 = a$$

Basis: 10

$$10^0 = 1 \quad 10^1 = 10$$

Basis: e = 2,718.. (eulersche Zahl)

$$e^0 = 1 \quad e^1 = e$$

$$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2$$

$$x^4 = x \cdot x \cdot x \cdot x$$

$$4^0 = 1$$

$$x^0 = 1$$

$$4^1 = 4$$

$$x^1 = x$$

## Potenzen multiplizieren

gleiche Basis - Exponenten addieren

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$10^m \cdot 10^n = 10^{m+n}$$

$$e^m \cdot e^n = e^{m+n}$$

$$3^2 \cdot 3^5 = 3^{2+5} = 3^7$$

$$x^3 \cdot x^5 = x^{3+5} = x^8$$

$$e^3 \cdot e^{-5} = e^{3+(-5)} = e^{-2}$$

## Potenzen dividieren

gleiche Basis - Exponenten subtrahieren

$$a^m : a^n = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$10^m : 10^n = \frac{10^m}{10^n} = 10^{m-n}$$

$$e^m : e^n = \frac{e^m}{e^n} = e^{m-n}$$

$$\frac{3^7}{3^5} = 3^{7-5} = 3^2$$

$$\frac{x^5}{x^3} = x^{5-3} = x^2$$

$$\frac{e^5}{e^{-3}} = e^{5-(-3)} = e^8$$

## Potenz ausklammern

gleicher Exponent - Exponent ausklammern

$$a^n \cdot b^n = (ab)^n$$

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

$$3^2 \cdot 5^2 = (3 \cdot 5)^2 = 15^2$$

$$x^2 \cdot y^2 = (x \cdot y)^2$$

## Potenz in der Potenz

Exponenten multiplizieren

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

$$(10^n)^m = 10^{n \cdot m}$$

$$(e^n)^m = e^{n \cdot m}$$

$$(2^3)^4 = 2^{3 \cdot 4} = 2^{12}$$

$$(x^2)^3 = x^6$$

$$(x^2 \cdot 4)^2 = x^4 \cdot 4^2$$

$$(e^x)^2 = e^{2x}$$

## Potenzen mit negativem Exponenten

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$10^{-n} = \frac{1}{10^n}$$

$$e^{-n} = \frac{1}{e^n}$$

$$2^{-1} = \frac{1}{2} \quad 3^{-2} = \frac{1}{3^2}$$

$$x^{-2} = \frac{1}{x^2} \quad x^{-3} \cdot y^{-2} = \frac{1}{x^3 y^2}$$

## Potenz - Wurzel

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \quad a > 0$$

$$10^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{10}$$

$$e^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{e}$$

$$2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \quad x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$$

$$5^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{5} \quad 4^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{4}}$$

## Potenz mit rationalem Exponenten

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \quad a > 0$$

$$10^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{10^m}$$

$$e^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{e^m}$$

$$2^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{2^3}$$

## Potenzen mit rationalem (negativ) Exponenten

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} \quad a > 0$$

$$10^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{10^m}}$$

$$e^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{e^m}}$$

$$2^{-\frac{3}{5}} = \frac{1}{\sqrt[5]{2^3}}$$

## 7.1 Aufgaben

Um eigene Aufgaben zu lösen, klicken Sie hier: [Neue Rechnung](#)

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad a^n \cdot b^n = (ab)^n \quad (a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

- (1)  $a = 4$     $b = 3$     $m = 2$     $n = 3$   
 (2)  $a = 2$     $b = 3$     $m = 3$     $n = 2$   
 (3)  $a = 2$     $b = 4$     $m = 4$     $n = 2$   
 (4)  $a = 2$     $b = 3$     $m = 2$     $n = 1$   
 (5)  $a = -2$     $b = -3$     $m = 2$     $n = 1$   
 (6)  $a = -2$     $b = -4$     $m = 2$     $n = 2$   
 (7)  $a = \frac{1}{3}$     $b = \frac{2}{5}$     $m = 2$     $n = 3$   
 (8)  $a = \frac{1}{4}$     $b = \frac{1}{5}$     $m = 2$     $n = 4$   
 (9)  $a = -\frac{1}{3}$     $b = 2$     $m = 2$     $n = 2$

- (10)  $a = \frac{1}{3}$     $b = 2$     $m = 2$     $n = 2$   
 (11)  $a = \frac{1}{5}$     $b = \frac{1}{2}$     $m = 2$     $n = 3$   
 (12)  $a = \frac{1}{2}$     $b = \frac{1}{6}$     $m = 2$     $n = 3$   
 (13)  $a = \frac{1}{2}$     $b = \frac{1}{5}$     $m = 3$     $n = 4$   
 (14)  $a = \frac{1}{2}$     $b = \frac{1}{3}$     $m = 2$     $n = 3$   
 (15)  $a = 2$     $b = 3$     $m = 2$     $n = 3$   
 (16)  $a = -\frac{1}{2}$     $b = 3$     $m = 2$     $n = 3$   
 keine Aufgaben

## 7.2 Lösungen

Aufgabe (1)

$$4^2 \cdot 4^3 = 4^{2+3} = 4^5 = 1,02 \cdot 10^3$$

$$4^2 : 4^3 = \frac{4^2}{4^3} = 4^{2-3} = 4^{-1} = \frac{1}{4}$$

$$4^3 \cdot 3^3 = (4 \cdot 3)^3 = 12^3 = 1,73 \cdot 10^3$$

$$(4^3)^2 = 4^{3 \cdot 2} = 4^6 = 4,1 \cdot 10^3$$

Aufgabe (2)

$$2^3 \cdot 2^2 = 2^{3+2} = 2^5 = 32$$

$$2^3 : 2^2 = \frac{2^3}{2^2} = 2^{3-2} = 2^1 = 2$$

$$2^2 \cdot 3^2 = (2 \cdot 3)^2 = 6^2 = 36$$

$$(2^2)^3 = 2^{2 \cdot 3} = 2^6 = 64$$

Aufgabe (3)

$$2^4 \cdot 2^2 = 2^{4+2} = 2^6 = 64$$

$$2^4 : 2^2 = \frac{2^4}{2^2} = 2^{4-2} = 2^2 = 4$$

$$2^2 \cdot 4^2 = (2 \cdot 4)^2 = 8^2 = 64$$

$$(2^2)^4 = 2^{2 \cdot 4} = 2^8 = 256$$

Aufgabe (4)

$$2^2 \cdot 2^1 = 2^{2+1} = 2^3 = 8$$

$$2^2 : 2^1 = \frac{2^2}{2^1} = 2^{2-1} = 2^1 = 2$$

$$2^1 \cdot 3^1 = (2 \cdot 3)^1 = 6^1 = 6$$

$$(2^1)^2 = 2^{1 \cdot 2} = 2^2 = 4$$

Aufgabe (5)

$$(-2)^2 \cdot (-2)^1 = (-2)^{2+1} = (-2)^3 = -8$$

$$(-2)^2 : (-2)^1 = \frac{(-2)^2}{(-2)^1} = (-2)^{2-1} = (-2)^1 = -2$$

$$(-2)^1 \cdot (-3)^1 = ((-2) \cdot (-3))^1 = 6^1 = 6$$

$$((-2)^1)^2 = (-2)^{1 \cdot 2} = (-2)^2 = 4$$

Aufgabe (6)

$$(-2)^2 \cdot (-2)^2 = (-2)^{2+2} = (-2)^4 = 16$$

$$(-2)^2 : (-2)^2 = \frac{(-2)^2}{(-2)^2} = (-2)^{2-2} = (-2)^0 = 1$$

$$(-2)^2 \cdot (-4)^2 = ((-2) \cdot (-4))^2 = 8^2 = 64$$

$$((-2)^2)^2 = (-2)^{2 \cdot 2} = (-2)^4 = 16$$

Aufgabe (7)

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 &= \left(\frac{1}{3}\right)^{2+3} = \left(\frac{1}{3}\right)^5 = 0,00412 \\ \left(\frac{1}{3}\right)^2 : \left(\frac{1}{3}\right)^3 &= \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^2}{\left(\frac{1}{3}\right)^3} = \left(\frac{1}{3}\right)^{2-3} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} = 3 \\ \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^3 &= \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5}\right)^3 = \left(\frac{2}{15}\right)^3 = 0,00237 \\ \left(\left(\frac{1}{3}\right)^3\right)^2 &= \left(\frac{1}{3}\right)^{3 \cdot 2} = \left(\frac{1}{3}\right)^6 = 0,00137 \end{aligned}$$

Aufgabe (8)

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^4 &= \left(\frac{1}{4}\right)^{2+4} = \left(\frac{1}{4}\right)^6 = 0,000244 \\ \left(\frac{1}{4}\right)^2 : \left(\frac{1}{4}\right)^4 &= \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^2}{\left(\frac{1}{4}\right)^4} = \left(\frac{1}{4}\right)^{2-4} = \left(\frac{1}{4}\right)^{-2} = 16 \\ \left(\frac{1}{4}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^4 &= \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5}\right)^4 = \left(\frac{1}{20}\right)^4 = 6,25 \cdot 10^{-6} \\ \left(\left(\frac{1}{4}\right)^4\right)^2 &= \left(\frac{1}{4}\right)^{4 \cdot 2} = \left(\frac{1}{4}\right)^8 = 1,53 \cdot 10^{-5} \end{aligned}$$

Aufgabe (9)

$$\begin{aligned} \left(-\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^2 &= \left(-\frac{1}{3}\right)^{2+2} = \left(-\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81} \\ \left(-\frac{1}{3}\right)^2 : \left(-\frac{1}{3}\right)^2 &= \frac{\left(-\frac{1}{3}\right)^2}{\left(-\frac{1}{3}\right)^2} = \left(-\frac{1}{3}\right)^{2-2} = \left(-\frac{1}{3}\right)^0 = 1 \\ \left(-\frac{1}{3}\right)^2 \cdot 2^2 &= \left(\left(-\frac{1}{3}\right) \cdot 2\right)^2 = \left(-\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9} \\ \left(\left(-\frac{1}{3}\right)^2\right)^2 &= \left(-\frac{1}{3}\right)^{2 \cdot 2} = \left(-\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81} \end{aligned}$$

Aufgabe (10)

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 &= \left(\frac{1}{3}\right)^{2+2} = \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81} \\ \left(\frac{1}{3}\right)^2 : \left(\frac{1}{3}\right)^2 &= \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^2}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \left(\frac{1}{3}\right)^{2-2} = \left(\frac{1}{3}\right)^0 = 1 \\ \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot 2^2 &= \left(\frac{1}{3} \cdot 2\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9} \\ \left(\left(\frac{1}{3}\right)^2\right)^2 &= \left(\frac{1}{3}\right)^{2 \cdot 2} = \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81} \end{aligned}$$

Aufgabe (11)

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^3 &= \left(\frac{1}{5}\right)^{2+3} = \left(\frac{1}{5}\right)^5 = 0,00032 \\ \left(\frac{1}{5}\right)^2 : \left(\frac{1}{5}\right)^3 &= \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^2}{\left(\frac{1}{5}\right)^3} = \left(\frac{1}{5}\right)^{2-3} = \left(\frac{1}{5}\right)^{-1} = 5 \\ \left(\frac{1}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 &= \left(\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2}\right)^3 = \left(\frac{1}{10}\right)^3 = 0,001 \\ \left(\left(\frac{1}{5}\right)^3\right)^2 &= \left(\frac{1}{5}\right)^{3 \cdot 2} = \left(\frac{1}{5}\right)^6 = 6,4 \cdot 10^{-5} \end{aligned}$$

Aufgabe (12)

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^{2+3} = \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$$



$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2}\right)^2 : \left(\frac{1}{2}\right)^3 &= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 &= \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6}\right)^3 = \left(\frac{1}{12}\right)^3 = 0,000579 \\ \left(\left(\frac{1}{2}\right)^3\right)^2 &= \left(\frac{1}{2}\right)^{3 \cdot 2} = \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64} \end{aligned}$$

Aufgabe (13)

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 &= \left(\frac{1}{2}\right)^{3+4} = \left(\frac{1}{2}\right)^7 = 0,00781 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^3 : \left(\frac{1}{2}\right)^4 &= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{\left(\frac{1}{2}\right)^4} = \left(\frac{1}{2}\right)^{3-4} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^4 &= \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5}\right)^4 = \left(\frac{1}{10}\right)^4 = 0,0001 \\ \left(\left(\frac{1}{2}\right)^4\right)^3 &= \left(\frac{1}{2}\right)^{4 \cdot 3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{12} = 0,000244 \end{aligned}$$

Aufgabe (14)

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 &= \left(\frac{1}{2}\right)^{2+3} = \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32} \\ \left(\frac{1}{2}\right)^2 : \left(\frac{1}{2}\right)^3 &= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 &= \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}\right)^3 = \left(\frac{1}{6}\right)^3 = 0,00463 \\ \left(\left(\frac{1}{2}\right)^3\right)^2 &= \left(\frac{1}{2}\right)^{3 \cdot 2} = \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64} \end{aligned}$$

Aufgabe (15)

$$\begin{aligned} 2^2 \cdot 2^3 &= 2^{2+3} = 2^5 = 32 \\ 2^2 : 2^3 &= \frac{2^2}{2^3} = 2^{2-3} = 2^{-1} = \frac{1}{2} \\ 2^3 \cdot 3^3 &= (2 \cdot 3)^3 = 6^3 = 216 \\ (2^3)^2 &= 2^{3 \cdot 2} = 2^6 = 64 \end{aligned}$$

Aufgabe (16)

$$\begin{aligned} \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^3 &= \left(-\frac{1}{2}\right)^{2+3} = \left(-\frac{1}{2}\right)^5 = -\frac{1}{32} \\ \left(-\frac{1}{2}\right)^2 : \left(-\frac{1}{2}\right)^3 &= \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^2}{\left(-\frac{1}{2}\right)^3} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{2-3} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{-1} = -2 \\ \left(-\frac{1}{2}\right)^3 \cdot 3^3 &= \left(\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 3\right)^3 = \left(-1\frac{1}{2}\right)^3 = -3\frac{3}{8} \\ \left(\left(-\frac{1}{2}\right)^3\right)^2 &= \left(-\frac{1}{2}\right)^{3 \cdot 2} = \left(-\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64} \end{aligned}$$

## 8 Wurzeln

### Wurzel - Potenz

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

n - Wurzelexponent    a - Radikand

Quadratwurzel:  $\sqrt{a}$

Kubikwurzel:  $\sqrt[3]{a}$

$$\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}} \quad \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$$

$$\sqrt[3]{5} = 5^{\frac{1}{3}} \quad \frac{1}{\sqrt{4}} = 4^{-\frac{1}{2}}$$

### Wurzeln multiplizieren

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$

$$a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} = (ab)^{\frac{1}{n}}$$

gleiche Exponenten - Exponent ausklammern

$$\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{2 \cdot 4} = \sqrt[3]{8} = 2$$

### Wurzeln dividieren

$$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

$$\frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}$$

gleiche Exponenten - Exponent ausklammern

$$\sqrt[3]{54} : \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{\frac{54}{2}} = \sqrt[3]{27} = 3$$

### Wurzel in der Wurzel

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$$

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{m \cdot n}}$$

$$\sqrt[2]{\sqrt[3]{5}} = \sqrt[6]{5}$$

### Nenner rational machen

Wurzel (irrationale Zahl) aus dem Nenner entfernen

• Erweitern des Bruchs mit der Wurzel

$$\frac{a}{b\sqrt{c}} = \frac{a\sqrt{c}}{b\sqrt{c}\sqrt{c}} = \frac{a\sqrt{c}}{b(\sqrt{c})^2} = \frac{a\sqrt{c}}{bc}$$

$$\frac{a}{b\sqrt{c+d}} = \frac{a\sqrt{c+d}}{b\sqrt{c+d}\sqrt{c+d}} = \frac{a\sqrt{c+d}}{b(\sqrt{c+d})^2} = \frac{a\sqrt{c+d}}{b(c+d)}$$

$$\frac{a}{b\sqrt{c+d}} = \frac{a\sqrt{c+d}}{b\sqrt{c+d}\sqrt{c+d}} = \frac{a\sqrt{c+d}}{b(\sqrt{c+d})^2} = \frac{a\sqrt{c+d}}{b(c+d)}$$

• Erweitern mit der 3. Binomischen Formel

$$\frac{a}{b+\sqrt{c}} = \frac{a(b-\sqrt{c})}{(b+\sqrt{c})(b-\sqrt{c})} = \frac{a(b-\sqrt{c})}{b^2-(\sqrt{c})^2} = \frac{a(b-\sqrt{c})}{b^2-c}$$

Erweitern des Bruchs mit der Wurzel

$$\frac{3}{5\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{6}}{5\sqrt{6}\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{6}}{5(\sqrt{6})^2} = \frac{3\sqrt{6}}{30}$$

$$\frac{3}{5\sqrt{x+2}} = \frac{3\sqrt{x+2}}{5\sqrt{x+2}\sqrt{x+2}} = \frac{3\sqrt{x+2}}{5(\sqrt{x+2})^2} = \frac{3\sqrt{x+2}}{5(x+2)}$$

Erweitern zur 3. Binomischen Formel

$$\frac{3}{5+\sqrt{2}} = \frac{3(5-\sqrt{2})}{(5+\sqrt{2})(5-\sqrt{2})} = \frac{3(5-\sqrt{2})}{5^2-(\sqrt{2})^2} = \frac{3(5-\sqrt{2})}{5^2-2} = \frac{15-3\sqrt{2}}{23}$$

$$\frac{3}{\sqrt{x}+\sqrt{2}} = \frac{3(\sqrt{x}-\sqrt{2})}{(\sqrt{x}+\sqrt{2})(\sqrt{x}-\sqrt{2})} = \frac{3(\sqrt{x}-\sqrt{2})}{(\sqrt{x})^2-(\sqrt{2})^2} = \frac{3(\sqrt{x}-\sqrt{2})}{x-2}$$

## 8.1 Aufgaben

Um eigene Aufgaben zu lösen, klicken Sie hier: [Neue Rechnung](#)

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b} \quad \sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \quad \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$$

- |     |        |        |        |       |
|-----|--------|--------|--------|-------|
| (1) | a = 4  | b = 4  | m = 2  | n = 2 |
| (2) | a = 4  | b = 8  | m = 2  | n = 2 |
| (3) | a = 36 | b = 92 | m = 22 | n = 4 |
| (4) | a = 69 | b = 26 | m = 3  | n = 2 |
| (5) | a = 96 | b = 40 | m = 15 | n = 2 |
| (6) | a = 36 | b = 53 | m = 3  | n = 7 |
| (7) | a = 40 | b = 48 | m = 6  | n = 4 |

- |      |        |        |       |       |
|------|--------|--------|-------|-------|
| (8)  | a = 12 | b = 5  | m = 5 | n = 5 |
| (9)  | a = 87 | b = 60 | m = 3 | n = 7 |
| (10) | a = 61 | b = 37 | m = 4 | n = 8 |
| (11) | a = 26 | b = 22 | m = 9 | n = 6 |
| (12) | a = 2  | b = 63 | m = 4 | n = 3 |
| (13) | a = 49 | b = 12 | m = 2 | n = 3 |

## 8.2 Lösungen

Aufgabe (1)

$$\sqrt[2]{4} \cdot \sqrt[2]{4} = \sqrt[2]{4 \cdot 4} = \sqrt[2]{16} = 4$$

$$\sqrt[2]{4} : \sqrt[2]{4} = \sqrt[2]{\frac{4}{4}} = \sqrt[2]{1} = 1$$

$$\sqrt[2]{\sqrt[2]{4}} = \sqrt[2]{2} = \sqrt[4]{4} = 1,41$$

Aufgabe (2)

$$\sqrt[2]{4} \cdot \sqrt[2]{8} = \sqrt[2]{4 \cdot 8} = \sqrt[2]{32} = 5,66$$

$$\sqrt[2]{4} : \sqrt[2]{8} = \sqrt[2]{\frac{4}{8}} = \sqrt[2]{\frac{1}{2}} = 0,707$$

$$\sqrt[2]{\sqrt[2]{4}} = \sqrt[2]{2} = \sqrt[4]{4} = 1,41$$

Aufgabe (3)

$$\sqrt[4]{36} \cdot \sqrt[4]{92} = \sqrt[4]{36 \cdot 92} = \sqrt[4]{3,31 \cdot 10^3} = 7,59$$

$$\sqrt[4]{36} : \sqrt[4]{92} = \sqrt[4]{\frac{36}{92}} = \sqrt[4]{\frac{9}{23}} = 0,791$$

$$\sqrt[4]{\sqrt[22]{36}} = \sqrt[22]{\sqrt[4]{36}} = \sqrt[88]{36} = 1,04$$

Aufgabe (4)

$$\sqrt[2]{69} \cdot \sqrt[2]{26} = \sqrt[2]{69 \cdot 26} = \sqrt[2]{1,79 \cdot 10^3} = 42,4$$

$$\sqrt[2]{69} : \sqrt[2]{26} = \sqrt[2]{\frac{69}{26}} = \sqrt[2]{2\frac{17}{26}} = 1,63$$

$$\sqrt[2]{\sqrt[3]{69}} = \sqrt[3 \cdot 2]{69} = \sqrt[6]{69} = 2,03$$

Aufgabe (5)

$$\sqrt[2]{96} \cdot \sqrt[2]{40} = \sqrt[2]{96 \cdot 40} = \sqrt[2]{3,84 \cdot 10^3} = 62$$

$$\sqrt[2]{96} : \sqrt[2]{40} = \sqrt[2]{\frac{96}{40}} = \sqrt[2]{2\frac{2}{5}} = 1,55$$

$$\sqrt[2]{\sqrt[15]{96}} = \sqrt[15 \cdot 2]{96} = \sqrt[30]{96} = 1,16$$

Aufgabe (6)

$$\sqrt[7]{36} \cdot \sqrt[7]{53} = \sqrt[7]{36 \cdot 53} = \sqrt[7]{1,91 \cdot 10^3} = 2,94$$

$$\sqrt[7]{36} : \sqrt[7]{53} = \sqrt[7]{\frac{36}{53}} = \sqrt[7]{\frac{36}{53}} = 0,946$$

$$\sqrt[7]{\sqrt[3]{36}} = \sqrt[3 \cdot 7]{36} = \sqrt[21]{36} = 1,19$$

Aufgabe (7)

$$\sqrt[4]{40} \cdot \sqrt[4]{48} = \sqrt[4]{40 \cdot 48} = \sqrt[4]{1,92 \cdot 10^3} = 6,62$$

$$\sqrt[4]{40} : \sqrt[4]{48} = \sqrt[4]{\frac{40}{48}} = \sqrt[4]{\frac{5}{6}} = 0,955$$

$$\sqrt[4]{\sqrt[6]{40}} = \sqrt[6 \cdot 4]{40} = \sqrt[24]{40} = 1,17$$

Aufgabe (8)

$$\sqrt[5]{12} \cdot \sqrt[5]{5} = \sqrt[5]{12 \cdot 5} = \sqrt[5]{60} = 2,27$$

$$\sqrt[5]{12} : \sqrt[5]{5} = \sqrt[5]{\frac{12}{5}} = \sqrt[5]{2\frac{2}{5}} = 1,19$$

$$\sqrt[5]{\sqrt[5]{12}} = \sqrt[5 \cdot 5]{12} = \sqrt[25]{12} = 1,1$$

Aufgabe (9)

$$\sqrt[7]{87} \cdot \sqrt[7]{60} = \sqrt[7]{87 \cdot 60} = \sqrt[7]{5,22 \cdot 10^3} = 3,4$$

$$\sqrt[7]{87} : \sqrt[7]{60} = \sqrt[7]{\frac{87}{60}} = \sqrt[7]{1\frac{9}{20}} = 1,05$$

$$\sqrt[7]{\sqrt[3]{87}} = \sqrt[3 \cdot 7]{87} = \sqrt[21]{87} = 1,24$$

Aufgabe (10)

$$\sqrt[8]{61} \cdot \sqrt[8]{37} = \sqrt[8]{61 \cdot 37} = \sqrt[8]{2,26 \cdot 10^3} = 2,63$$

$$\sqrt[8]{61} : \sqrt[8]{37} = \sqrt[8]{\frac{61}{37}} = \sqrt[8]{1\frac{24}{37}} = 1,06$$

$$\sqrt[8]{\sqrt[4]{61}} = \sqrt[4 \cdot 8]{61} = \sqrt[32]{61} = 1,14$$

Aufgabe (11)

$$\sqrt[6]{26} \cdot \sqrt[6]{22} = \sqrt[6]{26 \cdot 22} = \sqrt[6]{572} = 2,88$$

$$\sqrt[6]{26} : \sqrt[6]{22} = \sqrt[6]{\frac{26}{22}} = \sqrt[6]{1\frac{2}{11}} = 1,03$$

$$\sqrt[6]{\sqrt[9]{26}} = \sqrt[9 \cdot 6]{26} = \sqrt[54]{26} = 1,06$$

Aufgabe (12)

$$\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{63} = \sqrt[3]{2 \cdot 63} = \sqrt[3]{126} = 5,01$$

$$\sqrt[3]{2} : \sqrt[3]{63} = \sqrt[3]{\frac{2}{63}} = \sqrt[3]{\frac{2}{63}} = 0,317$$

$$\sqrt[3]{\sqrt[4]{2}} = \sqrt[4 \cdot 3]{2} = \sqrt[12]{2} = 1,06$$

Aufgabe (13)

$$\sqrt[3]{49} \cdot \sqrt[3]{12} = \sqrt[3]{49 \cdot 12} = \sqrt[3]{588} = 8,38$$

$$\sqrt[3]{49} : \sqrt[3]{12} = \sqrt[3]{\frac{49}{12}} = \sqrt[3]{4\frac{1}{12}} = 1,6$$

$$\sqrt[3]{\sqrt{49}} = \sqrt[2 \cdot 3]{49} = \sqrt[6]{49} = 1,91$$

# 9 Logarithmen

## Definition

$$c = \log_b a \Leftrightarrow b^c = a$$

b = Basis a = Numerus

Basis: 10

$$\log_{10} x = \lg x$$

$$10^{\lg x} = x$$

$$\lg 10^x = x$$

Basis: e = 2,718.. (eulersche Zahl)

$$\log_e x = \ln x$$

$$e^{\ln x} = x$$

$$\ln e^x = x$$

$$3 = \log_2 8 \Leftrightarrow 2^3 = 8$$

$$\log_e 3 = \ln 3$$

$$e^{\ln 3} = 3$$

$$\ln e^3 = 3$$

$$\log_{10} 2 = \lg 2$$

$$10^{\lg 3} = 3$$

$$\lg 10^3 = 3$$

## Logarithmen addieren

$$\log_c a + \log_c b = \log_c (a \cdot b)$$

$$\lg a + \lg b = \lg (a \cdot b)$$

$$\ln a + \ln b = \ln (a \cdot b)$$

$$\log_2 4 + \log_2 8 = \log_2 (4 \cdot 8) = \log_2 32$$

$$\log_3 x + \log_3 y = \log_3 (x \cdot y)$$

## Logarithmen subtrahieren

$$\log_c a - \log_c b = \log_c \frac{a}{b}$$

$$\lg a - \lg b = \lg \frac{a}{b}$$

$$\ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b}$$

$$\log_3 5 - \log_3 7 = \log_3 \frac{5}{7}$$

$$\ln 5 - \ln 7 = \ln \frac{5}{7}$$

## Logarithmus von der Potenz

$$\log_c a^n = n \log_c a$$

$$\log_a a^n = n \log_a a = n$$

$$\lg 10^n = n$$

$$\ln e^n = n$$

$$\log_3 5^2 = 2 \log_3 5$$

## Basisumrechnung von Logarithmen

$$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b} = \frac{\lg a}{\lg b} = \frac{\ln a}{\ln b}$$

$$\log_5 3 = \frac{\log_2 3}{\log_2 5} = \frac{\lg 3}{\lg 5} = \frac{\ln 3}{\ln 5} = 0,68$$

## Logarithmus von der Wurzel

$$\log_c \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \log_c a$$

$$\log_4 \sqrt[5]{3} = \frac{1}{5} \log_4 3$$

## 9.1 Aufgaben

Um eigene Aufgaben zu lösen, klicken Sie hier: [Neue Rechnung](#)

$$c = \log_b a \Leftrightarrow b^c = a \quad \log_c a + \log_c b = \log_c (a \cdot b) \quad \log_c a - \log_c b = \log_c \frac{a}{b} \quad \log_c a^n = n \log_c a$$

(1)  $a = 2 \quad b = 2 \quad c = 2 \quad n = 2$

(2)  $a = 2 \quad b = 3 \quad c = 2 \quad n = 4$

(3)  $a = 5 \quad b = 8 \quad c = 3 \quad n = 2$

(4)  $a = 2\frac{1}{2} \quad b = 4\frac{1}{8} \quad c = 2 \quad n = 2$

(5)  $a = 2 \quad b = 4 \quad c = 2 \quad n = 4$

(6)  $a = 3\frac{11}{25} \quad b = 3\frac{2}{5} \quad c = 4 \quad n = 5$

(7)  $a = 3 \quad b = 4 \quad c = 5 \quad n = 6$

## 9.2 Lösungen

Aufgabe (1)

$$\begin{aligned}\log_2 2 &= 1 \Leftrightarrow 2^1 = 2 \\ \log_2 2 + \log_2 2 &= \log_2(2 \cdot 2) = \log_2(2 \cdot 2) = 2 \\ \log_2 2 - \log_2 2 &= \log_2 \frac{2}{2} = 0 \\ \log_2 2^2 &= 2 \log_2 2 = 2 \\ \log_2 2 &= \frac{\log_2 2}{\log_2 2} = 1\end{aligned}$$

Aufgabe (2)

$$\begin{aligned}\log_3 2 &= 0,631 \Leftrightarrow 3^{0,631} = 2 \\ \log_2 2 + \log_2 3 &= \log_2(2 \cdot 3) = \log_2(2 \cdot 3) = 2,58 \\ \log_2 2 - \log_2 3 &= \log_2 \frac{2}{3} = -0,585 \\ \log_2 2^4 &= 4 \log_2 2 = 4 \\ \log_3 2 &= \frac{\log_2 2}{\log_2 3} = 0,631\end{aligned}$$

Aufgabe (3)

$$\begin{aligned}\log_8 5 &= 0,774 \Leftrightarrow 8^{0,774} = 5 \\ \log_3 5 + \log_3 8 &= \log_3(5 \cdot 8) = \log_3(5 \cdot 8) = 3,36 \\ \log_3 5 - \log_3 8 &= \log_3 \frac{5}{8} = -0,428 \\ \log_3 5^2 &= 2 \log_3 5 = 2,93 \\ \log_8 5 &= \frac{\log_3 5}{\log_3 8} = 0,774\end{aligned}$$

Aufgabe (4)

$$\begin{aligned}\log_{4\frac{1}{8}} 2\frac{1}{2} &= 0,647 \Leftrightarrow 4\frac{1}{8}^{0,647} = 2\frac{1}{2} \\ \log_2 2\frac{1}{2} + \log_2 4\frac{1}{8} &= \log_2(2\frac{1}{2} \cdot 4\frac{1}{8}) = \log_2(2\frac{1}{2} \cdot 4\frac{1}{8}) = 3,37 \\ \log_2 2\frac{1}{2} - \log_2 4\frac{1}{8} &= \log_2 \frac{2\frac{1}{2}}{4\frac{1}{8}} = -0,722 \\ \log_2 2\frac{1}{2}^2 &= 2 \log_2 2\frac{1}{2} = 2,64 \\ \log_{4\frac{1}{8}} 2\frac{1}{2} &= \frac{\log_2 2\frac{1}{2}}{\log_2 4\frac{1}{8}} = 0,647\end{aligned}$$

Aufgabe (5)

$$\begin{aligned}\log_4 2 &= \frac{1}{2} \Leftrightarrow 4^{\frac{1}{2}} = 2 \\ \log_2 2 + \log_2 4 &= \log_2(2 \cdot 4) = \log_2(2 \cdot 4) = 3 \\ \log_2 2 - \log_2 4 &= \log_2 \frac{2}{4} = -1 \\ \log_2 2^4 &= 4 \log_2 2 = 4 \\ \log_4 2 &= \frac{\log_2 2}{\log_2 4} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Aufgabe (6)

$$\begin{aligned}\log_{3\frac{11}{25}} 3\frac{11}{25} &= 1,01 \Leftrightarrow 3\frac{11}{25}^{1,01} = 3\frac{11}{25} \\ \log_4 3\frac{11}{25} + \log_4 3\frac{2}{5} &= \log_4(3\frac{11}{25} \cdot 3\frac{2}{5}) = \log_4(3\frac{11}{25} \cdot 3\frac{2}{5}) = 1,77\end{aligned}$$

$$\log_4 3^{\frac{11}{25}} - \log_4 3^{\frac{2}{5}} = \log_4 \frac{3^{\frac{11}{25}}}{3^{\frac{2}{5}}} = 0,00844$$

$$\log_4 3^{\frac{11}{25} \cdot 5} = 5 \log_4 3^{\frac{11}{25}} = 4,46$$

$$\log_{3^{\frac{2}{5}}} 3^{\frac{11}{25}} = \frac{\log_4 3^{\frac{11}{25}}}{\log_4 3^{\frac{2}{5}}} = 1,01$$

Aufgabe (7)

$$\log_4 3 = 0,792 \Leftrightarrow 4^{0,792} = 3$$

$$\log_5 3 + \log_5 4 = \log_5(3 \cdot 4) = \log_5(3 \cdot 4) = 1,54$$

$$\log_5 3 - \log_5 4 = \log_5 \frac{3}{4} = -0,179$$

$$\log_5 3^6 = 6 \log_5 3 = 4,1$$

$$\log_4 3 = \frac{\log_5 3}{\log_5 4} = 0,792$$



# 10 Zahlensysteme

0 <sub>10</sub>	0 <sub>2</sub>	0 <sub>16</sub>	10 <sub>10</sub>	1010 <sub>2</sub>	A <sub>16</sub>	20 <sub>10</sub>	10100 <sub>2</sub>	14 <sub>16</sub>	30 <sub>10</sub>	11110 <sub>2</sub>	1E <sub>16</sub>	40 <sub>10</sub>	101000 <sub>2</sub>	28 <sub>16</sub>
1 <sub>10</sub>	1 <sub>2</sub>	1 <sub>16</sub>	11 <sub>10</sub>	1011 <sub>2</sub>	B <sub>16</sub>	21 <sub>10</sub>	10101 <sub>2</sub>	15 <sub>16</sub>	31 <sub>10</sub>	11111 <sub>2</sub>	1F <sub>16</sub>	41 <sub>10</sub>	101001 <sub>2</sub>	29 <sub>16</sub>
2 <sub>10</sub>	10 <sub>2</sub>	2 <sub>16</sub>	12 <sub>10</sub>	1100 <sub>2</sub>	C <sub>16</sub>	22 <sub>10</sub>	10110 <sub>2</sub>	16 <sub>16</sub>	32 <sub>10</sub>	100000 <sub>2</sub>	20 <sub>16</sub>	42 <sub>10</sub>	101010 <sub>2</sub>	2A <sub>16</sub>
3 <sub>10</sub>	11 <sub>2</sub>	3 <sub>16</sub>	13 <sub>10</sub>	1101 <sub>2</sub>	D <sub>16</sub>	23 <sub>10</sub>	10111 <sub>2</sub>	17 <sub>16</sub>	33 <sub>10</sub>	100001 <sub>2</sub>	21 <sub>16</sub>	43 <sub>10</sub>	101011 <sub>2</sub>	2B <sub>16</sub>
4 <sub>10</sub>	100 <sub>2</sub>	4 <sub>16</sub>	14 <sub>10</sub>	1110 <sub>2</sub>	E <sub>16</sub>	24 <sub>10</sub>	11000 <sub>2</sub>	18 <sub>16</sub>	34 <sub>10</sub>	100010 <sub>2</sub>	22 <sub>16</sub>	44 <sub>10</sub>	101100 <sub>2</sub>	2C <sub>16</sub>
5 <sub>10</sub>	101 <sub>2</sub>	5 <sub>16</sub>	15 <sub>10</sub>	1111 <sub>2</sub>	F <sub>16</sub>	25 <sub>10</sub>	11001 <sub>2</sub>	19 <sub>16</sub>	35 <sub>10</sub>	100011 <sub>2</sub>	23 <sub>16</sub>	45 <sub>10</sub>	101101 <sub>2</sub>	2D <sub>16</sub>
6 <sub>10</sub>	110 <sub>2</sub>	6 <sub>16</sub>	16 <sub>10</sub>	10000 <sub>2</sub>	10 <sub>16</sub>	26 <sub>10</sub>	11010 <sub>2</sub>	1A <sub>16</sub>	36 <sub>10</sub>	100100 <sub>2</sub>	24 <sub>16</sub>	46 <sub>10</sub>	101110 <sub>2</sub>	2E <sub>16</sub>
7 <sub>10</sub>	111 <sub>2</sub>	7 <sub>16</sub>	17 <sub>10</sub>	10001 <sub>2</sub>	11 <sub>16</sub>	27 <sub>10</sub>	11011 <sub>2</sub>	1B <sub>16</sub>	37 <sub>10</sub>	100101 <sub>2</sub>	25 <sub>16</sub>	47 <sub>10</sub>	101111 <sub>2</sub>	2F <sub>16</sub>
8 <sub>10</sub>	1000 <sub>2</sub>	8 <sub>16</sub>	18 <sub>10</sub>	10010 <sub>2</sub>	12 <sub>16</sub>	28 <sub>10</sub>	11100 <sub>2</sub>	1C <sub>16</sub>	38 <sub>10</sub>	100110 <sub>2</sub>	26 <sub>16</sub>	48 <sub>10</sub>	110000 <sub>2</sub>	30 <sub>16</sub>
9 <sub>10</sub>	1001 <sub>2</sub>	9 <sub>16</sub>	19 <sub>10</sub>	10011 <sub>2</sub>	13 <sub>16</sub>	29 <sub>10</sub>	11101 <sub>2</sub>	1D <sub>16</sub>	39 <sub>10</sub>	100111 <sub>2</sub>	27 <sub>16</sub>	49 <sub>10</sub>	110001 <sub>2</sub>	31 <sub>16</sub>

## Zahl mit Basis B in Dezimalzahl

- Definition

$$Z_B = \sum_{i=0}^n Z_i B^i = Z_n B^n + \dots + Z_1 B^1 + Z_0 B^0$$

Basis: B      Ziffern:  $Z_n, \dots, Z_1, Z_0$

Basis :	..	B <sup>3</sup>	B <sup>2</sup>	B <sup>1</sup>	B <sup>0</sup>
Ziffern :	..	Z <sub>3</sub>	Z <sub>2</sub>	Z <sub>1</sub>	Z <sub>0</sub>

Ziffern: 0; 1; 2, 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; A = 10; B = 11; C = 12;

D = 13; E = 14; F = 15

- Dezimalsystem

Basis: 10      Ziffern: 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9

$$Z_{10} = \sum_{i=0}^n Z_i 10^i = Z_n 10^n + \dots + Z_1 10^1 + Z_0 10^0$$

- Dualsystem (Binärsystem)

Basis: 2      Ziffern: 0,1

$$Z_2 = \sum_{i=0}^n Z_i 2^i = Z_n 2^n + \dots + Z_1 2^1 + Z_0 2^0$$

- Hexadezimalsystem

Basis: 16      Ziffern: 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,F

$$Z_{16} = \sum_{i=0}^n z_i 16^i = Z_n 16^n + \dots + Z_1 16^1 + Z_0 16^0$$

$$427 = 427_{10} =$$

10 <sup>2</sup>	10 <sup>1</sup>	10 <sup>0</sup>
4	2	7

$$4 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0 = 4 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 7 \cdot 1$$

$$110101011_2 =$$

2 <sup>8</sup>	2 <sup>7</sup>	2 <sup>6</sup>	2 <sup>5</sup>	2 <sup>4</sup>	2 <sup>3</sup>	2 <sup>2</sup>	2 <sup>1</sup>	2 <sup>0</sup>
1	1	0	1	0	1	0	1	1

$$1 \cdot 2^8 + 1 \cdot 2^7 + 0 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 1 \cdot 256 + 1 \cdot 128 + 0 \cdot 64 + 1 \cdot 32 + 0 \cdot 16 + 1 \cdot 8 + 0 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 427_{10}$$

$$1AB_{16} = \begin{matrix} 16^2 & 16^1 & 16^0 \\ 1 & A = 10 & B = 11 \end{matrix}$$

$$1 \cdot 16^2 + 10 \cdot 16^1 + 11 \cdot 16^0 = 1 \cdot 256 + 10 \cdot 16 + 11 \cdot 1 = 427_{10} = 427$$

## Dezimalzahl in Zahl mit Basis B

- Dezimalzahl durch die neue Basis teilen
- Ergebnis ist ein ganzzahliger Anteil und der Rest
- ganzzahligen Anteil wieder teilen
- usw.
- bis der ganzzahlige Anteil gleich Null ist
- die Ziffern der Reste von unten nach oben abschreiben

$$427 = 427_{10}$$

$$427 : 2 = 213 \text{ Rest: } 1$$

$$213 : 2 = 106 \text{ Rest: } 1$$

$$106 : 2 = 53 \text{ Rest: } 0$$

$$53 : 2 = 26 \text{ Rest: } 1$$

$$26 : 2 = 13 \text{ Rest: } 0$$

$$13 : 2 = 6 \text{ Rest: } 1$$

$$6 : 2 = 3 \text{ Rest: } 0$$

$$3 : 2 = 1 \text{ Rest: } 1$$

$$1 : 2 = 0 \text{ Rest: } 1$$

$$427_{10} = 110101011_2$$

$$427 = 427_{10}$$

$$427 : 16 = 26 \text{ Rest: } 11 = B$$

$$26 : 16 = 1 \text{ Rest: } 10 = A$$

$$1 : 16 = 0 \text{ Rest: } 1$$

$$427_{10} = 1AB_{16}$$

## 10.1 Zahlensysteme

### 10.1.1 Aufgaben

Um eigene Aufgaben zu lösen, klicken Sie hier: [Neue Rechnung](#)

Gegeben: Zahl 1 mit der Basis 1

Gesucht: Zahl 2 mit der Basis 2

(1) a  
(2) b  
(3) c  
(4) d

(5) e  
(6) f

## 10.1.2 Lösungen

Aufgabe (1)

$$\begin{aligned}
 17_{10} &= \\
 1 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0 &= \\
 1 \cdot 10 + 7 \cdot 1 &= \\
 17_{10} &
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 17 : 2 &= 8 \text{ Rest:1} \\
 8 : 2 &= 4 \text{ Rest:0} \\
 4 : 2 &= 2 \text{ Rest:0} \\
 2 : 2 &= 1 \text{ Rest:0} \\
 1 : 2 &= 0 \text{ Rest:1}
 \end{aligned}$$

$$17_{10} = 10001_2$$

Aufgabe (2)

$$\begin{aligned}
 456_{10} &= \\
 4 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0 &= \\
 4 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 6 \cdot 1 &= \\
 456_{10} &
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 456 : 2 &= 228 \text{ Rest:0} \\
 228 : 2 &= 114 \text{ Rest:0} \\
 114 : 2 &= 57 \text{ Rest:0} \\
 57 : 2 &= 28 \text{ Rest:1} \\
 28 : 2 &= 14 \text{ Rest:0} \\
 14 : 2 &= 7 \text{ Rest:0} \\
 7 : 2 &= 3 \text{ Rest:1} \\
 3 : 2 &= 1 \text{ Rest:1} \\
 1 : 2 &= 0 \text{ Rest:1}
 \end{aligned}$$

$$456_{10} = 111001000_2$$

Aufgabe (3)

$$\begin{aligned}
 37_{10} &= \\
 3 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0 &= \\
 3 \cdot 10 + 7 \cdot 1 &= \\
 37_{10} &
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 37 : 16 &= 2 \text{ Rest:5} \\
 2 : 16 &= 0 \text{ Rest:2}
 \end{aligned}$$

$$37_{10} = 25_{16}$$

Aufgabe (4)

$$\begin{aligned}
 567_{10} &= \\
 5 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0 &= \\
 5 \cdot 100 + 6 \cdot 10 + 7 \cdot 1 &= \\
 567_{10} &
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 567 : 16 &= 35 \text{ Rest:7} \\
 35 : 16 &= 2 \text{ Rest:3} \\
 2 : 16 &= 0 \text{ Rest:2}
 \end{aligned}$$

$$567_{10} = 237_{16}$$

Aufgabe (5)

$$\begin{aligned}
 100111_2 &= \\
 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 &= \\
 1 \cdot 32 + 0 \cdot 16 + 0 \cdot 8 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 &= \\
 39_{10} &
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 39 : 16 &= 2 \text{ Rest:7} \\
 2 : 16 &= 0 \text{ Rest:2}
 \end{aligned}$$

$$100111_2 = 27_{16}$$

Aufgabe (6)

$$\begin{aligned}
 11101100_2 &= \\
 1 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 &= \\
 1 \cdot 128 + 1 \cdot 64 + 1 \cdot 32 + 0 \cdot 16 + 1 \cdot 8 + 1 \cdot 4 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 1 &= \\
 236_{10} &
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 236 : 16 &= 14 \text{ Rest:12} = C \\
 14 : 16 &= 0 \text{ Rest:14} = E
 \end{aligned}$$

$$11101100_2 = EC_{16}$$

# 11 Zahlen

## 11.1 Primzahlen

2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	47
53	59	61	67	71	73	79	83	89	97	101	103	107	109	113
127	131	137	139	149	151	157	163	167	173	179	181	191	193	197
199	211	223	227	229	233	239	241	251	257	263	269	271	277	281
283	293	307	311	313	317	331	337	347	349	353	359	367	373	379
383	389	397	401	409	419	421	431	433	439	443	449	457	461	463
467	479	487	491	499	503	509	521	523	541	547	557	563	569	571
577	587	593	599	601	607	613	617	619	631	641	643	647	653	659
661	673	677	683	691	701	709	719	727	733	739	743	751	757	761
769	773	787	797	809	811	821	823	827	829	839	853	857	859	863
877	881	883	887	907	911	919	929	937	941	947	953	967	971	977
983	991	997	1009	1013	1019	1021	1031	1033	1039	1049	1051	1061	1063	1069
1087	1091	1093	1097	1103	1109	1117	1123	1129	1151	1153	1163	1171	1181	1187
1193	1201	1213	1217	1223	1229	1231	1237	1249	1259	1277	1279	1283	1289	1291
1297	1301	1303	1307	1319	1321	1327	1361	1367	1373	1381	1399	1409	1423	1427
1429	1433	1439	1447	1451	1453	1459	1471	1481	1483	1487	1489	1493	1499	1511
1523	1531	1543	1549	1553	1559	1567	1571	1579	1583	1597	1601	1607	1609	1613
1619	1621	1627	1637	1657	1663	1667	1669	1693	1697	1699	1709	1721	1723	1733
1741	1747	1753	1759	1777	1783	1787	1789	1801	1811	1823	1831	1847	1861	1867
1871	1873	1877	1879	1889	1901	1907	1913	1931	1933	1949	1951	1973	1979	1987
1993	1997	1999	2003	2011	2017	2027	2029	2039	2053	2063	2069	2081	2083	2087
2089	2099	2111	2113	2129	2131	2137	2141	2143	2153	2161	2179	2203	2207	2213
2221	2237	2239	2243	2251	2267	2269	2273	2281	2287	2293	2297	2309	2311	2333
2339	2341	2347	2351	2357	2371	2377	2381	2383	2389	2393	2399	2411	2417	2423
2437	2441	2447	2459	2467	2473	2477	2503	2521	2531	2539	2543	2549	2551	2557
2579	2591	2593	2609	2617	2621	2633	2647	2657	2659	2663	2671	2677	2683	2687
2689	2693	2699	2707	2711	2713	2719	2729	2731	2741	2749	2753	2767	2777	2789
2791	2797	2801	2803	2819	2833	2837	2843	2851	2857	2861	2879	2887	2897	2903
2909	2917	2927	2939	2953	2957	2963	2969	2971	2999	3001	3011	3019	3023	3037
3041	3049	3061	3067	3079	3083	3089	3109	3119	3121	3137	3163	3167	3169	3181
3187	3191	3203	3209	3217	3221	3229	3251	3253	3257	3259	3271	3299	3301	3307
3313	3319	3323	3329	3331	3343	3347	3359	3361	3371	3373	3389	3391	3407	3413
3433	3449	3457	3461	3463	3467	3469	3491	3499	3511	3517	3527	3529	3533	3539
3541	3547	3557	3559	3571	3581	3583	3593	3607	3613	3617	3623	3631	3637	3643
3659	3671	3673	3677	3691	3697	3701	3709	3719	3727	3733	3739	3761	3767	3769
3779	3793	3797	3803	3821	3823	3833	3847	3851	3853	3863	3877	3881	3889	3907
3911	3917	3919	3923	3929	3931	3943	3947	3967	3989	4001	4003	4007	4013	4019
4021	4027	4049	4051	4057	4073	4079	4091	4093	4099	4111	4127	4129	4133	4139
4153	4157	4159	4177	4201	4211	4217	4219	4229	4231	4241	4243	4253	4259	4261
4271	4273	4283	4289	4297	4327	4337	4339	4349	4357	4363	4373	4391	4397	4409
4421	4423	4441	4447	4451	4457	4463	4481	4483	4493	4507	4513	4517	4519	4523
4547	4549	4561	4567	4583	4591	4597	4603	4621	4637	4639	4643	4649	4651	4657
4663	4673	4679	4691	4703	4721	4723	4729	4733	4751	4759	4783	4787	4789	4793
4799	4801	4813	4817	4831	4861	4871	4877	4889	4903	4909	4919	4931	4933	4937
4943	4951	4957	4967	4969	4973	4987	4993	4999	5003	5009	5011	5021	5023	5039
5051	5059	5077	5081	5087	5099	5101	5107	5113	5119	5147	5153	5167	5171	5179
5189	5197	5209	5227	5231	5233	5237	5261	5273	5279	5281	5297	5303	5309	5323
5333	5347	5351	5381	5387	5393	5399	5407	5413	5417	5419	5431	5437	5441	5443
5449	5471	5477	5479	5483	5501	5503	5507	5519	5521	5527	5531	5557	5563	5569
5573	5581	5591	5623	5639	5641	5647	5651	5653	5657	5659	5669	5683	5689	5693
5701	5711	5717	5737	5741	5743	5749	5779	5783	5791	5801	5807	5813	5821	5827
5839	5843	5849	5851	5857	5861	5867	5869	5879	5881	5897	5903	5923	5927	5939
5953	5981	5987	6007	6011	6029	6037	6043	6047	6053	6067	6073	6079	6089	6091
6101	6113	6121	6131	6133	6143	6151	6163	6173	6197	6199	6203	6211	6217	6221
6229	6247	6257	6263	6269	6271	6277	6287	6299	6301	6311	6317	6323	6329	6337
6343	6353	6359	6361	6367	6373	6379	6389	6397	6421	6427	6449	6451	6469	6473

6481	6491	6521	6529	6547	6551	6553	6563	6569	6571	6577	6581	6599	6607	6619
6637	6653	6659	6661	6673	6679	6689	6691	6701	6703	6709	6719	6733	6737	6761
6763	6779	6781	6791	6793	6803	6823	6827	6829	6833	6841	6857	6863	6869	6871
6883	6899	6907	6911	6917	6947	6949	6959	6961	6967	6971	6977	6983	6991	6997
7001	7013	7019	7027	7039	7043	7057	7069	7079	7103	7109	7121	7127	7129	7151
7159	7177	7187	7193	7207	7211	7213	7219	7229	7237	7243	7247	7253	7283	7297
7307	7309	7321	7331	7333	7349	7351	7369	7393	7411	7417	7433	7451	7457	7459
7477	7481	7487	7489	7499	7507	7517	7523	7529	7537	7541	7547	7549	7559	7561
7573	7577	7583	7589	7591	7603	7607	7621	7639	7643	7649	7669	7673	7681	7687
7691	7699	7703	7717	7723	7727	7741	7753	7757	7759	7789	7793	7817	7823	7829
7841	7853	7867	7873	7877	7879	7883	7901	7907	7919	7927	7933	7937	7949	7951
7963	7993	8009	8011	8017	8039	8053	8059	8069	8081	8087	8089	8093	8101	8111
8117	8123	8147	8161	8167	8171	8179	8191	8209	8219	8221	8231	8233	8237	8243
8263	8269	8273	8287	8291	8293	8297	8311	8317	8329	8353	8363	8369	8377	8387
8389	8419	8423	8429	8431	8443	8447	8461	8467	8501	8513	8521	8527	8537	8539
8543	8563	8573	8581	8597	8599	8609	8623	8627	8629	8641	8647	8663	8669	8677
8681	8689	8693	8699	8707	8713	8719	8731	8737	8741	8747	8753	8761	8779	8783
8803	8807	8819	8821	8831	8837	8839	8849	8861	8863	8867	8887	8893	8923	8929
8933	8941	8951	8963	8969	8971	8999	9001	9007	9011	9013	9029	9041	9043	9049
9059	9067	9091	9103	9109	9127	9133	9137	9151	9157	9161	9173	9181	9187	9199
9203	9209	9221	9227	9239	9241	9257	9277	9281	9283	9293	9311	9319	9323	9337
9341	9343	9349	9371	9377	9391	9397	9403	9413	9419	9421	9431	9433	9437	9439
9461	9463	9467	9473	9479	9491	9497	9511	9521	9533	9539	9547	9551	9587	9601
9613	9619	9623	9629	9631	9643	9649	9661	9677	9679	9689	9697	9719	9721	9733
9739	9743	9749	9767	9769	9781	9787	9791	9803	9811	9817	9829	9833	9839	9851
9857	9859	9871	9883	9887	9901	9907	9923	9929	9931	9941	9949	9967	9973	