Formelsammlung Algebra

http://www.fersch.de

1. Juli 2020

Inhaltsverzeichnis

1 Algebra

1.1 Grundlagen

1.1.1 Mengen

Definition

Eine Menge (Großbuchstaben) besteht aus unterscheidbaren Elementen.

$\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C}$

Mengen in aufzählender Form

$\mathbb{A} = \{a; b; c\}$

$\mathbb{A} = \{1; 2; 3; 4\}$
$\mathbb{B} = \{-2; 0, 4; \sqrt{3}\}$

Mengen in beschreibender Form

$\mathbb{M} = \{x | x \text{ hat die Eigenschaft E}\}$

$\mathbb{M}_1 = \{x | x \text{ Menge aller Primzahlen}\}$
$\mathbb{M}_2 = \{x | x \text{ alle natürlichen Zahlen, die größer als 2 sind}\}$

$\in$ **Element -** $\notin$ **nicht Element**

$\mathbb{M} = \{a; b; c\}$
$b \in \mathbb{M}$
$e \notin \mathbb{M}$

$\mathbb{A} = \{1; 2; 3; 4\}$
$2 \in \mathbb{A}$
$5 \notin \mathbb{A}$

$\subset$ **Teilmenge -** $\not\subset$ **nicht Teilmenge**

$\mathbb{A} = \{a; b; c; d; e\}$
$\mathbb{B} = \{b; c\}$
$\mathbb{C} = \{b; c; f\}$
$\mathbb{B} \subset \mathbb{A}$ Jedes Element von B ist auch Element von A.
$\mathbb{C} \not\subset \mathbb{A}$ Nicht jedes Element von C ist auch Element von A.

$\mathbb{A} = \{1; 2; 3; 4\}$
$\{1; 4\} \subset \mathbb{A}$
$\{1; 4; 5\} \not\subset \mathbb{A}$

Gleichheit $A = B$

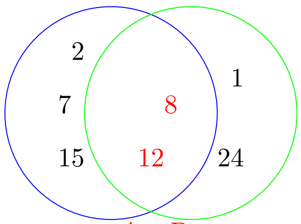
$\mathbb{A} = \{a; b; c; d; e\}$
$\mathbb{B} = \{a; b; c; d; e\}$
$\mathbb{A} = \mathbb{B}$ Jedes Element von $\mathbb{A}$ ist auch Element von $\mathbb{B}$.
Jedes Element von $\mathbb{B}$ ist auch Element von $\mathbb{A}$.

$\mathbb{A} = \{-3; 0; 1; 4; 12\}$
$\mathbb{B} = \{-3; 0; 1; 4; 12\}$
$\mathbb{A} = \mathbb{B}$

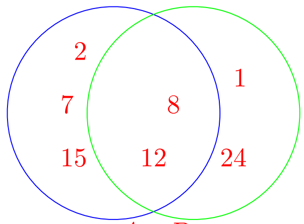
Leere Menge $\{\}$

$\mathbb{A} = \{\} = \emptyset$
Menge A enthält keine Elemente.

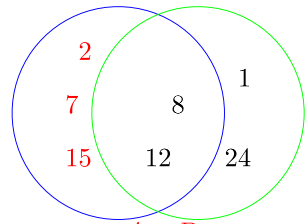
1.1.2 Mengenoperationen



$A \cap B$



$A \cup B$



$A \setminus B$

$\mathbb{A} = \{2; 7; 8; 12; 15\}$ $\quad \mathbb{B} = \{1; 8; 12; 24\}$

Schnittmenge $\cap$

$\mathbb{A} = \{c; d; e\}$

$\mathbb{B} = \{a; b; c; d\}$

$\mathbb{A} \cap \mathbb{B} = \{c; d\}$

Alle Elemente die in A und zugleich in B enthalten sind.

$\mathbb{A} = \{2; 7; 8; 12; 15\}$
$\mathbb{B} = \{1; 8; 12; 24\}$
$\mathbb{A} \cap \mathbb{B} = \{8; 12\}$
$\{4; 5; 23\} \cap \{0; 1; 4; 5; 12\} = \{4; 5\}$

Vereinigungsmenge $\cup$

$\mathbb{A} = \{c; d; e\}$

$\mathbb{B} = \{a; b; c; d\}$

$\mathbb{A} \cup \mathbb{B} = \{a; b; c; d; e\}$

Alle Elemente die in A oder B enthalten sind.

$\mathbb{A} = \{2; 7; 8; 12; 15\}$
$\mathbb{B} = \{1; 8; 12; 24\}$
$\mathbb{A} \cup \mathbb{B} = \{1; 7; 8; 12; 15; 24\}$
$\{4; 5; 23\} \cup \{0; 1; 4; 5; 12\} = \{0; 1; 4; 5; 12; 23\}$

Differenz $\setminus$

$\mathbb{A} = \{c; d; e\}$

$\mathbb{B} = \{a; b; c; d\}$

$\mathbb{A} \setminus \mathbb{B} = \{e\}$

Alle Elemente die in A, aber nicht in B enthalten sind.

$\mathbb{A} = \{2; 7; 8; 12; 15\}$
$\mathbb{B} = \{1; 8; 12; 24\}$
$\mathbb{A} \setminus \mathbb{B} = \{2; 7; 15\}$
$\{4; 5; 23\} \setminus \{0; 1; 4; 5; 12\} = \{23\}$

Produktmenge $\times$

$\mathbb{A} \times \mathbb{B} = \{(x, y) | x \in \mathbb{A}, y \in \mathbb{B}\}$

$\mathbb{A} = \{c; d; e\}$

$\mathbb{B} = \{a; b\}$

$\mathbb{A} \times \mathbb{B} = \{(c, a); (c, b); (d, a); (d, b); (e, a); (e, b)\}$

Die Menge aller geordneten Paare (x,y).

$x \in \mathbb{A}$ und $y \in \mathbb{B}$

$\mathbb{A} = \{2; 7; 8\}$
$\mathbb{B} = \{1; 8\}$
$\mathbb{A} \times \mathbb{B} = \{(2, 1); (2, 8); (7, 1); (7, 8); (8, 1); (8, 8)\}$

1.1.3 Zahlenmengen

Natürliche Zahlen

$\mathbb{N} = \{1; 2; 3; 4; \ldots\}$

$3 \in \mathbb{N} \qquad -3 \notin \mathbb{N}$
$0 \notin \mathbb{N} \qquad 0,2 = \frac{1}{5} \notin \mathbb{N}$

Natürliche Zahlen und Null

$\mathbb{N}_0 = \{0; 1; 2; 3; 4; \ldots\}$

$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$

$\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0$

$3 \in \mathbb{N}_0 \qquad -3 \notin \mathbb{N}_0$

$0 \in \mathbb{N}_0 \qquad 0,2 = \frac{1}{5} \notin \mathbb{N}_0$

Ganze Zahlen

$\mathbb{Z} = \{\ldots; -2; -1; 0; 1; 2; \ldots\}$

$\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z}$

$3 \in \mathbb{Z} \qquad -3 \in \mathbb{Z}$

$0 \in \mathbb{Z} \qquad 0,2 = \frac{1}{5} \notin \mathbb{Z}$

Rationale Zahlen

Rationale Zahlen $\mathbb{Q}$ sind

- Bruchzahlen
- endliche Dezimalzahlen
- unendliche periodische Dezimalzahlen

$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} | p \in \mathbb{Z} \wedge q \in \mathbb{N} \right\}$

$\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

$-3\frac{3}{7} \in \mathbb{Q} \qquad 3 \in \mathbb{Q} \qquad -3 \in \mathbb{Q} \qquad \sqrt{2} \notin \mathbb{Q} \qquad 0 \in \mathbb{Q}$

Jede endliche Dezimalzahl lässt sich durch einen Bruch darstellen.

$0,223 = \frac{223}{100} \in \mathbb{Q} \qquad 0,2 = \frac{1}{5} \in \mathbb{Q}$

Jede unendliche periodische Dezimalzahl lässt sich durch einen Bruch darstellen.

$0,3333... = 0,\overline{3} = \frac{1}{3} \in \mathbb{Q} \qquad 0,535353.. = 0,\overline{53} = \frac{53}{99} \in \mathbb{Q}$

$\mathbb{Q}^+$ = positve rationale Zahlen

$\mathbb{Q}_0^+$ = positve rationale Zahlen und Null

$\mathbb{Q}^-$ = negative rationale Zahlen

$\mathbb{Q}_0^-$ = negative rationale Zahlen und Null

$\mathbb{Q} \setminus \{3,4\}$ = rationale Zahlen ohne 3 und 4

$\mathbb{Q} \setminus [-3;5]$ = rationale Zahlen ohne 3 und 4 und ohne den Bereich zwischen 3 und 4

$\mathbb{Q} \setminus]-3;5[$ = rationale Zahlen ohne den Bereich zwischen 3 und 4

Irrationale Zahlen

Irrationale Zahlen $\mathbb{I}$ sind unendliche nicht periodische Dezimalzahlen.

Kreiszahl $\pi = 3,1415926535.. \in \mathbb{I}$

Eulersche Zahl $e = 2,7182818284.. \in \mathbb{I}$

$\sqrt{2} \in \mathbb{I} \qquad \sqrt{3} \in \mathbb{I} \qquad \sqrt{4} = 2 \notin \mathbb{I} \qquad 3 \notin \mathbb{I} \qquad -0,3 \notin \mathbb{I}$

Reelle Zahlen

Reelle Zahlen $\mathbb{R}$ sind

- rationale Zahlen $\mathbb{Q}$
- irrationale Zahlen $\mathbb{I}$

$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$

$\mathbb{R} = \{\text{jeder Punkt auf dem Zahlenstrahl}\}$

$\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

Kreiszahl $\pi = 3,1415926535.. \in \mathbb{R}$

Eulersche Zahl $e = 2,7182818284.. \in \mathbb{R}$

$-3\frac{3}{7} \in \mathbb{R} \qquad \sqrt{2} \in \mathbb{R} \qquad \sqrt{3} \in \mathbb{R}$

$\sqrt{4} = 2 \in \mathbb{R} \qquad 3 \in \mathbb{R} \qquad -0,3 \in \mathbb{R}$

$\sqrt{-4} \notin \mathbb{R}$

$\mathbb{R}^+$ = positive reelle Zahlen

$\mathbb{R}_0^+$ = positive reelle Zahlen und Null

$\mathbb{R}^-$ = negative reelle Zahlen

$\mathbb{R}_0^-$ = negative reelle Zahlen und Null

$\mathbb{R} \setminus \{3,4\}$ = reelle Zahlen ohne 3 und 4

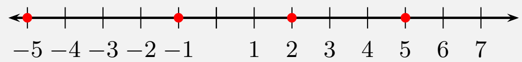
$\mathbb{R} \setminus [-3;5]$ = reelle Zahlen ohne 3 und 4 und ohne den Bereich zwischen 3 und 4

$\mathbb{R} \setminus]-3;5[$ = reelle Zahlen ohne den Bereich zwischen 3 und 4

Vergleichszeichen

$a = b$	a ist gleich b
$a \neq b$	a ist ungleich b
$a < b$	a ist kleiner als b
$a > b$	a ist größer als b
$a \leq b$	a ist kleiner oder gleich b
$a \geq b$	a ist größer oder gleich b

$3 + 4 = 7$ $\quad 3 + 4 \neq 8$



$-5 < -1 \quad -1 > -5 \quad 2 > -1 \quad 2 < 5$
$5 \leqq 5 \quad 7 \geqq 5$

1.1.4 Primfaktoren - ggT - kgV

Primzahlen

Eine Primzahl ist eine ganze Zahl, die nur durch eins und sich selbst teilbar ist.

Primzahlen:
$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43,$
$47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107.....$

Primfaktorenzerlegung

Zerlegung einer natürlichen Zahl als Produkt aus Primzahlen.

$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$
$120 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$
$340 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 17$

Teilbarkeitsregeln

Eine Zahl ist durch ...
2 teilbar, wenn ihre letzte Ziffer eine 2, 4, 6, 8 oder 0 ist.
3 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 3 teilbar ist.
4 teilbar, wenn ihre letzten 2 Stellen durch 4 teilbar sind.
5 teilbar, wenn ihre letzte Stelle eine 5 oder eine 0 ist.
6 teilbar, wenn sie durch 2 und durch 3 teilbar ist.
8 teilbar, wenn ihre letzten 3 Stellen durch 8 teilbar sind.
9 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 9 teilbar ist.
10 teilbar, wenn ihre letzte Stelle eine 0 ist.
12 teilbar, wenn sie durch 3 und durch 4 teilbar ist.
15 teilbar, wenn sie durch 3 und durch 5 teilbar ist.
18 teilbar, wenn sie durch 2 und durch 9 teilbar ist.
Die Quersumme einer Zahl, ist die Summe ihrer Ziffern.

$5|45$ 5 ist Teiler von 45
$3|123$ 3 ist Teiler von 123
Quersumme von 123: $1 + 2 + 3 = 6$
$3|6 \Rightarrow 3|123$

Vielfachmenge V(a)

Alle Vielfachen einer natürlichen Zahl a.

$V(4) = \{4; 8; 12; 16; 20; 24; 28; 32; 36; 40; 44; 48..\}$
$V(6) = \{6; 12; 18; 24; 30; 36; 42; 48; 54; 60; 66; 72; 78; 84..\}$
$V(3) = \{3; 6; 9; 12; 15; 18; 21; 24; 27; 30; 33; 36; 39; 42; 45..\}$

Teilermenge T(a)

Alle ganzzahligen Teiler einer Zahl a.

$T(36) = \{1; 2; 3; 4; 6; 9; 12; 18; 36\}$
$T(24) = \{1; 2; 3; 4; 6; 8; 12; 24\}$
$T(42) = \{1; 2; 3; 6; 7; 14; 21; 42\}$

Größter gemeinsamer Teiler ggT(a,b)

Methode 1: Aus den Teilermengen von a und b den größten Teiler ablesen.
Methode 2: Das Produkt der gemeinsamen Primfaktoren bilden.

$ggT(12;18) = 6$
Aus den Teilermengen den größten Teiler ablesen:
T(12)={1;2;3;4;6;12} T(18)={1;2;3;6;9;18}
Gemeinsame Primfaktoren von 12 und 18:

12	2	2	3	
18	2		3	3
ggT(12; 18)	2		3	

$ggT(12;18) = 2 \cdot 3 = 6$

Kleinstes gemeinsames Vielfaches kgV(a,b)

Methode 1: Aus den Vielfachmengen von a und b das kleinste Vielfache ablesen.
Methode 2: Das Produkt aller Primfaktoren von a und den zusätzlichen Primfaktoren von b bilden.

$kgV(12;18) = 36$
Aus den Vielfachmengen das kleinste Vielfache ablesen:
V(12)={12;24;36;48;60;72.. } V(18)={18;36;54;72;90..}
Primfaktoren von 12 und zusätzlichen Primfaktoren von 18:

12	2	2	3	
18	2		3	3
kgV(12; 18)	2	2	3	3

$kgV(12;18) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 36$

Interaktive Inhalte:
$ggT(a,b)$ $kgV(a,b)$ $ggT(a,b,c)$ $kgV(a,b,c)$

1.1.5 Grundrechnungen

Addition

a	+	b	=	c
1.Summand	+	2.Summand	=	Summe

$3 + 2 = 5$
$2x + 3x = 5x$
$2x^2 + 3x^2 = 5x^2$
$5x^2y + 7x^2y = 12x^2y$
$2xy + 3xy + 4z + 5z = 5xy + 9z$

Subtraktion

a	-	b	=	c
Minuend	-	Subtrahend	=	Differenz

$3 - 2 = 1$
$3x - 2x = x$
$2x^2 - 3x^2 = -x^2$
$5x^2y - 7x^2y = -2x^2y$
$3e^x - 2e^x = e^x$

Multiplikation

a	·	b	=	c
1.Faktor	·	2.Faktor	=	Produkt

$3 \cdot 2 = 6$
$2x \cdot 3x = 6x^2$
$2x^2 \cdot 3x^2 = 6x^4$
$5x^2y \cdot 7x^2y = 35x^4y$
$2xy \cdot 3xy \cdot 4z \cdot 5z = 120x^2y^2z^2$

Division

a	:	b	=	c
Dividend	:	Divisor	=	Quotient

$\frac{a}{b} = c$ $\frac{\text{Dividend}}{\text{Divisor}} = \text{Quotient}$

$12 : 3 = 4$
$\frac{12}{3} = 4$

1.1.6 Grundrechenregeln

Kommutativgesetz

$a \cdot b = b \cdot a$

$a + b = b + a$

$3 + 2 = 2 + 3 = 5$
$2x + 3x = 3x + 2x = 5x$
$3 \cdot 2 = 2 \cdot 3 = 6$
$2x \cdot 3x = 3x \cdot 2x = 6x^2$

Assoziativgesetz

$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

$(a + b) + c = a + (b + c)$

$4 + (3 + 2) = (4 + 3) + 2 = 9$
$4x + (3x + 2x) = (4x + 3x) + 2x = 9x$
$4 \cdot (3 \cdot 2) = (4 \cdot 3) \cdot 2 = 24$
$4x \cdot (3x \cdot 2x) = (4x \cdot 3x) \cdot 2x = 24x^3$

Distributivgesetz

$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

$3 \cdot (2 + 5) = 3 \cdot 2 + 3 \cdot 5 = 21$
$3 \cdot (2x + 5) = 3 \cdot 2x + 3 \cdot 5 = 6x + 15$
$3x \cdot (2x + 5) = 3x \cdot 2x + 3x \cdot 5 = 6x^2 + 15x$

Reihenfolge der Rechenarten

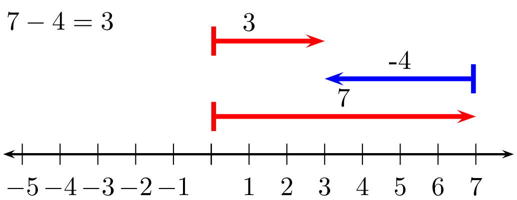
- Klammern vor
- Potenzierung vor
- Punktrechnung (Mulitiplikation und Division) vor
- Strichrechnung (Addition und Subtraktion)
- von links nach rechts

$100 - 40 - 5 \cdot (42 - 5 \cdot 2^3)^2$

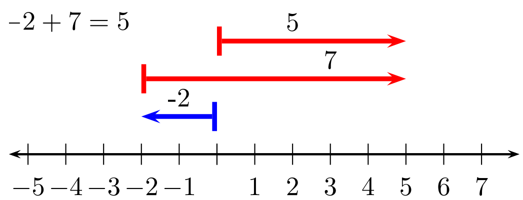
Innerhalb der Klammer Potenzierung:	$100 - 40 - 5 \cdot (42 - 5 \cdot 8)^2$
Innerhalb der Klammer Punktrechnung:	$100 - 40 - 5 \cdot (42 - 40)^2$
Innerhalb der Klammer Strichrechnung:	$100 - 40 - 5 \cdot (42 - 40)^2$
Potenzierung:	$100 - 40 - 5 \cdot 2^2$
Punktrechung:	$100 - 40 - 5 \cdot 4$
von links nach rechts:	$100 - 40 - 20$
Ergebnis:	$60 - 20 = 40$

1.1.7 Vorzeichenregel

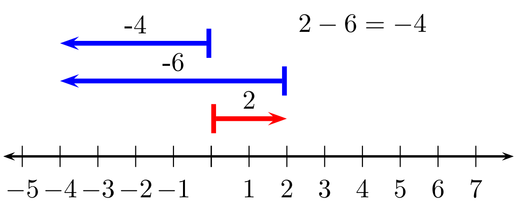
$7 - 4 = 3$



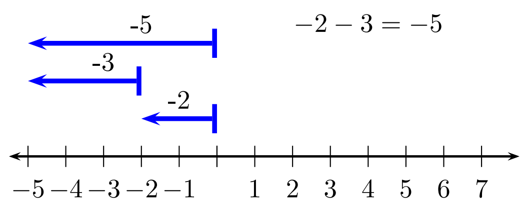
$-2 + 7 = 5$



$2 - 6 = -4$



$-2 - 3 = -5$



Vorzeichen und Klammern

$$+(+a) = +a$$
$$+(-a) = -a$$
$$-(+a) = -a$$
$$-(-a) = +a$$

$+(+2) = +2$
$-(-2) = +2$
$+(-2) = -2$
$-(+2) = -2$

Multiplikation

$$+a \cdot (+b) = +c$$
$$-a \cdot (-b) = +c$$
$$+a \cdot (-b) = -c$$
$$-a \cdot (+b) = -c$$

$+3 \cdot (+2) = +6$
$-3 \cdot (-2) = +6$
$+3 \cdot (-2) = -6$
$-3 \cdot (+2) = -6$

Division

$$\frac{+a}{+b} = +c$$
$$\frac{-a}{-b} = +c$$
$$\frac{+a}{-b} = -c$$
$$\frac{-a}{+b} = -c$$

$\frac{+6}{+3} = +2$
$\frac{-6}{-3} = +2$
$\frac{+6}{-3} = -2$
$\frac{-6}{+3} = -2$

Addition und Subtraktion

Bei gleichem Vorzeichen werden die Beträge addiert. Das Ergebnis erhält das gemeinsame Vorzeichen.
Bei verschiedenen Vorzeichen werden die Beträge subtrahiert. Das Ergebnis erhält das Vorzeichen der Zahl mit dem größerem Betrag.

$10 + 4 = 14$
$-10 - 4 = -(10 + 4) = -14$
$10 - 4 = 6$
$-10 + 6 = -(10 - 6) = -4$
$3x + 4x = 7x$
$-3x - 4x = -(3x + 4x) = -7x$
$3x - 4x = -(4x - 3x) = -x$
$-3x + 4x = 4x - 3x = x$

Betrag einer Zahl

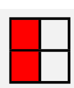
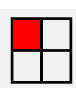
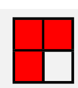
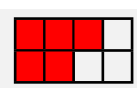
$$|x| = \begin{cases} x & x > 0 \\ -x & x < 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$|-3| = 3$
$|3| = 3$

1.1.8 Brüche

Bruch

Dividend : Divisor = Quotient
$\frac{\text{Dividend}}{\text{Divisor}} = \frac{\text{Zähler}}{\text{Nenner}} = \frac{Z}{N}$=Wert des Bruchs

 $= \frac{1}{2}$  $= \frac{1}{4}$  $= \frac{3}{4}$  $= \frac{5}{8}$

Besondere Brüche

- Echter Bruch: Nenner größer als Zähler
- Unechter Bruch:Zähler größer als Nenner
- Gemischte Zahl: Ganze Zahl + Bruch
- Stammbrüche: Zähler ist 1
- Gleichnamige Brüche: Nenner ist gleich
- Ungleichnamige Brüche:Nenner ist verschieden
- Kehrwert:Zähler und Nenner vertauschen
- Scheinbrüche:Scheinbrüche sind natürliche Zahlen

Echter Bruch:$\frac{2}{4}; \frac{5}{7}; \frac{1}{3}$

Unechter Bruch:$\frac{20}{4}; \frac{15}{7}; \frac{8}{3}$

Gemischte Zahl:$2\frac{2}{4}; 6\frac{5}{7}; 7\frac{8}{3}$

Stammbrüche:$\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}$

Gleichnamige Brüche:$\frac{2}{4}; \frac{3}{4}; \frac{8}{4}$

Ungleichnamige Brüche:$\frac{2}{4}; \frac{5}{7}; \frac{8}{3}$

Kehrwert:$\frac{2}{4} \Leftrightarrow \frac{4}{2}; \frac{5}{7} \Leftrightarrow \frac{7}{5}$

Scheinbrüche:$\frac{4}{2} = 2; \frac{28}{7} = 4$

Erweitern von Brüchen

Zähler und Nenner mit der gleichen Zahl multiplizieren

$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c}$

$\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 2}{4 \cdot 2} = \frac{6}{8}$

Kürzen von Brüchen

- Zähler und Nenner mit der gleichen Zahl dividieren

$\frac{a}{b} = \frac{a : c}{b : c}$

- Zähler und Nenner durch den ggT(Zähler;Nenner) teilen

$ggT(a, b) = c$

$\frac{a}{b} = \frac{a : c}{b : c}$

- Zähler und Nenner in Primfaktoren zerlegen und gleiche Primfaktoren kürzen

$\frac{12}{18} = \frac{12 : 2}{18 : 2} = \frac{6}{9}$

$\frac{6}{9} = \frac{6 : 3}{9 : 3} = \frac{2}{3}$

$\mathrm{ggT}(18; 12) = 6$

$\frac{12}{18} = \frac{12 : 6}{18 : 6} = \frac{2}{3}$

$\frac{12}{18} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 3}{2 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{2}{3}$

Addition und Subtraktion gleichnamiger Brüche

Zähler addieren bzw. subtrahieren

$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a + b}{c}$

$\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a - b}{c}$

$\frac{2}{3} + \frac{4}{3} = \frac{2 + 4}{3} = \frac{6}{3}$

$\frac{5}{7} - \frac{3}{7} = \frac{5 - 3}{7} = \frac{2}{7}$

Addition und Subtraktion ungleichnamiger Brüche

Brüche durch Erweitern gleichnamig machen

- Hauptnenner: Produkt der beiden Nenner

Erweiterungsfaktoren: d und b

$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d}{b\cdot d}+\frac{c\cdot b}{b\cdot d}=\frac{a\cdot d+c\cdot b}{b\cdot d}$

$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d}{b\cdot d}-\frac{c\cdot b}{b\cdot d}=\frac{a\cdot d-c\cdot b}{b\cdot d}$

- Hauptnenner: kgV(b,d)=c

Erweiterungsfaktoren: $\frac{c}{b}$ und $\frac{c}{d}$

$\frac{2}{3}+\frac{3}{4}$

Hauptnenner: $3\cdot 4=12$

Erweiterungsfaktoren: 4 **und** 3

$\frac{2}{3}+\frac{3}{4}=\frac{2\cdot 4}{3\cdot 4}+\frac{3\cdot 3}{4\cdot 3}=\frac{8}{12}+\frac{9}{12}=\frac{17}{12}=1\frac{5}{12}$

$\frac{3}{12}+\frac{5}{18}$

Hauptnenner: kgV($12,18)$ $=36$

Erweiterungsfaktoren: $\frac{36}{12}=3$ $\frac{36}{18}=2$

$\frac{3}{12}+\frac{5}{18}=\frac{3\cdot 3}{12\cdot 3}+\frac{5\cdot 2}{18\cdot 2}=\frac{9+10}{36}=\frac{19}{36}=\frac{19}{36}$

Multiplikation von Brüchen

Zähler mal Zähler und Nenner mal Nenner

$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$

$\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}=\frac{3\cdot 5}{4\cdot 6}=\frac{15}{24}$

Division von Brüchen

Mit dem Kehrwert des Bruches multiplizieren

Bruch durch Bruch

$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$

Bruch durch Zahl

$\frac{\frac{a}{b}}{e}=\frac{a}{b}:e=\frac{a}{b}\cdot\frac{1}{e}=\frac{a}{b\cdot e}$

Zahl durch Bruch

$\frac{e}{\frac{c}{d}}=e:\frac{c}{d}=\frac{e}{1}\cdot\frac{d}{c}=\frac{e\cdot d}{c}$

Doppelbruch

$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$

$\frac{3}{4}:\frac{5}{6}=\frac{3}{4}\cdot\frac{6}{5}=\frac{3\cdot 6}{4\cdot 5}=\frac{18}{20}$

$4:\frac{5}{6}=4\cdot\frac{6}{5}=\frac{4\cdot 6}{5}=\frac{24}{5}$

$\frac{3}{4}:5=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{5}=\frac{3}{4\cdot 5}=\frac{3}{20}$

$\frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{6}}=\frac{3}{4}:\frac{5}{6}==\frac{3}{4}\cdot\frac{6}{5}=\frac{3\cdot 6}{4\cdot 5}=\frac{18}{20}$

Interaktive Inhalte:

Kürzen | $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}$ | $a\frac{b}{c}-d\frac{e}{f}$

1.1.9 Dezimalbruch

Stellenwerttafel

Bruch	M	HT	ZT	T	H	Z	E	,	z	h	t	zt	ht		Dezimalbruch
$\frac{1}{10}$							0	,	1						$0,1$
$\frac{1}{100}$							0	,	0	1					$0,01$
$\frac{23}{100}$							0	,	2	3					$0,23$
$\frac{456}{1000}$							0	,	4	5	6				$0,456$
$12\frac{3}{10000}$						1	2	,	0	0	0	3			$12,0003$
$567\frac{30}{10000}$					5	6	7	,	0	0	3	0			$567,003$

Z	Zehner	10^1	10		E	Einer	10^0	1	
H	Hunderter	10^2	100		z	Zehntel	10^{-1}	$0,1$	$\frac{1}{10}$
T	Tausender	10^3	1000		h	Hundertstel	10^{-2}	$0,01$	$\frac{1}{100}$
ZT	Zehntausender	10^4	10000		t	Tausendstel	10^{-3}	$0,001$	$\frac{1}{1000}$
HT	Hunderttausender	10^5	100000		zt	Zehntausendstel	10^{-4}	$0,0001$	$\frac{1}{10000}$
M	Million	10^6	1000000		ht	Hunderttausendstel	10^{-5}	$0,00001$	$\frac{1}{100000}$

Bruch - Dezimalbruch

- Erweitern des Bruchs auf Zehntel, Hundertstel, Tausendstel usw.
- Werte in die Stellenwerttafel einsetzen.
- Schriftliches Dividieren

$\frac{1}{10} = 0,1 \qquad \frac{1}{100} = 0,01$
$\frac{1}{1000} = 0,001 \qquad \frac{1}{2}\,\frac{5}{10} = 0,5 \qquad \frac{4}{25} = \frac{16}{100} = 0,16$
$\frac{3}{8} = \frac{375}{1000} = 0,375 \qquad \frac{12,5}{100} = 0,125$
$\frac{201}{1000} = 0,201 \qquad \frac{125}{10000} = 0,0125$
$\frac{100}{100} = 1$
$\frac{2}{3} = 2 : 3 = 0,666... = 0,\overline{6}$

Dezimalbruch - Bruch

- Endlicher Dezimalburch:
Nachkommazahl (Dezimalen) als Zähler und im Nenner die entsprechende Stufenzahl(10,100,1000)
- Periodischer Dezimalbruch:
Periode beginnt direkt nach den Komma
Nachkommazahl (Dezimalen) als Zähler und im Nenner den entsprechenden Bruch mit 9 (9,99,999)

$0,201 = \frac{201}{1000} \qquad 0,0001 = \frac{1}{10000}$
$0,\overline{1} = \frac{1}{9} \qquad 0,\overline{2} = \frac{2}{9}$
$0,\overline{12} = \frac{12}{99} \qquad 0,\overline{255} = \frac{255}{999}$

Multiplizieren oder Dividieren mit Stufenzahl

- Multipliziern einer Dezimalzahl mit:
10 - Komma um 1 Stelle nach rechts verschieben
100 - Komma um 2 Stellen nach rechts verschieben
1000 - Komma um 3 Stellen nach rechts verschieben
......
- Dividieren einer Dezimallzahl durch:
10 - Komma um 1 Stelle nach links verschieben
100 - Komma um 2 Stellen nach links verschieben
1000 - Komma um 3 Stellen nach links verschieben
......

$345,677 \cdot 10 = 3456,77 \qquad 345,677 \cdot 100 = 34567,7$
$345,677 \cdot 1000 = 345677,0 \qquad 345,677 \cdot 10000 = 3456770,0$
$345,677 : 10 = 34,5677 \qquad 345,677 : 100 = 3,45677$
$345,677 : 1000 = 0,345677 \qquad 345,677 : 10000 = 0,0345677$

Runden von Dezimalbrüchen

Ziffer der zu rundenten Stelle bestimmen.

• Ist die nachfolgende Ziffer 0,1,2,3,4, dann wird abgerundet. Die gerundete Stelle bleibt unverändert

• Ist die nachfolgende Ziffer 5,6,7,8,9, dann wird aufgerundet. Die gerundete Stelle wird um eins erhöht.

• Wenn nach dem Komma gerundet wird, werden die nachfolgenden Ziffer weggelassen.

• Wenn vor dem Komma gerundet wird, werden die nachfolgenden Ziffern durch Null ersetzt.

$712,654$ runden auf Zehntel (1 Nachkommastelle)
Ziffer der Zehntelstelle: 6
Nachfolgende Ziffer: 5 $\Rightarrow$ aufrunden $6+1$
Gerundete Zahl: $712,7$
$712,654$ runden auf Hunderter
Ziffer der Hunderterstelle: 7
Nachfolgende Ziffer: 1 $\Rightarrow$ abrunden 700
Gerundete Zahl: 700
$712,9996$ runden auf Tausendstel (3 Nachkommastellen)
Ziffer der Tausendstelstelle: 9
Nachfolgende Ziffer: 6 $\Rightarrow$ aufrunden $712,999+0,001$
Gerundete Zahl: $713,000$

Wissenschaftliche Zahlendarstellung

• Definition

$x = m \cdot 10^n$

m - Mantisse 1<m<10

n - Exponent

10 - Basis

$x_1 = m_1 \cdot 10^{n_1} \quad x_2 = m_2 \cdot 10^{n_2}$

• Multiplikation

$x_1 \cdot x_2 = m_1 \cdot 10^{n_1} \cdot m_2 \cdot 10^{n_2} = m_1 \cdot m_2 10^{n_1+n_2}$

• Division

$\frac{x_1}{x_2} = \frac{m_1 \cdot 10^{n_1}}{m_2 \cdot 10^{n_2}} = \frac{m_1}{m_2} 10^{n_1-n_2}$

• Addition

Gleiche Exponenten:$n = n_1 = n_2$

$x_1 + x_2 = m_1 \cdot 10^n + m_2 \cdot 10^n = (m_1 + m_2)10^n$

• Subtraktion

$x_1 - x_2 = m_1 \cdot 10^n - m_2 \cdot 10^n = (m_1 - m_2)10^n$

$345 = 3,45 \cdot 10^2$
Komma um 2 Stellen nach links verschieben
$0,00345 = 3,45 \cdot 10^{-3}$
Komma um 3 Stellen nach rechts verschieben
$345 \cdot 10^7 = 3,45 \cdot 10^2 \cdot 10^7 = 3,45 \cdot 10^9$
Komma um 2 Stellen nach links verschieben
$0,00345 \cdot 10^{-4} = 3,45 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-4} = 3,45 \cdot 10^{-7}$
Komma um 3 Stellen nach rechts verschieben

$x_1 = 5,2 \cdot 10^3 \quad x_2 = 2,5 \cdot 10^{-2}$
$x_1 \cdot x_2 = 6,2 \cdot 10^3 \cdot 2,5 \cdot 10^{-2} = 6,2 \cdot 2,5 \cdot 10^{3-2} = 15,5 \cdot 10^1 = 1,55 \cdot 10^2$
$\frac{x_1}{x_2} = \frac{6,2 \cdot 10^3}{2,5 \cdot 10^{-2}} = \frac{6,2}{2,5} 10^{3-(-2)} = 2,48 \cdot 10^5$
Gleiche Exponenten:$2,5 \cdot 10^{-2} = 0,000025 \cdot 10^3$
$x_1 + x_2 = 6,2 \cdot 10^3 + 0,000025 \cdot 10^3 = (6,2 + 0,000025)10^3 = 6,200025 \cdot 10^3$
$x_1 - x_2 = 6,2 \cdot 10^3 - 0,000025 \cdot 10^3 = (6,2 - 0,000025)10^3 = 6,199975 \cdot 10^3$

1.1.10 Schriftliches Rechnen

Schriftliche Addition

1. Summand + 2.Summand = Summe
Zahlen stellenweise untereinander schreiben.
Komma unter Komma - Einer unter Einer usw.
  1.Summand (obere Zahl)
+ 2.Summand (untere Zahl)
____________Übertragszeile
  Summe (Ergebniszeile)
Von rechts beginnend die einzelne Ziffen addieren.
Obere Ziffer + untere Ziffer oder
Obere Ziffer + untere Ziffer + Übertrag
- Ist das Ergenis kleiner als 10, wird das Ergebnis in die Ergebniszeile geschrieben.
- Ist das Ergebnis größer als 9, wird die Einerziffern in die Ergebniszeile geschrieben. Die Zehnerziffer schreibt man in die nächste Spalte der Übertragszeile.

$89,9 + 5,92 =$

$$\begin{array}{cr} & 89,90 \\ + & 5,92 \\ & \underline{} \\ & 2 \end{array}$$
$0 + 2 = 2$
Ergebnis:2
Übertrag:0

$$\begin{array}{cr} & 89,90 \\ + & 5,92 \\ & \underline{1} \\ & 82 \end{array}$$
$9 + 9 = 18$
Ergebnis:8
Übertrag:1

$$\begin{array}{cr} & 89,90 \\ + & 5,92 \\ & \underline{1\;1} \\ & 5,82 \end{array}$$
$9 + 5 + 1 = 15$
Ergebnis:5
Übertrag:1

$$\begin{array}{cr} & 89,90 \\ + & 5,92 \\ & \underline{1\;1} \\ & 95,82 \end{array}$$
$8 + 0 + 1 = 9$
Ergebnis:9
Übertrag:0

$89,90 + 5,92 = 95,82$

Schriftliche Subtraktion

Minuend - Subtrahend = Differenz
Zahlen stellenweise untereinander schreiben.
Komma unter Komma - Einer unter Einer usw.
  Minuend (obere Zahl)
- Subtrahend (untere Zahl)
____________Übertragszeile
  Differenz (Ergebniszeile)
Von rechts beginnend die einzelne Ziffern subtrahieren.
Obere Ziffer - untere Ziffer oder
Obere Ziffer - (untere Ziffer + Übertrag)
Ist das Ergebnis größer gleich als Null, wird das Ergebnis in die Ergebniszeile geschrieben.
Ist das Ergebnis kleiner als Null, fügt man bei der oberen Ziffer eine Zehnerstelle hinzu, so dass das Ergebnis größer gleich Null wird. Die Einerziffer kommt in die Ergebniszeile. Die Zehnerziffer schreibt man in die nächste Spalte der Übertragszeile.

$123,48 - 89,47 =$

$$\begin{array}{cr} & 123,48 \\ - & 89,47 \\ & \underline{} \\ & 1 \end{array}$$
$8 - 7 = 1$
Ergebnis:1
Übertrag:0

$$\begin{array}{cr} & 123,48 \\ - & 89,47 \\ & \underline{} \\ & 01 \end{array}$$
$4 - 4 = 0$
Ergebnis:0
Übertrag:0

$$\begin{array}{cr} & 123,48 \\ - & 89,47 \\ & \underline{1} \\ & 4,01 \end{array}$$
$13 - 9 = 4$
Ergebnis:4
Übertrag:1

$$\begin{array}{cr} & 123,48 \\ - & 89,47 \\ & \underline{11} \\ & 34,01 \end{array}$$
$12 - (8 + 1) = 3$
Ergebnis:3
Übertrag:1

$$\begin{array}{cr} & 123,48 \\ - & 89,47 \\ & \underline{11} \\ & 034,01 \end{array}$$
$1 - (0 + 1) = 0$
Ergebnis:0
Übertrag:0

$123,48 - 89,47 = 34,01$

Schriftliche Multiplikation

1. Faktor $\cdot$ 2. Faktor= Produkt
linke Zahl $\cdot$ rechte Zahl = Ergebnis
Die einzelnen Ziffern der rechten Zahl mit der linken Zahl multiplizieren.
Das Ergebnis unter die Ziffer der rechten Zahl schreiben.
Die Ergebnisse addieren.
Die Nachkommastellen der beiden Faktoren addieren und beim Ergebnis das Komma setzen.

Schriftliche Multiplikation
$34,61 \cdot 9,3 =$
$\underline{3461 \cdot 93}$
31149
10383
321873
Nachkommastellen:$2 + 1 = 3$
$34,61 \cdot 9,3 = 321,873$

Schriftliche Division

Dividend : Divisor = Quotient
linke Zahl : rechte Zahl = Ergebnis
Enthält der Divisor(rechlte Zahl) ein Komma, wird das Komma beider Zahlen um soviel Stellen nach rechts verschoben, bis der Divisor eine ganze Zahl ist.
Versuch die erste Ziffer (die ersten beiden Ziffer usw.) der linken Zahl durch die rechte Zahl zu teilen, bis man bei der Teilung eine ganze Zahl erhält.
Das Ergebnis der Teilung mit der rechten Zahl multiplizieren und von den verwendeten Ziffern subtrahieren.
Die nächste Ziffer der linken Zahl an das Ergebnis anfügen und wieder versuchen zu teilen.
Ein Komma im Ergebnis entsteht,
- wenn man eine Ziffer, die nach dem Komma steht anfügt.
- wenn die linken Ziffern einer ganzen Zahl aufgebraucht sind und man eine Null anfügt.

$15 : 2 =$
$15 : 2 = 7,5$
15
$- \underline{14}$
10
$- \underline{10}$
0
$15,45 : 2,456 =$
$15450 : 2456 = 6,2$
15450
$- \underline{14736}$
7140
$- \underline{4912}$
2228
$6,2$ Rest 2228

Interaktive Inhalte:
Addition Subtraktion Multiplikation Division

1.1.11 Bruchteile - Prozent - Promille

Bruchteile

- Bruchteil (relativer Anteil) $= \dfrac{\text{absoluter Anteil}}{\text{Ganze}}$
- absoluter Anteil = Bruchteil $\cdot$ Ganze
- Ganze $= \dfrac{\text{absoluter Anteil}}{\text{Bruchteil}}$

Welcher Bruchteil sind 200 € von 800 €?
$\frac{200}{800} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

Gesucht: absoluter Anteil
$\frac{1}{4}$ von 800 €?
$\frac{1}{4} \cdot 800$ € $= 200$ €

Gesucht: Ganze
$\frac{1}{4}$ sind 200 €?
$\frac{200 \text{ €}}{\frac{1}{4}} = 800$ €

Prozent

- $p\% = \frac{p}{100}$ p Prozent = p Hundertstel
- Prozentsatz= Bruchteil ·100 %
- Bruchteil= $\frac{\text{Prozentsatz}}{100\%}$

p - Prozentzahl
p% - Prozentsatz

$p\% = 0,01 = \frac{1}{100} = 1\%$ $p = 1$
$p\% = 0,34 = \frac{34}{100} = 34\%$ $p = 34$
$p\% = 0,125 = \frac{12,5}{100} = 12,5\%$ $p = 12,5$
$p\% = 1,25 = \frac{125}{100} = 125\%$ $p = 125$

Promille

- p ‰= $\frac{p}{1000}$ p Promille = p Tausendstel
- Promillesatz= Bruchteil ·1000 ‰
- Bruchteil= $\frac{\text{Promillesatz}}{1000‰}$

p - Promillezahl
p‰ - Promillesatz

$p‰ = 0,001 = \frac{1}{1000} = 1$ ‰ $p = 1$
$p‰ = 0,034 = \frac{34}{1000} = 34$ ‰ $p = 34$
$p‰ = 0,125 = \frac{125}{1000} = 125$ ‰ $p = 125$
$p‰ = 1,25 = \frac{1250}{1000} = 1250$ ‰ $p = 1250$

1.1.12 Prozentrechnung

Prozentrechnung

- Verhältnisgleichung: $\frac{P_w}{p} = \frac{G}{100}$
- $P_w = \frac{p \cdot G}{100}$ $P_w = p\% \cdot G$
- $G = \frac{P_w \cdot 100}{p}$ $G = \frac{P_w}{p\%}$
- $p = \frac{P_w \cdot 100}{G}$ $p\% = \frac{P_w}{G}$

G - Grundwert
p - Prozentzahl
p% - Prozentsatz
P_w - Prozentwert

Wie viel sind 25% von 800 €?
$P_w = \frac{25 \cdot 800 \text{ €}}{100} = 200$ €
$p\% = 25\% = \frac{25}{100} = 0,25$
$P_w = 0,25 \cdot 800 \text{ €} = 200$ €

25% sind 200 €.Grundwert?
$G = \frac{200 \cdot 100}{25} = 800$ € $G = \frac{200}{0,25} = 800$ €

Wie viel Prozent sind 200 € von 800 €?
$p = \frac{200 \cdot 100}{800} = 25$ $p\% = 25\%$
$p\% = \frac{200}{800} = 0,25 = \frac{25}{100} = 25\%$

Interaktive Inhalte:
$P_w = \frac{p \cdot G}{100}$ $G = \frac{P_w \cdot 100}{p}$ $p = \frac{P_w \cdot 100}{G}$

1.1.13 Promillerechnung

Promillerechnung

- Verhältnisgleichung: $\frac{P_w}{p} = \frac{G}{1000}$
- $P_w = \frac{p \cdot G}{1000}$ $\qquad P_w = p‰ \cdot G$
- $G = \frac{P_w \cdot 1000}{p}$ $\qquad G = \frac{P_w}{p‰}$
- $p = \frac{P_w \cdot 1000}{G}$ $\qquad p‰ = \frac{P_w}{G}$

G - Grundwert

p - Promillezahl

p‰ - Promillesatz

P_w - Promillewert

Wie viel sind 25‰ von 800 €?

$P_w = \frac{25 \cdot 800\ €}{1000} = 20\ €$

$p‰ = \frac{25}{1000} = 0,025$

$P_w = 0,025 \cdot 800\ € = 20\ €$

25‰ sind 20 €.Grundwert?

$G = \frac{20 \cdot 1000}{25} = 800\ €$ $\qquad G = \frac{200}{0,025} = 800\ €$

Wie viel Promille sind 20 € von 800 €?

$p = \frac{20 \cdot 1000}{800} = 25$ $\qquad p‰ = 25‰$

$p‰ = \frac{20}{800} = 0,025 = \frac{25}{1000} = 25‰$

Interaktive Inhalte:

$P_w = \frac{p \cdot G}{1000}$ | $G = \frac{P_w \cdot 1000}{p}$ | $p = \frac{P_w \cdot 1000}{G}$

1.1.14 Prozentuale Ab- und Zunahme

Prozentuale Ab- und Zunahme

- Endwert= Änderungsfaktor · Anfangswert

$E = q \cdot A$ $\qquad q = \frac{E}{A}$ $\qquad A = \frac{E}{q}$

- Prozentuale Zunahme $q > 1$

$q = 1 + \frac{p}{100}$ $\qquad p = (q-1) \cdot 100$

Endwert=Anfangswert+Veränderung

- Prozentuale Abnahme $0 < q < 1$

$q = 1 - \frac{p}{100}$ $\qquad p = (1-q) \cdot 100$

Endwert=Anfangswert-Veränderung

A - Anfangswert

E - Endwert

q - Änderungsfaktor

p - Prozentuale Zu- bzw. Abnahme

Eine Artikel kostet 200 €.
Der Preis wird um 10% erhöht.
$q = 1 + \frac{10}{100} = 1.1$ $\quad E = 1.1 \cdot 200\ € = 220\ €$
Der Preis wird um 10% gesenkt.
$q = 1 - \frac{10}{100} = 0.9$ $\quad E = 0.9 \cdot 200\ € = 180\ €$

Eine Artikel kostet nach Preiserhöhung 220 €.
Der Preis wurde um 10% erhöht.
$q = 1 + \frac{10}{100} = 1.1$ $\quad A = \frac{220}{1.1} = 200\ €$
Eine Artikel kostet nach der Preissenkung 180 €.
Der Preis wurde um 10% gesenkt.
$q = 1 - \frac{10}{100} = 0.9$ $\quad A = \frac{180}{0.9} = 200\ €$

Eine Artikel kostet 200 €.
Nach einer Preiserhöhung kostet er 220 €.
$q = \frac{220}{200} = 1.1$ $\qquad p = (1.1 - 1) \cdot 100 = 10\%$
Nach einer Preissenkung kostet er 180 €.
$q = \frac{180}{200} = 0.9$ $\qquad p = (1 - 0.9) \cdot 100 = 10\%$

Interaktive Inhalte:

$E = q \cdot A$ | $A = \frac{E}{q}$ | $p = \frac{E}{A}$

1.1.15 Potenzen

Definition

$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n-\text{Faktoren}}$

a = Basis n = Exponent

$a^0 = 1 \quad a^1 = a$

Basis: 10

$10^0 = 1 \quad 10^1 = 10$

Basis: e = 2,718.. (eulersche Zahl)

$e^0 = 1 \quad e^1 = e$

$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2$
$x^4 = x \cdot x \cdot x \cdot x$
$4^0 = 1$
$x^0 = 1$
$4^1 = 4$
$x^1 = x$

Potenzen multiplizieren

gleiche Basis - Exponenten addieren

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

$10^m \cdot 10^n = 10^{m+n}$

$e^m \cdot e^n = e^{m+n}$

$3^2 \cdot 3^5 = 3^{2+5} = 3^7$
$x^3 \cdot x^5 = x^{3+5} = x^8$
$e^3 \cdot e^{-5} = e^{3+(-5)} = e^{-2}$

Potenzen dividieren

gleiche Basis - Exponenten subtrahieren

$a^m : a^n = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

$10^m : 10^n = \frac{10^m}{10^n} = 10^{m-n}$

$e^m : e^n = \frac{e^m}{e^n} = e^{m-n}$

$\frac{3^7}{3^5} = 3^{7-5} = 3^2$
$\frac{x^5}{x^3} = x^{5-3} = x^2$
$\frac{e^5}{e^{-3}} = e^{5-(-3)} = e^8$

Potenz ausklammern

gleicher Exponent - Exponent ausklammern

$a^n \cdot b^n = (ab)^n$

$\frac{a^n}{b^n} = (\frac{a}{b})^n$

$3^2 \cdot 5^2 = (3 \cdot 5)^2 = 15^2$
$x^2 \cdot y^2 = (x \cdot y)^2$

Potenz in der Potenz

Exponenten multiplizieren

$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

$(10^n)^m = 10^{n \cdot m}$

$(e^n)^m = e^{n \cdot m}$

$\left(2^3\right)^4 = 2^{3\cdot 4} = 2^{12}$
$\left(x^2\right)^3 = x^6$
$\left(x^2 \cdot 4\right)^2 = x^4 \cdot 4^2$
$(e^x)^2 = e^{2x}$

Potenzen mit negativem Exponenten

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

$10^{-n} = \frac{1}{10^n}$

$e^{-n} = \frac{1}{e^n}$

$2^{-1} = \frac{1}{2} \quad 3^{-2} = \frac{1}{3^2}$
$x^{-2} = \frac{1}{x^2} \quad x^{-3} \cdot y^{-2} = \frac{1}{x^3 y^2}$

Potenz - Wurzel

$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \qquad a > 0$
$10^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{10}$
$e^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{e}$

$2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \quad x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$
$5^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{5} \quad 4^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{4}}$

Potenz mit rationalem Exponenten

$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \qquad a > 0$
$10^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{10^m}$
$e^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{e^m}$

$2^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{2^3}$

Potenzen mit rationalem (negativ) Exponenten

$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} \qquad a > 0$
$10^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{10^m}}$
$e^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{e^m}}$

$2^{-\frac{3}{5}} = \frac{1}{\sqrt[5]{2^3}}$

Interaktive Inhalte:
hier klicken

1.1.16 Wurzeln

Wurzel - Potenz

$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$
n - Wurzelexponent a - Radikand
Quadratwurzel: $\sqrt{a}$
Kubikwurzel: $\sqrt[3]{a}$

$\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}} \quad \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$
$\sqrt[3]{5} = 5^{\frac{1}{3}} \quad \frac{1}{\sqrt{4}} = 4^{-\frac{1}{2}}$

Wurzeln multiplizieren

$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$
$a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} = (ab)^{\frac{1}{n}}$
gleiche Exponenten - Exponent ausklammern

$\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{2 \cdot 4} = \sqrt[3]{8} = 2$

Wurzeln dividieren

$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$
$\frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}$
gleiche Exponenten - Exponent ausklammern

$\sqrt[3]{54} : \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{\frac{54}{2}} = \sqrt[3]{27} = 3$

Wurzel in der Wurzel

$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}$
$(a^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{m \cdot n}}$

$\sqrt[2]{\sqrt[3]{5}} = \sqrt[6]{5}$

Nenner rational machen

Wurzel (irrationale Zahl) aus dem Nenner entfernen

- Erweitern des Bruchs mit der Wurzel

$$\frac{a}{b\sqrt{c}} = \frac{a\sqrt{c}}{b\sqrt{c}\sqrt{c}} = \frac{a\sqrt{c}}{b(\sqrt{c})^2} = \frac{a\sqrt{c}}{bc}$$

$$\frac{a}{b\sqrt{c+d}} = \frac{a\sqrt{c+d}}{b\sqrt{c+d}\sqrt{c+d}} = \frac{a\sqrt{c+d}}{b(\sqrt{c+d})^2} = \frac{a\sqrt{c+d}}{b(c+d)}$$

- Erweitern mit der 3. Binomischen Formel

$$\frac{a}{b+\sqrt{c}} = \frac{a(b-\sqrt{c})}{(b+\sqrt{c})(b-\sqrt{c})} = \frac{a(b-\sqrt{c})}{b^2-(\sqrt{c})^2} = \frac{a(b-\sqrt{c})}{b^2-c}$$

Erweitern des Bruchs mit der Wurzel

$$\frac{3}{5\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{6}}{5\sqrt{6}\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{6}}{5(\sqrt{6})^2} = \frac{3\sqrt{6}}{30}$$

$$\frac{3}{5\sqrt{x+2}} = \frac{3\sqrt{x+2}}{5\sqrt{x+2}\sqrt{x+2}} = \frac{3\sqrt{x+2}}{5(\sqrt{x+2})^2} = \frac{3\sqrt{x+2}}{5(x+2)}$$

Erweitern zur 3. Binomischen Formel

$$\frac{3}{5+\sqrt{2}} = \frac{3(5-\sqrt{2})}{(5+\sqrt{2})(5-\sqrt{2})} = \frac{3(5-\sqrt{2})}{5^2-(\sqrt{2})^2} = \frac{3(5-\sqrt{2})}{5^2-2} = \frac{15-3\sqrt{2}}{23}$$

$$\frac{3}{\sqrt{x}+\sqrt{2}} = \frac{3(\sqrt{x}-\sqrt{2})}{(\sqrt{x}+\sqrt{2})(\sqrt{x}-\sqrt{2})} = \frac{3(\sqrt{x}-\sqrt{2})}{(\sqrt{x})^2-(\sqrt{2})^2} = \frac{3(\sqrt{x}-\sqrt{2})}{x-2}$$

Interaktive Inhalte:
hier klicken

1.1.17 Logarithmen

Definition

$c = \log_b a \Leftrightarrow b^c = a$

b = Basis a = Numerus

Basis: 10

$log_{10}x = lgx$

$10^{lgx} = x$

$lg10^x = x$

Basis: e = 2,718.. (eulersche Zahl)

$log_e x = \ln x$

$e^{\ln x} = x$

$\ln e^x = x$

$3 = \log_2 8 \Leftrightarrow 2^3 = 8$
$log_e 3 = \ln 3$
$e^{\ln 3} = 3$
$\ln e^3 = 3$
$log_{10} 2 = lg2$
$10^{lg3} = 3$
$lg10^3 = 3$

Logarithmen addieren

$\log_c a + \log_c b = \log_c(a \cdot b)$

$\lg a + \lg b = \lg(a \cdot b)$

$\ln a + \ln b = \ln(a \cdot b)$

$log_2 4 + log_2 8 = log_2(4 \cdot 8) = log_2 32$
$log_3 x + log_3 y = log_3(x \cdot y)$

Logarithmen subtrahieren

$\log_c a - \log_c b = \log_c \frac{a}{b}$

$\lg a - \lg b = \lg \frac{a}{b}$

$\ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b}$

$\log_3 5 - \log_3 7 = \log_3 \frac{5}{7}$
$\ln 5 - \ln 7 = \ln \frac{5}{7}$

Logarithmus von der Potenz

$log_c a^n = n \log_c a$

$log_a a^n = n \log_a a = n$

$lg 10^n = n$

$ln e^n = n$

$log_3 5^2 = 2 \log_3 5$

Basisumrechnung von Logarithmen

$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b} = \frac{\lg a}{\lg b} = \frac{\ln a}{\ln b}$

$\log_5 3 = \frac{\log_2 3}{\log_2 5} = \frac{\lg 3}{\lg 5} = \frac{\ln 3}{\ln 5} = 0,68$

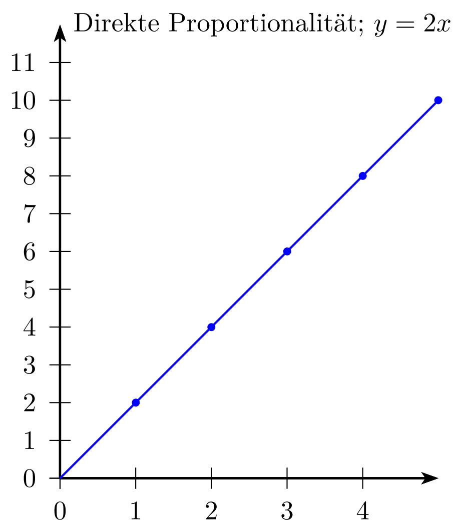
Logarithmus von der Wurzel

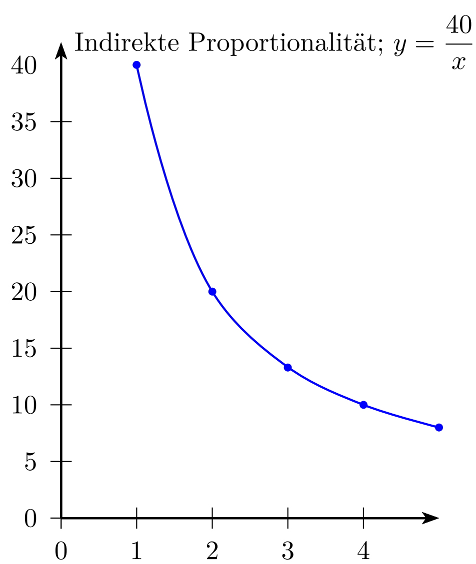
$\log_c \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \log_c a$

$\log_4 \sqrt[5]{3} = \frac{1}{5} \log_4 3$

Interaktive Inhalte:
hier klicken

1.1.18 Proportionalität





Direkte Proportionalität

y ist ein vielfaches von x

$y = m \cdot x$

Proportionalitätsfaktor: m

y ist direkt proportional zu x: $y \sim x$

Direkte Proportionalität = quotientengleich

Tabelle:

x_1	x_2	x_3	x_4	..
y_1	y_2	y_3	y_4	..

$m = \frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \frac{y_3}{x_3} = \frac{y_4}{x_4}..$

Funktionsgleichungen:

$y = m \cdot x \qquad x = \frac{y}{m} \qquad m = \frac{y}{x}$

Graph: Urspungsgerade

Ein Tafel Schokolade kostet 2 €.
Zwei Tafeln Schokolade kosten 4 €.
x= Anzahl der Tafeln
y= Preis der Tafeln
m= Preis einer Tafel
$y = 2 \cdot x$
Wieviel kosten 5 Tafeln ?
$y = 2 \cdot 5 = 10$
Wieviel Tafeln bekommt man für 12 € ?
$x = \frac{12}{2} = 6$
Tabelle:

Anzahl	1	2	3	4	5
Preis	2	4	6	8	10

Direkte Proportionalität = quotientengleich
$m = \frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{6}{3} = \frac{8}{4} = 2$
Funktionsgleichung:$y = 2 \cdot x$

Indirekte Proportionalität

y mal x ist konstant

$k = y \cdot x$

y ist indirekt proportional zu x: $y \sim \frac{1}{x}$

Indirekte Proportionalität = produktgleich

Tabelle:

x_1	x_2	x_3	x_4	..
y_1	y_2	y_3	y_4	..

$k = y_1 \cdot x_1 = y_2 \cdot x_2 = y_3 \cdot x_3 = y_4 \cdot x_4..$

Funktionsgleichungen:

$y = \frac{k}{x} \qquad x = \frac{k}{y} \qquad k = y \cdot x$

Graph: Hyperbel

10 Arbeiter benötigen 4 Tage
Wie lange brauchen 20 Arbeiter?
x= Arbeiter
y= Tage
k= Anzahl der Tage bei einem Arbeiter
$k = y \cdot x$
$k = 10 \cdot 4 = 40$
$y = \frac{40}{20} = 2$
Tabelle:

Arbeiter	1	2	3	4	5
Tage	40	20	$13\frac{1}{3}$	10	8

Indirekte Proportionalität = produktgleich
$k = 1 \cdot 4 = 2 \cdot 20 = 3 \cdot 13\frac{1}{3} = 4 \cdot 10 = 5 \cdot 8 = 40$
Funktionsgleichung:$y = \frac{40}{x}$

Dreisatz - Verhältnisgleichung

$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} \qquad \frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} \qquad y_1 : x_1 = y_2 : x_2$

$y_1 \cdot x_2 = x_1 \cdot y_2$

$y_1 = \frac{y_2 \cdot x_1}{x_2} \qquad y_2 = \frac{y_1 \cdot x_2}{x_1}$

$x_1 = \frac{x_2 \cdot y_1}{y_2} \qquad x_2 = \frac{x_1 \cdot y_2}{y_1}$

7 Tafeln Schokolade kosten 14 €.

Wieviel kosten 5 Tafeln ?
x= Anzahl der Tafeln
y= Preis der Tafeln

$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$

$\frac{14}{7} = \frac{y_2}{5}$

$y_2 = \frac{14 \cdot 5}{7} = 10$

1.1.19 Zahlensysteme

0_{10}	0_2	0_{16}	10_{10}	1010_2	A_{16}	20_{10}	10100_2	14_{16}	30_{10}	11110_2	$1E_{16}$	40_{10}	101000_2	28_{16}
1_{10}	1_2	1_{16}	11_{10}	1011_2	B_{16}	21_{10}	10101_2	15_{16}	31_{10}	11111_2	$1F_{16}$	41_{10}	101001_2	29_{16}
2_{10}	10_2	2_{16}	12_{10}	1100_2	C_{16}	22_{10}	10110_2	16_{16}	32_{10}	100000_2	20_{16}	42_{10}	101010_2	$2A_{16}$
3_{10}	11_2	3_{16}	13_{10}	1101_2	D_{16}	23_{10}	10111_2	17_{16}	33_{10}	100001_2	21_{16}	43_{10}	101011_2	$2B_{16}$
4_{10}	100_2	4_{16}	14_{10}	1110_2	E_{16}	24_{10}	11000_2	18_{16}	34_{10}	100010_2	22_{16}	44_{10}	101100_2	$2C_{16}$
5_{10}	101_2	5_{16}	15_{10}	1111_2	F_{16}	25_{10}	11001_2	19_{16}	35_{10}	100011_2	23_{16}	45_{10}	101101_2	$2D_{16}$
6_{10}	110_2	6_{16}	16_{10}	10000_2	10_{16}	26_{10}	11010_2	$1A_{16}$	36_{10}	100100_2	24_{16}	46_{10}	101110_2	$2E_{16}$
7_{10}	111_2	7_{16}	17_{10}	10001_2	11_{16}	27_{10}	11011_2	$1B_{16}$	37_{10}	100101_2	25_{16}	47_{10}	101111_2	$2F_{16}$
8_{10}	1000_2	8_{16}	18_{10}	10010_2	12_{16}	28_{10}	11100_2	$1C_{16}$	38_{10}	100110_2	26_{16}	48_{10}	110000_2	30_{16}
9_{10}	1001_2	9_{16}	19_{10}	10011_2	13_{16}	29_{10}	11101_2	$1D_{16}$	39_{10}	100111_2	27_{16}	49_{10}	110001_2	31_{16}

Zahl mit Basis B in Dezimalzahl

- Definition

$Z_B = \sum_{i=0}^{n} Z_i B^i = Z_n B^n + ... + Z_1 B^1 + Z_0 B^0$

Basis: B Ziffern:$Z_n, ..., Z_1, Z_0$

$Basis:$	..	B^3	B^2	B^1	B^0
$Ziffern:$	..	Z_3	Z_2	Z_1	Z_0

Ziffern:$0; 1; 2, 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; A = 10; B{=}11; C = 12;$
$D = 13; E = 14; F = 15$

- Dezimalsystem

Basis: 10 Ziffern:0,1,2,3,4,5,6,7,8,9

$Z_{10} = \sum_{i=0}^{n} Z_i 10^i = Z_n 10^n + ... + Z_1 10^1 + Z_0 10^0$

- Dualsystem (Binärsystem)

Basis: 2 Ziffern:0,1

$Z_2 = \sum_{i=0}^{n} Z_i 2^i = Z_n 2^n + ... + Z_1 2^1 + Z_0 2^0$

- Hexadezimalsystem

Basis: 16 Ziffern:0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,F

$Z_{16} = \sum_{i=0}^{n} z_i 16^i = Z_n 16^n + ... + Z_1 16^1 + Z_0 16^0$

$427 = 427_{10} =$

10^2	10^1	10^0
4	2	7

$4 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0 =$
$4 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 7 \cdot 1$

$110101011_2 =$

2^8	2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
1	1	0	1	0	1	0	1	1

$1 \cdot 2^8 + 1 \cdot 2^7 + 0 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 +$
$1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 =$
$1 \cdot 256 + 1 \cdot 128 + 0 \cdot 64 + 1 \cdot 32 + 0 \cdot 16 + 1 \cdot 8 +$
$0 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 427_{10}$

$1AB_{16} =$

16^2	16^1	16^0
1	$A = 10$	$B = 11$

$1 \cdot 16^2 + 10 \cdot 16^1 + 11 \cdot 16^0 =$
$1 \cdot 256 + 10 \cdot 16 + 11 \cdot 1 = 427_{10} = 427$

Dezimalzahl in Zahl mit Basis B

- Dezimalzahl durch die neue Basis teilen
- Ergebnis ist ein ganzzahliger Anteil und der Rest
- ganzzahligen Anteil wieder teilen
- usw.
- bis der ganzzahlige Anteil gleich Null ist
- die Ziffern der Reste von unten nach oben abschreiben

$427 = 427_{10}$
$427 : 2 = 213$ Rest:1
$213 : 2 = 106$ Rest:1
$106 : 2 = 53$ Rest:0
$53 : 2 = 26$ Rest:1
$26 : 2 = 13$ Rest:0
$13 : 2 = 6$ Rest:1
$6 : 2 = 3$ Rest:0
$3 : 2 = 1$ Rest:1
$1 : 2 = 0$ Rest:1
$427_{10} = 110101011_2$

$427 = 427_{10}$
$427 : 16 = 26$ Rest:$11 = B$
$26 : 16 = 1$ Rest:$10 = A$
$1 : 16 = 0$ Rest:1
$427_{10} = 1AB_{16}$

Interaktive Inhalte:
Zahlensysteme

1.1.20 Folgen und Reihen

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
Arithmetische Folge	3	7	11	15	19	23	...
Geometrische Folge	2	6	18	54	152	486	...

Arithmetische Folge

$a_1; a_2; a_3; a_4; ....a_n \quad n \in \mathbb{N}$

$a_1; a_1 + d; a_1 + 2d; \dots; a_1 + (n-1)d; \dots$

Differenz: $d = a_{n+1} - a_n$

explizite Darstellung: $a_n = a_1 + (n-1)d$

rekursive Darstellung: $a_{n+1} = a_n + d$

Summe:

$s_n = \sum_{k=1}^{n} (a_k) = a_1 + a_2 + a_3 + ...a_n$

$s_n = \sum_{k=1}^{n} (a_k) = \frac{n(a_1+a_n)}{2} = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)\cdot d)$

3; 7; 11; 15; 19; 23; 27..

$a_1 = 3 \qquad a_2 = 7 \qquad a_3 = 11 \qquad a_4 = 15 \qquad ...$

Differenz: $d = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3....$

$d = 7 - 3 = 11 - 7 = 15 - 11 = 4$

explizite Darstellung: $a_n = 3 + (n-1)\cdot 4$

$a_5 = 3 + (5-1)4 = 19$

rekursive Darstellung: $a_{n+1} = a_n + 4$

$a_1 = 3 \qquad a_2 = 3 + 4 = 7 \qquad a_3 = 7 + 4 = 11 \qquad ...$

Summe:

$s_4 = \sum_{k=1}^{4} (a_k) = 3 + 7 + 11 + 15 = 36$

$s_4 = \frac{4(3+15)}{2} = 36$

Geometrische Folge

$a_1; a_2; a_3; a_4; ....a_n \quad n \in \mathbb{N}$

$a_1; a_1q; a_1q^2; \dots; a_1q^{n-1};$

Quotient: $q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$

explizite Darstellung:$a_n = a_1 q^{n-1}$

rekursive Darstellung: $a_{n+1} = a_n \cdot q$

Summe:

$s_n = \sum_{k=1}^{n} (a_k) = a_1 + a_2 + a_3 + ...a_n$

$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_1 \cdot q^{k-1} = a_1 \frac{q^n-1}{q-1} = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}$

2; 6; 18; 54; 162; 486..

$a_1 = 2 \qquad a_2 = 6 \qquad a_3 = 18 \qquad a_4 = 54 \qquad ....$

Quotient: $q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2}....$

$q = \frac{6}{2} = \frac{18}{6} = 3$

explizite Darstellung: $a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$

$a_4 = 2 \cdot 3^{4-1} = 54$

rekursive Darstellung: $a_{n+1} = a_n \cdot 3$

$a_1 = 2 \qquad a_2 = 2 \cdot 3 = 6 \qquad a_3 = 6 \cdot 3 = 18 \qquad ...$

Summe:

$s_4 = \sum_{k=1}^{4} (a_k) = 2 + 6 + 18 + 54 = 80$

$s_4 = 2\frac{3^4-1}{3-1} = 80$

Fibonacci-Folge

$a_1 = 1; a_2 = 1$

Addition der beiden vorherigen Zahlen.

rekursive Darstellung:$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad n \geq 3$

explizite Darstellung:

$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$

1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; 21; 34; 55; 89; 144; ..

rekursive Darstellung:

$a_1 = 1; a_2 = 1$

$a_3 = 1 + 1 = 2 \quad a_4 = 1 + 2 = 3$

$a_5 = 2 + 3 = 5 \quad a_6 = 3 + 5 = 8$

..

explizite Darstellung:

$a_5 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^6 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^6\right) = 8$

Spezielle Folgen und Reihen

•Natürliche Zahlen: $1; 2; 3; 4; ..n$

Summe:

$s_n = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n}{2}(n+1)$

Geraden Zahlen: $a_n = 2; 4; 6; 8; ..2n$

$s_n = \sum_{i=1}^{n} 2i = n(n+1)$

•Ungeraden Zahlen: $1; 3; 5; 7; ..2n-1$

Summe:

$s_n = \sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2$

Addiert man die ersten n ungeraden Zahlen, so ist die Summe n^2 .

• Quadratzahlen: $1; 4; 9; 16; ..n^2$

Summe:

$s_n = \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1)$

• Kubikzahlen: $1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, ..n^3$

Summe:

$s_n = \sum_{i=1}^{n} i^3 = (\frac{n}{2}(n+1))^2 = \frac{n^2}{4}(n+1)^2$

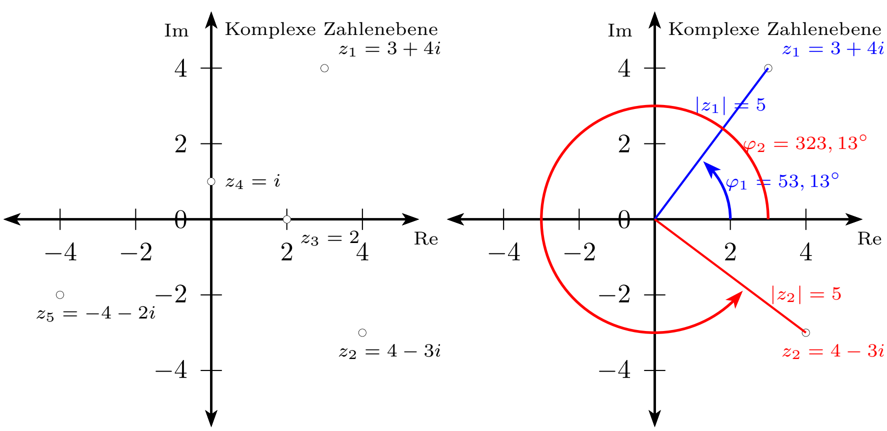
Die Summe der ersten 100 natürlichen Zahlen. $s_{100} = \sum_{i=1}^{100} i = \frac{100}{2}(100+1) = 5050$

Die Summe der ersten 6 ungeraden Zahlen. $s_6 = 1+3+5+7+9+11 = 36$

$s_6 = \sum_{i=1}^{6}(2i-1) = 6^2 = 36$

Addiert man die ersten 6 ungeraden Zahlen, so ist die Summe $6^2 = 36$.

1.1.21 Komplexe Zahlen



Imaginäre Einheit

Die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ sind eine Erweiterung der reelen Zahlen $\mathbb{R}$, um die imaginäre Einheit i (j). Die reelen Zahlen $\mathbb{R}$ sind eine echte Teilmenge der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$. $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

$i^2 = -1$

$i^{4n} = 1 \quad i^{4n+1} = i \quad i^{4n+2} = -1 \quad i^{4n+3} = -i$

$n \in \mathbb{Z}$

$i^3 = -i \quad i^4 = 1 \quad i^5 = i \quad i^6 = -1 \quad i^7 = -i$

Lösung von Gleichungen in $\mathbb{C}$

$x^2 + 1 = 0 \quad x \in \mathbb{R} \quad \mathbb{L} = \{\}$

$x^2 = -1 \quad x \in \mathbb{C} \quad \mathbb{L} = \{i\},$

$x = \sqrt{-1}$

$x^2 + 4 = 0$

$x^2 = -4$

$x = \sqrt{-4}$

$x = \sqrt{4}\sqrt{-1}$

$x = 2i$

$x^2 + 2x + 5 = 0$

$x_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1}$

$x_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2}$

$x_{1/2} = \frac{-2 \pm 4i}{2}$

$x_1 = \frac{-2+4i}{2} \quad x_2 = \frac{-2-4i}{2}$

$x_1 = -1+2i \quad x_2 = -1-2i$

Kartesische Form der komplexen Zahl

$z = x + iy$

$x = \operatorname{Re} z \qquad y = \operatorname{Im} z$

x Realteil

y Imaginärteil

$z_1 = 3 + 4i \quad x = Re(z_1) = 3 \quad y = Im(z_1) = 4$
$z_2 = 4 - 3i \quad x = Re(z_2) = 4 \quad y = Im(z_2) = -3$
$z_3 = 2 \quad x = Re(z_3) = 2 \quad y = Im(z_3) = 0$
$z_4 = i \quad x = Re(z_4) = 0 \quad y = Im(z_4) = 1$
$z_5 = -4 - 2i \quad x = Re(z_5) = -4 \quad y = Im(z_5) = -2$

Polarformen der komplexen Zahl

•Exponentialform

$z = re^{i\varphi}$

•Trigonometrische Form

$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

r Betrag von z

φ Argument,Winkel,Phase DEG/RAD

•Exponentialform
Gradmaß (DEG):$z_1 = 5e^{i53,13^\circ}$
Bogenmaß (RAD):$z_1 = 5e^{i0,93}$
•Trigonometrische Form
Gradmaß (DEG):$z_2 = 5(\cos 53,13^\circ + i\sin 53,13^\circ)$
Bogenmaß (RAD):$z_2 = 5(\cos 0,93 + i\sin 0,93)$

Konjugiert komplexe Zahl z^*

$z = x + iy \qquad z^* = \bar{z} = x - iy$

$z = re^{i\varphi} \qquad z^* = re^{-i\varphi}$

$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \qquad z^* = r(\cos\varphi - i\sin\varphi)$

$z_1 = 3 + 4i \quad z_1^* = 3 - 4i$
$z_1 = 5e^{i53,13^\circ} \quad z_1^* = 5e^{-i53,13^\circ}$
$z_1 = 5(\cos 53,13^\circ + i\sin 53,13^\circ)$
$z_1^* = 5(\cos 53,13^\circ - i\sin 53,13^\circ)$

Rechnungen in kartesischer Form

$z_1 = x_1 + iy_1 \quad z_2 = x_2 + iy_2$

•Addition

$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2)$

$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i\,(y_1 + y_2)$

•Subtraktion

$z_1 - z_2 = (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2)$

$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i\,(y_1 - y_2)$

•Multiplikation

$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)\,(x_2 + iy_2)$

$z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i\,(x_1y_2 + x_2y_1)$

•Division

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2}$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(x_1 + iy_1)\,(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)\,(x_2 - iy_2)}$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

•Multiplikation mit konjugiert Komplexen

$z_1{z_1}^* = (x_1 + iy_1)\,(x_1 - iy_1)$

$z_1{z_1}^* = x_1^2 + y_1^2$

$zz^* = |z|^2$

$z_1 = 2 + 3i \quad z_2 = 4 + 5i$
•Addition
$z_1 + z_2 = (2 + 3i) + (4 + 5i) = (2 + 4) + (3 + 5)\,i =$
$6 + 8i$
Subtraktion
$z_1 - z_2 = (2 + 3i) - (4 + 5i) = (2 - 4) + i\,(3 - 5)$
$= -2 - 2i$
Multiplikation
$z_1 \cdot z_2 = (2 + 3i)\,(4 + 5i) = (2 \cdot 4 - 3 \cdot 5) + (2 \cdot 5 + 4 \cdot 3)\,i$
$= -7 + 22i$
Division
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2 + 3i}{4 + 5i} = \frac{(2 + 3i)\,(4 - 5i)}{(4 + 5i)\,(4 - 5i)} =$$
$$\frac{2 \cdot 4 + 3 \cdot 5}{4^2 + 5^2} + \frac{4 \cdot 3 - 2 \cdot 5}{4^2 + 5^2}i = \frac{23}{41} - \frac{2}{41}i$$

Multiplikation mit konjugiert Komplexen
$z_1{z_1}^* = (2 + 3i)\,(2 - 3i)$
$z_1{z_1}^* = 2^2 + 3^2$
$zz^* = 13$

Rechnungen in Polarform

$z_1 = r_1 e^{i\varphi_1} \quad z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$

•Multiplikation

$z_1 \cdot z_2 = r_1 e^{i\varphi_1} \cdot r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$

•Division

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$

Potenz

$z^n = \left(re^{i\varphi}\right)^n = r^n e^{in\varphi}$

$z_1 = 5e^{i53,13^\circ} \quad z_2 = 5e^{i323,13^\circ}$

•Multiplikation

Beträge multiplizieren und Argumente addieren

$z_1 \cdot z_2 = 5 \cdot 5e^{i\left(53,13^\circ + 323,13^\circ\right)} = 25e^{i376,26^\circ} = 25e^{i16,26^\circ}$

•Division

Beträge dividieren und Argumente subtrahieren

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{5e^{i53,13^\circ}}{5e^{i323,13^\circ}} =$

$= e^{i\left(53,13^\circ - 323,13^\circ\right)} = e^{-i270^\circ} = e^{i90^\circ}$

Kartesische Form in Polarform

$z = x + iy \quad \text{in} \quad z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}$

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\varphi' = \arctan(\left|\frac{y}{x}\right|)$

	y	x
I. Quadrant	+	+
II. Quadrant	+	-
III. Quadrant	-	-
IV. Quadrant	-	+

	DEG	RAD
I. Quadrant	$\varphi = \varphi'$	$\varphi = \varphi'$
II. Quadrant	$\varphi = 180^\circ - \varphi'$	$\varphi = \pi - \varphi'$
III. Quadrant	$\varphi = 180^\circ + \varphi'$	$\varphi = \pi + \varphi'$
IV. Quadrant	$\varphi = 360^\circ - \varphi'$	$\varphi = 2\pi - \varphi'$

$z_1 = 3 + 4i$

$r = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

$\varphi' = \arctan\left(\left|\frac{4}{3}\right|\right)$

$\varphi' = 53,13^\circ$

$y = 4 > 0 \land x = 3 > 0 \Rightarrow$ I. Quadrant

$\varphi = 53,13^\circ$

$z_1 = 5e^{i53,13^\circ}$

$z_1 = 5(\cos 53,13^\circ + i\sin 53,13^\circ)$

$z_2 = 4 - 3i$

$r = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$

$\varphi = \arctan\left(\left|\frac{-3}{4}\right|\right)$

$\varphi' = 36,87^\circ$

Je nach Vorzeichen von x und y den Quadranten wählen.

$y = -3 < 0 \land x = 4 > 0 \Rightarrow$ IV. Quadrant

Den Winkel in den Quadranten umrechnen.

$\varphi = 360^\circ - 36,87^\circ = 323,13^\circ$

$z_2 = 5e^{i323,13^\circ}$

Polarform in kartesische Form

$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi} \quad \text{in} \quad z = x + iy$

$x = r\cos\varphi \quad y = r\sin\varphi$

$z_1 = 5e^{i53,13^\circ}$

$x = 5\cos 53,13^\circ = 3$

$y = 5\sin 53,13^\circ = 4$

$z_1 = 3 + 4i$

Interaktive Inhalte:

Rechungen:$z = x + iy$ | Rechungen:$z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$ | Polarform in Kartesische Form | Kartesische Form in Polarform

1.2 Terme

1.2.1 Grundlagen

Definition

Terme sind sinnvolle Verknüpfungen (+,-,·,/) von Koeffizienten (Zahlen) und Variablen (Buchstaben: x,y,z,a..).
Eine Variable ist ein Platzhalter für eine Zahl.
Physikalische und geometrische Formeln sind Terme.
Terme können mit Hilfe des Kommutativgesetzes, Assoziativgesetzes und Distributivgesetzes umgeformt werden.

- konstanter Term: 2
- linearer Term: $5x$
- quadratischer Term: $6x^2$
- weitere Terme:

$3 \cdot x - 4$	$2yx - 4y$
$3a - 2b$	$3zx - 2xu$
$x^2 - 3x^2 - x^2$	$yx^2 - 3zx^2 - ux^2$
$5x^2y - 7x^2$	$5e^2y - 2e^3$
$V = l \cdot b \cdot h$	$\rho = \frac{m}{V}$

- keine Terme:

$4 + *4 \qquad /4, -@$

Schreibweisen

• Man darf das Malzeichen vor der Variable und vor der Klammer weglassen.
$a \cdot x = ax$
$a \cdot (x + b) = a(x + b)$
• Den Faktor 1 vor einer Variable kann man weglassen.
$1 \cdot x = 1x = x$
• Zahlen schreibt man vor die Variable
$x \cdot a = ax$

$3 \cdot x = 3x$
$2 \cdot y \cdot 3 = 6y$
$a \cdot x = ax$
$3 \cdot (x - 2) = 3(x - 2)$
$x \cdot y \cdot 5 = 5xy$

Termwert - Termname

Jedem Term kann man einen Namen zuweisen. In Klammern kann man die Variablen des Terms angeben.
Name(Variable 1, Variable 2...)=Term
Ersetzt man die Variablen eines Terms durch Zahlen, berechnet man den Wert des Terms.

Umfang des Rechtecks:
$U(a; b) = 2a + 2b$ oder $U = 2a + 2b$
Name des Terms: U Variable: a,b Term:2a+2b
Berechnen der Termwerts:$a = 5 \quad b = 6$
$U(5; 6) = 2 \cdot 5 + 2 \cdot 6$ oder $U = 2 \cdot 5 + 2 \cdot 6$
$U(5; 6) = 22$ oder $U = 22$
Termwert: 22
Linearer Term (Funktion)
$f(x) = 2x + 3$ oder $f : y = 2x + 3$
Name des Terms: f Variable: x Term: 2x+3
Berechnen der Termwerts:$x = 5$
$f(5) = 2 \cdot 5 + 3$ oder $y = 2 \cdot 5 + 3$
$f(5) = 13$ oder $y = 13$
Termwert:13

1.2.2 Umformung von Termen

Addieren und Subtrahieren von Termen

Zwei Terme sind gleichartig, wenn sie aus den gleichen Variablen (Klammerausdrücke) mit den jeweiligen gleichen Exponenten bestehen. Gleichartige Terme kann man durch addieren (subtrahieren) der Koeffizienten zusammenfassen:

Gleichartige Terme $2x$ und $3x$
$2x + 3x = 5x$
Gleichartige Terme $-2x$ und $-3x$
Gleichartige Terme $6y$ und $-5y$
$-2x + 6y - 5y - 3x = -5x + y$
$x^3 + 4x^3 = 5x^3$
$2x^2 + 3x^2 = 5x^2$
$5x^2y + 7x^2y = 12x^2y$
$2xy + 3xy + 4z + 5z = 5xy + 9z$
$3e^x - 2e^x = e^x$
$(x^2 - 5x - 27) - (x + 3) =$
$x^2 - 5x - 27 - x - 3 = x^2 - 6x - 30$
Nicht gleichartige Terme kann man nicht zusammenfassen.
$2x + 3y + 3 =$
$2x^2 + 3x + 2 =$
$x^3 + 5x^4 =$
$3e^{2x} - 2e^x =$

Multiplizieren und Dividieren von Termen

Die Zahlen multiplizieren (dividieren) und gleiche Variablen zusammenfassen (Potenzgesetze).

$2x \cdot 3x = 6x^2$
$2x \cdot 3x^2 = 2 \cdot 3 \cdot x \cdot x^2 = 6 \cdot x^3$
$6x \cdot x^2 = 6 \cdot x^3$
$\frac{9x}{3x} = 3$

$\frac{12x}{3x^2} = \frac{4}{x}$

Addieren und Subtrahieren von Summentermen

- Vorzeichen vor Summenterm

$+(a + b) = a + b \qquad +(a - b) = a - b$
$-(a + b) = -a - b \qquad -(a - b) = -a + b$

- Summenterm und Summenterm

$(a + b) + (c + d) = a + b + c + d$
$(a + b) - (c + d) = a + b - c - d$
$(a - b) - (c - d) = a - b - c + d$

$(2x + 1) + (x + 3) = 2x + 1 + x + 3 = 3x + 4$
$(2x + 1) + (x - 3) = 2x + 1 + x - 3 = 3x - 2$
$(2x + 1) - (x + 3) = 2x + 1 - x - 3 = x - 2$
$-(2x + 1) + (x + 3) = -2x - 1 + x + 3 = -x + 2$

Multiplizieren von Summentermen - Ausmultiplizieren

Ein Produkt in eine Summe(Differenz) umwandeln.

Jedes Glied mit jedem multiplizieren.

• Faktor mal Summenterm

$c \cdot (a+b) = (a+b) \cdot c = ac + bc$

• Summenterm mal Summenterm

$(a+b) \cdot (c+d) = ac + ad + bc + bd$

$(a+b) \cdot (c+d+e) = ac + ad + ae + bc + bd + be$

• 3 Faktoren

$c \cdot (a+b) \cdot (d+e) = (ac+bc) \cdot (d+e) =$

$acd + ace + bcd + bce$

$(a+b) \cdot (c+d) \cdot (e+f) = (ac+ad+bc+bd) \cdot (e+f) =$

$ace + acf + ade + adf + bce + bcf + bde + bdf$

$(2x+1) \cdot (x-3) =$
$2x \cdot x + 2x \cdot (-3) + 1 \cdot x + 1 \cdot (-3) =$
$2x^2 + (-6x) + x + (-3) = 2x^2 - 5x - 3$
$(x^2 - 5x - 27) \cdot (x+3) =$
$x^2 \cdot x + x^2 \cdot 3 + (-5x) \cdot x + (-5x) \cdot 3 + (-27) \cdot x + (-27) \cdot 3 =$
$x^3 + 3x^2 + (-5x^2) + (-15x) + (-27x) + (-81) =$
$x^3 - 2x^2 - 42x - 81$
$(x+2) \cdot (x-3) \cdot (x-5) =$
$(x^2 - x - 6) \cdot (x-5) =$
$x^3 - 6x^2 - x + 30$

Interaktive Inhalte:
hier klicken

1.2.3 Binomische Formel

1. Binomische Formel

$(a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$

$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + a \cdot b + a \cdot b + b^2$

$(-a-b)^2 = (-1)^2(a+b)^2 = (a+b)^2$

$(x+5)^2 = x^2 + 10 \cdot x + 25$
$(x+9)^2 = x^2 + 18 \cdot x + 81$
$(-x-9)^2 = x^2 + 18 \cdot x + 81$
$(2 \cdot x + 5)^2 = 4 \cdot x^2 + 20 \cdot x + 25$
$(6 \cdot x + 5)^2 = 36 \cdot x^2 + 60 \cdot x + 25$
$(x+y)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot y + y^2$
$(x \cdot z + y)^2 = x^2 \cdot z^2 + 2 \cdot x \cdot z \cdot y + y^2$

2. Binomische Formel

$(a-b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2$

$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - a \cdot b - a \cdot b + b^2$

$(-a+b)^2 = (-1)^2(a-b)^2 = (a-b)^2$

$(x-5)^2 = x^2 - 10 \cdot x + 25$
$(x-9)^2 = x^2 - 18 \cdot x + 81$
$(-x+9)^2 = x^2 - 18 \cdot x + 81$
$(2 \cdot x - 5)^2 = 4 \cdot x^2 - 20 \cdot x + 25$
$(6 \cdot x - 5)^2 = 36 \cdot x^2 - 60 \cdot x + 25$
$(x-y)^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot y + y^2$
$(x \cdot z - y)^2 = x^2 \cdot z^2 - 2 \cdot x \cdot z \cdot y + y^2$

3. Binomische Formel

$(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2$

$(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - a \cdot b + a \cdot b - b^2 = a^2 - b^2$

$(x+5) \cdot (x-5) = x^2 - 25$
$(x+9) \cdot (x-9) = x^2 - 81$
$(3 \cdot x + 5) \cdot (3 \cdot x - 5) = 9 \cdot x^2 - 25$
$(7 \cdot x + 9) \cdot (7 \cdot x - 9) = 49 \cdot x^2 - 81$
$(x+y) \cdot (x-y) = x^2 - y^2$

Binomische Formel in der 3. Potenz

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(1x+2)^3 = 1^3x^3 + 3 \cdot 1^2 \cdot x^2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 \cdot x \cdot 2^2 + 2^3$
$(x+2)^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$

$(2x + (-3))^3 =$
$2^3x^3 + 3 \cdot 2^2 \cdot x^2 \cdot (-3) + 3 \cdot 2 \cdot x \cdot (-3)^2 + (-3)^3$
$(2x-3)^3 = 8x^3 - 36x^2 + 54x - 27$

Binomische Formel in der 4. Potenz

$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

$(1x+2)^4 =$
$1^4x^4 + 4\cdot 1^3 \cdot x^3 \cdot 2 + 6\cdot 1^2 \cdot x^2 \cdot 2^2 + 4\cdot 1 \cdot x \cdot 2^3 + 2^4$
$(x+2)^3 = x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x + 16$

$(-2x+(-3))^4 =$
$(-2)^4 x^4 + 4\cdot(-2)^3 \cdot x^3 \cdot (-3) + 6\cdot(-2)^2 \cdot x^2 \cdot (-3)^2 +$
$4\cdot(-2)\cdot x \cdot (-3)^3 + (-3)^4$
$(-2x-3)^3 = 16x^4 + 96x^3 + 216x^2 + 216x + 81$

Binomische Formel mit höheren Potenzen

$(a+b)^n = k_o a^n b^0 + k_1 a^{n-1} b^1 + k_2 a^{n-2} b^2 + \ldots + k_n a^0 b^n$
Die Summe der Exponenten ist n.
n+0=n n-1+1=n n-2+2=n ...
Koeffizienten(k_0, k_1..) übers Pascal'sche Dreieck

$(a+b)^0$						1					
$(a+b)^1$					1		1				
$(a+b)^2$				1		2		1			
$(a+b)^3$			1		3		3		1		
$(a+b)^4$		1		4		6		4		1	
$(a+b)^5$	1		5		10		10		5		1

..
oder über den binomischen Satz:
$(a+b)^n =$

$$\binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \ldots + \binom{n}{n} a^0 b^n$$

Binomialkoeffizient
$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ n über k

$(a+b)^1 = \binom{1}{0} a^1 + \binom{1}{1} b^1 = 1a + 1b$

$(a+b)^2 = \binom{2}{0} a^2 + \binom{2}{1} a^{2-1} b^1 + \binom{2}{2} a^{2-2} b^2$
$n=2 \quad k_0 = 1 \quad k_1 = 2 \quad k_2 = 1$
$(a+b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$

$n=3 \quad k_0 = 1 \quad k_1 = 3 \quad k_2 = 3 \quad k_2 = 1$
$(a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$

$n=4 \quad k_0 = 1 \quad k_1 = 4 \quad k_2 = 6 \quad k_3 = 4 \quad k_4 = 1$
$(a+b)^4 = 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4$

Interaktive Inhalte:
$(a+b)^2$ | $(a-b)^2$ | $(a+b)\cdot(a-b)$ | $(ax+b)^3$ | $(ax+b)^4$

1.2.4 Faktorisieren - Ausklammern

Eine Summe(Differenz) in ein Produkt umwandeln.
- Ausklammern eines Faktors

$ac + bc = c\cdot(a+b)$
- Doppeltes Ausklammern

$ac + ad + bc + bd = a\cdot(c+d) + b(c+d) =$
$(a+b)\cdot(c+d)$
- Binomische Formeln

$a^2 + 2\cdot a\cdot b + b^2 = (a+b)^2$
$a^2 - 2\cdot a\cdot b + b^2 = (a-b)^2$
$a^2 - b^2 = (a+b)\cdot(a-b)$

$2x^2 + 6x = 2x(x+3)$
Binomische Formeln
$x^2 + 10x + 25 = (x+5)^2$
$x^2 - 18x + 81 = (x-9)^2$
$4x^2 + 20x + 25 = (2x+5)^2$
$36\cdot x^2 - 60x + 25 = (6x-5)^2$
$x^2 - 25 = (x+5)(x-5)$

1.2.5 Quadratische Ergänzung

Maximalen oder minimalen Termwert bestimmen.

$T(x) = ax^2 + bx + c$
$T(x) = a(x^2 + \frac{b}{a}x) + c$
$T(x) = a(x^2 + \frac{b}{a}x + (\frac{b}{2a})^2 - (\frac{b}{2a})^2) + c$
$T(x) = a[(x + \frac{b}{2a})^2 - (\frac{b}{2a})^2] + c$
$T(x) = a(x + \frac{b}{2a})^2 - a \cdot \frac{b^2}{4a^2} + c$
$T(x) = a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a} + c$

oder

$T(x) = ax^2 + bx + c$
$T(x) = a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a})$
$T(x) = a(x^2 + \frac{b}{a}x + (\frac{b}{2a})^2 - (\frac{b}{2a})^2 + \frac{c}{a})$
$T(x) = a[(x + \frac{b}{2a})^2 - (\frac{b}{2a})^2 + \frac{c}{a}]$
$T(x) = a(x + \frac{b}{2a})^2 - a \cdot \frac{b^2}{4a^2} + a \cdot \frac{c}{a}$
$T(x) = a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a} + c$

$a < 0$

Maximaler Termwert $= -\frac{b^2}{4 \cdot a} + c$ für x$= -\frac{b}{2 \cdot a}$

$a > 0$

Minimaler Termwert $= -\frac{b^2}{4 \cdot a} + c$ für x$= -\frac{b}{2 \cdot a}$

$y = x^2 - 6x + 2$
$y = x^2 - 6x + 3^2 - 3^2 + 2$
$y = (x - 3)^2 - 3^2 + 2$
$y = (x - 3)^2 - 9 + 2$
$y = (x - 3)^2 - 7$
Minimaler Termwert $= -7$ für x $= 3$
$y = 2x^2 + 8x + 2$
$y = 2(x^2 + 4x + 1)$
$y = 2(x^2 + 4x + 2^2 - 2^2 + 1)$
$y = 2[(x + 2)^2 - 2^2 + 1]$
$y = 2[(x + 2)^2 - 4 + 1]$
$y = 2[(x + 2)^2 - 3]$
$y = 2(x + 2)^2 - 6$
Minimaler Termwert $= -6$ für x $= -2$
$y = -4x^2 + 8x + 4$
$y = -4(x^2 - 2x) + 4$
$y = -4(x^2 - 2x + 1^2 - 1^2) + 4$
$y = -4[(x - 1)^2 - 1^2] + 4$
$y = -4[(x - 1)^2 - 1] + 4$
$y = -4(x - 1)^2 + 4 + 4$
$y = -4(x - 1)^2 + 8$
Maximaler Termwert $= 8$ für x $= 1$

1.2.6 Bruchterme

Definition und Definitionsbereich

Bei einem Bruchterm ist im Nenner eine Variable.

$\frac{Z(x)}{N(x)}$

Die Nullstellen des Nenners müssen aus dem Definitionsbereich ausgeschlossen werden.

Nullstellen des Nenners bestimmen: $N(x) = 0$

Nullstellen aus dem Definitionsbereich ausschließen:

$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{x_1, x_2....\}$

$\frac{2}{x} \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\frac{2}{x-3} \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{3\}$

$\frac{2x+3}{x(x-3)} \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0; 3\}$

$\frac{3}{x^2-9} \qquad x^2 - 9 = 0 \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-3; 3\}$

Erweitern von Bruchtermen

Zähler und Nenner mit dem gleichen Term multiplizieren.

$\frac{a(x)}{b(x)} = \frac{a(x) \cdot c(x)}{b(x) \cdot c(x)}$

$\frac{x+3}{x-4} = \frac{(x+3) \cdot 2x}{(x-4) \cdot 2x} = \frac{2x^2+6x}{2x^2-8x}$

Kürzen von Bruchtermen

Zähler und Nenner faktorisieren - gleiche Faktoren kürzen.

$\frac{a(x)}{b(x)} = \frac{a(x) : c(x)}{b(x) : c(x)}$

$\frac{12x^2+4}{4x^2-2x} = \frac{4x(3x+1)}{2x(2x-1)} = \frac{2(3x+1)}{2x-1}$

Addition und Subtraktion gleichnamiger Bruchterme

Zähler addieren bzw. subtrahieren.

$$\frac{a(x)}{c(x)} + \frac{b(x)}{c(x)} = \frac{a(x)+b(x)}{c(x)}$$

$$\frac{a(x)}{c(x)} - \frac{b(x)}{c(x)} = \frac{a(x)-b(x)}{c(x)}$$

$$\frac{2}{3x} + \frac{4}{3x} = \frac{2+4}{3x} = \frac{6}{3x} = \frac{2}{x}$$

$$\frac{5x}{7x-2} - \frac{3}{7x-2} = \frac{5x-3}{7x-2}$$

Addition und Subtraktion ungleichnamiger Bruchterme

Brüche durch Erweitern gleichnamig machen.

$$\frac{a(x)}{b(x)} + \frac{c(x)}{d(x)} = \frac{a(x)\cdot d(x)}{b(x)\cdot d(x)} + \frac{c(x)\cdot b(x)}{b(x)\cdot d(x)} = \frac{a(x)\cdot d(x)+c(x)\cdot b(x)}{b(x)\cdot d(x)}$$

$$\frac{a(x)}{b(x)} - \frac{c(x)}{d(x)} = \frac{a(x)\cdot d(x)}{b(x)\cdot d(x)} - \frac{c(x)\cdot b(x)}{b(x)\cdot d(x)} = \frac{a(x)-b(x)}{b(x)\cdot d(x)}$$

$$\frac{2}{5x} + \frac{3}{x+4} = \frac{2\cdot(x+4)}{5x(x+4)} + \frac{3\cdot 5x}{5x(x+4)} = \frac{2\cdot(x+4)+3\cdot 5x}{5x(x+4)}$$

$$= \frac{2x+8+15x}{5x(x+4)} = \frac{17x+8}{5x(x+4)}$$

Multiplikation von Bruchtermen

Zähler mal Zähler und Nenner mal Nenner.

$$\frac{a(x)}{b(x)} \cdot \frac{c(x)}{d(x)} = \frac{a(x)\cdot c(x)}{b(x)\cdot d(x)}$$

$$\frac{3x}{x+4} \cdot \frac{5}{6x} = \frac{3x\cdot 5}{(x+4)\cdot 6x} = \frac{15x}{6x\cdot(x+4)}$$

Division von Bruchtermen

Mit dem Kehrwert des Bruchterms multiplizieren.

Bruchterm durch Bruchterm:

$$\frac{a(x)}{b(x)} : \frac{c(x)}{d(x)} = \frac{a(x)}{b(x)} \cdot \frac{d(x)}{c(x)} = \frac{a(x)\cdot d(x)}{b(x)\cdot c(x)}$$

Bruch durch Term

$$\frac{\frac{a(x)}{b(x)}}{e(x)} = \frac{a(x)}{b(x)} : e(x) = \frac{a(x)}{b(x)} \cdot \frac{1}{e(x)} = \frac{a(x)}{b(x)\cdot e(x)}$$

Term durch Bruchterm:

$$\frac{e(x)}{\frac{c(x)}{d(x)}} = e(x) : \frac{c(x)}{d(x)} = \frac{e(x)}{1} \cdot \frac{d(x)}{c(x)} = \frac{e(x)\cdot d(x)}{c(x)}$$

Doppelbruch:

$$\frac{\frac{a(x)}{b(x)}}{\frac{c(x)}{d(x)}} = \frac{a(x)}{b(x)} : \frac{c(x)}{d(x)} = \frac{a(x)}{b(x)} \cdot \frac{d(x)}{c(x)} = \frac{a(x)\cdot d(x)}{b(x)\cdot c(x)}$$

$$\frac{3}{4x} : \frac{5}{6x} = \frac{3}{4x} \cdot \frac{6x}{5} = \frac{3\cdot 6x}{4x\cdot 5} = \frac{18x}{20x} = \frac{9}{10}$$

$$4x : \frac{5}{6x} = 4x \cdot \frac{6x}{5} = \frac{4x\cdot 6x}{5} = \frac{24x^2}{5}$$

$$\frac{3}{4x} : 5x = \frac{3}{4x} \cdot \frac{1}{5x} = \frac{3}{4x\cdot 5x} = \frac{3}{20x^2}$$

$$\frac{\frac{3}{4x}}{\frac{5}{6x}} = \frac{3}{4x} : \frac{5}{6x} == \frac{3}{4x} \cdot \frac{6x}{5} = \frac{3\cdot 6x}{4x\cdot 5} = \frac{18x}{20x} = \frac{9}{10}$$

1.2.7 Polynomdivision

Die Polynomdivision funktioniert ähnlinch wie die schriftliche Division.

- Voraussetzung: Zählergrad $\geqq$ Nennergrad
- höchste Potenz des Zählers durch die höchste Potenz des Nenners teilen
- Nenner mit dem Ergebnis multiplizieren und abziehen
- höchste Potenz des Restpolynom durch die höchste Potenz des Nenners teilen

usw.

- Wiederholen bis Zählergrad < Nennergrad

$$\frac{3x^3 - 10x^2 + 7x - 12}{x-3}$$

- höchste Potenz des Zählers durch die höchste Potenz des Nenners teilen

$\frac{3x^3}{x} = 3x^2$

$(3x^3 \quad -10x^2 \quad +7x \quad -12 \quad) : (x-3) = 3x^2$

- Nenner mit dem Ergebnis multiplizieren und abziehen

$(x-3)3x^2 = 3x^3 - 9x^2$

$$\begin{array}{lllll}
(3x^3 & -10x^2 & +7x & -12 &) : (x-3) = 3x^2 \\
-(3x^3 & -9x^2) & & & \\
\hline
 & -x^2 & +7x & -12 &
\end{array}$$

- höchste Potenz des Restpolynom durch die höchste Potenz des Nenners teilen

$\frac{-x^2}{x} = -x$

usw...

$$\begin{array}{lllll}
(3x^3 & -10x^2 & +7x & -12 &) : (x-3) = 3x^2 - x + 4 \\
-(3x^3 & -9x^2) & & & \\
\hline
 & -x^2 & +7x & -12 & \\
 & -(-x^2 & +3x) & & \\
\hline
 & & 4x & -12 & \\
 & & -(4x & -12) & \\
\hline
 & & & 0 &
\end{array}$$

- Polynomdivision mit Rest

$$\begin{array}{llll}
(x^2 & -5x & -27 &) : (x+3) = x - 8 + \frac{-3}{x+3} \\
-(x^2 & +3x) & & \\
\hline
 & -8x & -27 & \\
 & -(-8x & -24) & \\
\hline
 & & -3 &
\end{array}$$

- Polynomdivision mit fehlenden Potenzen beim Zähler

$$\begin{array}{lllll}
(x^3 & & & +8 &) : (x-2) = x^2 + 2x + 4 \\
-(x^3 & -2x^2) & & & \\
\hline
 & 2x^2 & & +8 & \\
 & -(2x^2 & -4x) & & \\
\hline
 & & 4x & +8 & \\
 & & -(4x & -8) & \\
\hline
 & & & 16 &
\end{array}$$

Interaktive Inhalte:
hier klicken

1.3 Gleichungen

1.3.1 Grundlagen

Definition

Termwert der linken Seite $T_1(x)$ ist gleich dem Termwert der rechten Seite $T_2(x)$.

$$T_1(x) = T_2(x)$$

$T_1(x) = 2 \cdot (x+3) \qquad T_2(x) = 5x$
$T_1(x) = T_2(x)$
$2 \cdot (x+3) = 5x$
$2x + 6 = 5x$
$x = 2$

Grundmenge $\mathbb{G}$ - Definitionsmenge $\mathbb{D}$ - Lösungsmenge $\mathbb{L}$

• Die Grundmenge $\mathbb{G}$ ist die Zahlenmenge, die man für die Variable einsetzen möchte.
• Die Definitionsmenge $\mathbb{D}$ ist die Zahlenmenge, die man für die Variable einsetzen kann. Aus der Grundmenge werden jene Elemente ausgeschlossen, für die die Gleichung nicht definiert ist.
Bei Gleichungen mit
- Brüchen, muss der Nenner ungleich Null sein.
- Wurzeln, muss der Radikand größer gleich Null sein.
- Logarithmen, muss der Numerus größer als Null sein.
• Die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ sind die Zahlen, die beim Einsetzen in die Gleichung eine wahre Aussage ergeben und in der Definitionsmenge enthalten sind.
• Gibt es keine Lösung der Gleichung oder ist die Lösung nicht in der Definitionsmenge enthalten, so ist die Lösungsmenge die leere Menge $\mathbb{L} = \{\}$.

$-5 \cdot x - 4 = 6 \qquad x = -2$
$-5 \cdot (-2) - 4 = 6$
$6 = 6$ wahre Aussage
$\mathbb{G} = \mathbb{N} \qquad \mathbb{D} = \mathbb{N} \qquad -2 \notin \mathbb{D} \qquad \mathbb{L} = \{\}$
$\mathbb{G} = \mathbb{Q} \qquad \mathbb{D} = \mathbb{Q} \qquad -2 \in \mathbb{D} \qquad \mathbb{L} = \{-2\}$
$\mathbb{G} = \mathbb{R} \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R} \qquad -2 \in \mathbb{D} \qquad \mathbb{L} = \{-2\}$

$\frac{2}{x+4} = \frac{3}{x-1} \qquad x = -14$
$\frac{2}{-14+4} = \frac{3}{-14-1}$
$\frac{1}{-5} = \frac{1}{-5}$ wahre Aussage
Die Nullstellen des Nenners müssen aus dem Definitionsbereich ausgeschlossen werden.
$x - 1 = 0 \qquad x = 1$
$x + 4 = 0 \qquad x = -4$
$\mathbb{G} = \mathbb{R} \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-4; 1\} \qquad -14 \in \mathbb{D} \qquad \mathbb{L} = \{-14\}$

$\sqrt{x-7} = 4 \qquad x = 23$
$\sqrt{23-7} = 4$
4=4 wahre Aussage
Der Radikand muss größer gleich Null sein.
$x - 7 \geq 0 \qquad x \geq 7$
$\mathbb{G} = \mathbb{R} \qquad \mathbb{D} = [7; \infty[\qquad 23 \in \mathbb{D} \qquad \mathbb{L} = \{23\}$

$\log_2(-x+2) = 3 \qquad x = -6$
$log_2(-(-6)+2) = 3$
$3 = 3$ (wahre Aussage)
Der Numerus muss größer als Null sein.
$-x + 2 > 0 \qquad x < -2$
$\mathbb{G} = \mathbb{R} \qquad \mathbb{D} =]-\infty; -2[\qquad -6 \in \mathbb{D} \qquad \mathbb{L} = \{-6\}$

Äquivalenzumformung

Durch eine Äquivalenzumformung ändert sich die Lösungsmenge einer Gleichung nicht.
Äquivalenzumformungen von Gleichungen:

- Vertauschen der beiden Seiten
- Addition des gleichen Terms (Zahl) auf beiden Seiten
- Subtraktion des gleichen Terms auf beiden Seiten
- Multiplikation mit dem gleichen Term (ungleich Null) auf beiden Seiten
- Division mit dem gleichen Term (ungleich Null) auf beiden Seiten

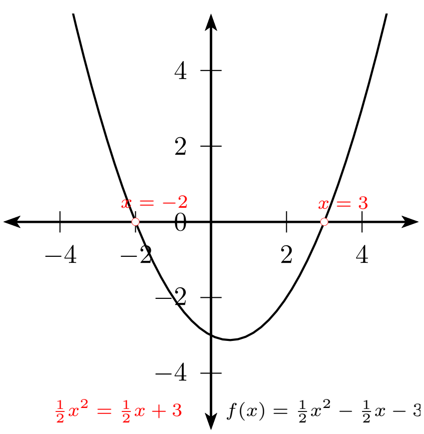
Quadrieren (Potenzieren mit einem geraden Exponenten) ist keine Äquivalenzumformung. Der berechnete Wert, muss durch das Einsetzen in die Ursprungsgleichung überprüft werden.

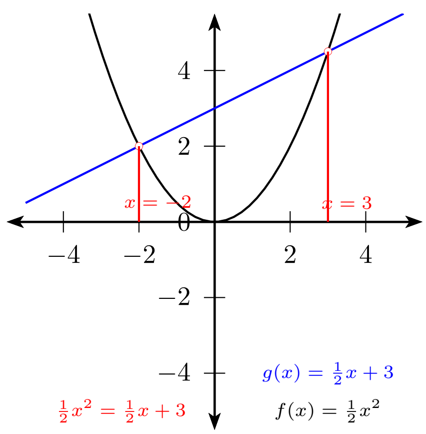
Vertauschen der beiden Seiten
$x - 2 = 8 \qquad 8 = x - 2$
Addition des gleichen Terms auf beiden Seiten
$x - 2 = 8 \qquad / + 2$
$x - 2 + 2 = 8 + 2$
$x = 10$
Subtraktion des gleichen Terms auf beiden Seiten
$3x - 2 = 2x + 3 \qquad / - 2x$
$3x - 2x - 2 = 2x - 2x + 3$
$x - 2 = 3$
Multiplikation mit dem gleichen Term auf beiden Seiten
$\frac{2}{x-3} = 5 \qquad / \cdot (x - 3)$
$\frac{2 \cdot (x-3)}{x-3} = 5 \cdot (x - 3)$
$2 = 5(x - 3)$
Division durch den gleichen Term auf beiden Seiten
$4x = 8 \qquad / : 4$
$\frac{4x}{4} = \frac{8}{4}$
$x = 2$

Quadrieren

$\sqrt{x} = -4 \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R}_0^+$	$\sqrt{x} = 4 \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R}_0^+$
$\sqrt{x}^2 = (-4)^2$	$\sqrt{x}^2 = 4^2$
$x = 16$	$x = 16$
$\sqrt{x} = -4$	$\sqrt{x} = 4$
$\sqrt{16} \neq -4$	$\sqrt{16} = 4$
$\mathbb{L} = \{\}$	$\mathbb{L} = \{16\}$

1.3.2 Methoden





Graphische Methoden

• Schnittpunkt der Funktion mit der x-Achse:
- Gleichung nach Null auflösen
- Gleichung als Funktion schreiben
- Graph der Funktion zeichnen
- Lösung der Gleichung: Schnittpunkte mit der x-Achse (Nullstellen) ablesen

• Schnittpunkt zwischen 2 Funktionen:
- linken und rechten Term als Funktionen schreiben
- Graphen der Funktionen zeichnen
- Lösung der Gleichung: x-Wert der Schnittpunkte der Graphen ablesen

Gleichung: $\frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}x + 3$
Gleichung nach Null auflösen
$\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 3 = 0$
Gleichung als Funktion schreiben
$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 3$
Graphen der Funktionen zeichnen
Lösung der Gleichung: Schnittpunkte mit der x-Achse
$x_1 = 3 \qquad x_2 = -2$

Gleichung: $\frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}x + 3$
linken und rechten Term als Funktionen schreiben:
$f(x) = \frac{1}{2}x^2$
$g(x) = \frac{1}{2}x + 3$
Graphen der Funktionen zeichnen
Lösung der Gleichung: Schnittpunkte der Funktionen
$x_1 = 3 \qquad x_2 = -2$

Numerische Methoden

- Gleichung nach Null auflösen
- Gleichung als Funktionsterm f(x) schreiben
- Nullstellen von f(x) berechnen

• Newtonverfahren
$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
- Funktion ableiten: $f'(x)$
- Startwert x_0 wählen
- Funktionswerte $f(x_0)$ und $f'(x_0)$ berechnen
- Werte einsetzen und 1. Näherung x_1 berechnen:
$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$
$-x_1$ einsetzen und 2. Näherung berechnen:
$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$
....

• Intervallhalbierung
-unterschiedliche Vorzeichen von $f(a)$ und $f(b)$
- Nullstelle liegt im Intervall $[a;b]$
- Mitte zwischen a und b ermitteln:
$m_1 = \frac{a+b}{2}$
- sind die Vorzeichen von $f(m_1)$ und $f(a)$ gleich, wird $a = m_1$
- sind die Vorzeichen von $f(m_1)$ und $f(b)$ gleich, wird $b = m_1$
- Mitte zwischen a und b ermitteln:
$m_2 = \frac{a+b}{2}$
- sind die Vorzeichen von $f(m_2)$ und $f(a)$ gleich, wird $a = m_2$
- sind die Vorzeichen von $f(m_2)$ und $f(b)$ gleich, wird $b = m_2$
usw.

Newtonverfahren
$\frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}x + 3$
Funktion
$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 3$
Funktion ableiten:
$f'(x) = x - \frac{1}{2}$
$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
Startwert: $x_0 = 4$
$f(4) = 3$
$f'(4) = 3\frac{1}{2}$
$x_1 = 4 - \frac{f(4)}{f'(4)}$
$x_1 = 4 - \frac{3}{3\frac{1}{2}}$
$x_1 = 3\frac{1}{7}$
$f(3\frac{1}{7}) = \frac{18}{49}$
$f'(3\frac{1}{7}) = 2\frac{9}{14}$
$x_2 = 3\frac{1}{7} - \frac{f(3\frac{1}{7})}{f'(3\frac{1}{7})}$
$x_2 = 3\frac{1}{7} - \frac{\frac{18}{49}}{2\frac{9}{14}}$
$x_2 = 3$
$f(3) = 0,00966$
$f'(3) = 2,5$
$x_3 = 3 - \frac{f(3)}{f'(3)}$
$x_3 = 3 - \frac{0,00966}{2,5}$
$x_3 = 3$

Intervallhalbierung
$\frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}x + 3$
Funktion
$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 3$
Nullstelle im Intervall$[1;4]$
$a = 1 \qquad b = 4$
$f(1) = -3 \quad f(4) = 1$
$m_1 = \frac{1+4}{2} = 2,5$
$f(2,5) = -2,625$
$a = m_1 = 2,5$
Nullstelle im Intervall$[2,5;4]$
$m_2 = \frac{2,5+4}{2} = 3,25$
$f(3,25) = 0,65625$
$b = m_2 = 3,25$
Nullstelle im Intervall$[2,5;3,25]$

Algebraische Methoden

- Lineare Gleichungen:

$ax + b = cx + d$

Lösung durch Auflösen nach der Variablen.

- Potenzgleichung:

$ax^2 + c = 0 \qquad x^2 = \frac{-c}{a} \qquad x_{1/2} = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$

$ax^3 + b = 0 \qquad x = \sqrt[3]{\frac{-b}{a}}$

Auflösen nach der Variablen und die Wurzel ziehen.

- Faktorisieren

Jeder Summenterm enthält die Variable mit unterschiedlichen Potenzen.

$ax^2 + bx = 0 \qquad x(ax + b) = 0$

$ax^3 + bx = 0 \qquad x(ax^2 + b) = 0$

$ax^3 + bx^2 = 0 \qquad x^2(ax + b) = 0$

Lösung der Gleichung durch Auflösen nach Null und faktorisieren des Terms. Ein Produkt ist dann Null, wenn einer der Faktoren Null ist.

- Quadratische Gleichung:

$ax^2 + bx + c = 0$

Lösung mit Lösungsformel für quadratischen Gleichungen

$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$

- Kubische Gleichung mit Konstante:

$ax^3 + bx^2 + d = 0$

$ax^3 + cx + d = 0$

$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

Lösung durch Polynomdivision.

- Biquadratische Gleichung: $ax^4 + bx^2 + c = 0$

Lösung durch Substitution.

- Terme und deren Umkehrung:

x^n	$x^{\frac{1}{n}}$
x^2	$\pm\sqrt{x}$
x^3	$x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$
$x^{\frac{m}{n}}$	$x^{\frac{n}{m}}$

a^x	$\log_a(x)$	$\sin(x)$	$\arcsin(a)$
e^x	$\ln(x)$	$\cos(x)$	$\arccos(a)$
10^x	$\log_(x)$	$\tan(x)$	$\arctan(a)$

Lösung durch Auflösen nach dem Term und Anwendung von deren Umkehrung.

Lineare Gleichung

$2x + 4 = 6x + 7 \qquad / - 6x$

$-4x + 4 = 7 \qquad / - 4$

$-4x = 3 \qquad / : (-4)$

$x = -\frac{3}{4}$

Potenzgleichung:

$x^2 - 16 = 0 \qquad / + 16$

$x^2 = 16$

$x = \pm\sqrt{16}$

$x_1 = 4 \qquad x_2 = -4$

Faktorisieren:

$x^3 - 16x = 0$

$x(x^2 - 16) = 0$

Ein Produkt ist dann Null, wenn einer der Faktoren Null ist.

$x_1 = 0 \quad \vee \quad x^2 - 16 = 0$

$x^2 - 16 = 0$

$x_2 = 4 \qquad x_3 = -4$

Quadratische Gleichung:

$\frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}x + 3$

Gleichung nach Null auflösen:

$\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 3 = 0$

$x_{1/2} = \frac{+\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot (-3)}}{2 \cdot \frac{1}{2}}$

$x_1 = 3 \qquad x_2 = -2$

Umkehrung:

$2^x = 8 \qquad x = \log_2(8) \qquad x = 3$

$\log_2(x) = 3 \qquad x = 2^3 \qquad x = 8$

$e^{(3x+4)} = 3 \qquad / \ln$

$3x + 4 = \ln(3) \qquad / - 4 \qquad / : 3$

$x = -0,967$

1.3.3 Lineare Gleichung

- Klammern auflösen
- Terme zusammenfassen
- Äquivalenzumformung: Alle Terme mit der Variablen auf die eine Seite und alle Terme ohne Variable auf die andere Seite
- durch die Zahl vor der Variablen dividieren

$2\frac{1}{2}x + 5 = 4(x-2) - 2x + 12$
Klammern auflösen:
$2\frac{1}{2}x + 5 = 4x - 8 - 2x + 12$
Terme zusammenfassen:
$2\frac{1}{2}x + 5 = 2x + 4$
Äquivalenzumformung:
$2\frac{1}{2}x + 5 = 2x + 4 \qquad / - 5 \qquad / - 2x$
$2\frac{1}{2}x - 2x = 4 - 5$
durch die Zahl vor der Variablen dividieren:
$\frac{1}{2}x = -1 \qquad / : \frac{1}{2}$
$x = \frac{-1}{\frac{1}{2}}$
$x = -2$

$\mathbf{a \cdot x = b}$

$$a \cdot x = b \qquad / : a$$
$$x = \frac{b}{a}$$

$5 \cdot x = 45 \qquad / : 5$
$x = \frac{45}{5}$
$x = 9$

$-2 \cdot x = -6 \qquad / : (-2)$
$x = \frac{-6}{-2}$
$x = 3$

$\mathbf{x + a = b}$

$$x + a = b \qquad / - a$$
$$x = b - a$$

$x + 2 = 5 \qquad / - 2$
$x = 5 - 2$
$x = 3$

$x + 5 = -7 \qquad / - 5$
$x = -7 - 5$
$x = -12$

$\mathbf{a \cdot x + b = c}$

$$a \cdot x + b = c \qquad / - b$$
$$a \cdot x = c - b \qquad / : a$$
$$x = \frac{c-b}{a}$$

$5 \cdot x - 4 = 6 \qquad / + 4$
$5 \cdot x = 10 \qquad / : 5$
$x = \frac{10}{5}$
$x = 2$

$-2 \cdot x + 4 = -6 \qquad / - 4$
$-2 \cdot x = -10 \qquad / : (-2)$
$x = \frac{-10}{-2}$
$x = 5$

$\mathbf{\frac{x}{a} = b}$

$$\frac{x}{a} = b \qquad / \cdot a$$
$$x = b \cdot a$$

$\frac{x}{2} = 5 \qquad / \cdot 2$
$x = 5 \cdot 2$
$x = 10$

$\frac{x}{5} = -7 \qquad / \cdot 5$
$x = -7 \cdot 5$
$x = -35$

$\mathbf{a - x = b}$

$$a - x = b \qquad / - a$$
$$-x = b - a \qquad / : (-1)$$
$$x = a - b$$

$2 - x = 5 \qquad / - 2$
$-x = 5 - 2$
$-x = 3 / : (-1)$
$x = -3$

$x - 5 = -7 \qquad / + 5$
$x = -7 + 5$
$x = -2$

$\mathbf{x - a = b}$

$x - a = b \qquad / + a$
$x = b + a$

$x - 2 = 5 \qquad / + 2$
$x = 5 + 2$
$x = 7$

$x - 5 = -7 \qquad / + 5$
$x = -7 + 5$
$x = -2$

$\mathbf{ax + b = cx + d}$

$ax + b = cx + d \qquad / - cx$
$ax - cx + b = d \qquad / - b$
$(a - c)x = d - b \qquad / : (a - c)$
$a - c \neq 0$
$x = \frac{d-b}{a-c}$

$2x + 4 = 6x + 7 \qquad / - 6x$
$-4x + 4 = 7 \qquad / - 4$
$-4x = 3 \qquad / : (-4)$
$x = -\frac{3}{4}$

Interaktive Inhalte:
$a \cdot x + b = c$ | $a \cdot x + b = c \cdot x + d$ | $a \cdot x + b = 0$ | $a \cdot x = d$

1.3.4 Quadratische Gleichung

Umformen: $\mathbf{ax^2 + c = 0}$

$ax^2 + c = 0 \quad / - c$
$ax^2 = -c \quad / : a$
$x_{1/2} = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$
Diskriminante:
$D = \frac{-c}{a}$
$D = 0$ eine Lösung
$D > 0$ zwei Lösungen
$D < 0$ keine Lösung

$-\frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{6} = 0 \qquad / - \frac{1}{6}$
$-\frac{2}{3}x^2 = -\frac{1}{6} \qquad / : (-\frac{2}{3})$
$x^2 = \frac{-\frac{1}{6}}{-\frac{2}{3}}$
$x = \pm\sqrt{\frac{1}{4}}$
$x_1 = \frac{1}{2} \qquad x_2 = -\frac{1}{2}$

Faktorisieren: $\mathbf{ax^2 + bx = 0}$

$ax^2 + bx = 0$
$x(ax + b) = 0$
$x_1 = 0 \qquad \vee \qquad x_2 = \frac{-b}{a}$

$-2x^2 - 8x = 0$
$x(-2x - 8) = 0$
$x_1 = 0$
$-2x - 8 = 0 \qquad / + 8$
$-2x = 8 \qquad / : (-2)$
$x = \frac{8}{-2}$
$x_2 = -4$

$x^2 - x = 0$
$x(x - 1) = 0$
$x_1 = 0$
$x - 1 = 0 \qquad / + 1$
$x = 1$
$x_2 = 1$

Lösungsformel (Mitternachtsformel): $\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$

$ax^2 + bx + c = 0$

$x_{1/2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$

Diskriminante:

$D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$

$D = 0$ eine Lösung

$D > 0$ zwei Lösungen

$D < 0$ keine Lösung

$x^2 + 3x - 10 = 0$

$x_{1/2} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10)}}{2 \cdot 1}$

$x_{1/2} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{49}}{2}$

$x_{1/2} = \dfrac{-3 \pm 7}{2}$

$x_1 = \dfrac{-3 + 7}{2} \qquad x_2 = \dfrac{-3 - 7}{2}$

$x_1 = 2 \qquad x_2 = -5$

p-q Formel: $\mathbf{x^2 + px + q = 0}$

$x^2 + px + q = 0$

$x_{1/2} = -\dfrac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\dfrac{p}{2}\right)^2 - q}$

Diskriminante:

$D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$

$D = 0$ eine Lösung

$D > 0$ zwei Lösungen

$D < 0$ keine Lösung

$x^2 + 3x - 10 = 0$

$x_{1/2} = -\dfrac{3}{2} \pm \sqrt{\left(\dfrac{3}{2}\right)^2 - (-10)}$

$x_{1/2} = -1\dfrac{1}{2} \pm \sqrt{12\dfrac{1}{4}}$

$x_{1/2} = -1\dfrac{1}{2} \pm 3\dfrac{1}{2}$

$x_1 = 2 \qquad x_2 = -5$

Satz von Vieta: $\mathbf{x^2 + px + q = 0}$

$x^2 + px + q = 0$

x_1, x_2 sind die Lösungen der Gleichung

$(x - x_1) \cdot (x - x_2) = 0$

$x^2 - x_2 \cdot x - x_1 \cdot x + x_1 \cdot x_2 = 0$

$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2 = 0$

$x_1 + x_2 = -p$

$x_1 \cdot x_2 = q$

$x^2 + 3x - 10 = 0$

$p = 3 \quad q = -10$

$x_1 + x_2 = -3$

$x_1 \cdot x_2 = 10$

$2 - 5 = -3$

$2 \cdot (-5) = -10$

$x_1 = 2 \qquad x_2 = -5$

$(x - 2) \cdot (x + 5) = 0$

Interaktive Inhalte:

$ax^2 + bx + c = 0$

1.3.5 Kubische Gleichungen

Umformen: $\mathbf{ax^3+b=0}$

$ax^3+b=0$

$ax^3+b=0 \qquad /-b$

$ax^3=-b \qquad /:a$

$x^3=\frac{-b}{a}$

$x=\sqrt[3]{\frac{-b}{a}}$

$\frac{-b}{a}>0 \qquad x=\sqrt[3]{\frac{-b}{a}}$

$\frac{-b}{a}<0 \qquad x=-\sqrt[3]{\left|\frac{-b}{a}\right|}$

$3x^3+24=0$
$3x^3+24=0 \qquad /-24$
$3x^3=-24 \qquad /:3$
$x^3=\frac{-24}{3}$
$x=\sqrt[3]{-8}$
$x=-2$

$-3x^3+24=0$
$-3x^3+24=0 \qquad /-24$
$-3x^3=-24 \qquad /:(-3)$
$x^3=\frac{-24}{-3}$
$x=\sqrt[3]{8}$
$x=2$

Faktorisieren: $\mathbf{ax^3+bx=0}$

$ax^3+bx=0$

$x(ax^2+b)=0$

$x_1=0 \qquad \vee \qquad (ax^2+b)=0$

$-9x^3+25x=0$
$x(-9x^2+25)=0$
$\Rightarrow x_1=0 \quad \vee \quad -9x^2+25=0$
$-9x^2+25=0 \qquad /-25$
$-9x^2=-25 \qquad /:(-9)$
$x^2=\frac{-25}{-9}$
$x=\pm\sqrt{2\frac{7}{9}}$
$x_2=1\frac{2}{3} \qquad x_3=-1\frac{2}{3}$

Faktorisieren: $\mathbf{ax^3+bx^2=0}$

$ax^3+bx^2=0$

$x^2(ax+b)=0$

$x_{1/2}=0 \qquad \vee \qquad (ax+b)=0$

$-6\frac{3}{4}x^3-13\frac{1}{2}x^2=0$
$x^2(-6\frac{3}{4}x-13\frac{1}{2})=0$
$\Rightarrow x_{1/2}=0 \quad \vee \quad -6\frac{3}{4}x-13\frac{1}{2}=0$
$-6\frac{3}{4}x-13\frac{1}{2}=0 \qquad /+13\frac{1}{2}$
$-6\frac{3}{4}x=13\frac{1}{2} \qquad /:\left(-6\frac{3}{4}\right)$
$x=\frac{13\frac{1}{2}}{-6\frac{3}{4}}$
$x_3=-2$

Polynomdivision

$ax^3 + bx^2 + d = 0$
$ax^3 + cx + d = 0$
$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

• Die ganzzahligen Faktoren von d in die Funktion einsetzen. Wird bei einem Faktor der Funktionswert Null, hat man eine Nullstelle x_0 gefunden.

• Wenn x_0 ein Nullstelle von f(x) ist, so ist f(x) durch $(x-x_0)$ ohne Rest teilbar.

• Mit dem Linearfaktor $(x - x_0)$ wird die Polynomdivision durchgeführen.

$(ax^3 + bx^2 + cx + d) : (x - x_0) = fx^2 + dx + e$

$f(x) = (ax^3 + bx^2 + cx + d) = (x - x_0) \cdot (fx^2 + dx + e)$

$x^3 + 3x^2 - 4 = 0$

$x^3 + 3x^2 - 4 = 0$
$d = 4$ Ganzzahlige Faktoren: $\pm 1, \pm 2, \pm 4$
$f(1) = 0$
Nullstelle gefunden: $x_1 = 1$

$$\begin{array}{llll}
(x^3 & +3x^2 & & -4 \quad) : (x-1) = x^2 + 4x + 4 \\
-(x^3 & -x^2) & & \\
\hline
 & 4x^2 & & -4 \\
 & -(4x^2 & -4x) & \\
\hline
 & & 4x & -4 \\
 & & -(4x & -4) \\
\hline
 & & & 0
\end{array}$$

$1x^2 + 4x + 4 = 0$

$x_{2/3} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1}$

$x_{2/3} = \frac{-4 \pm \sqrt{0}}{2}$

$x_{2/3} = \frac{-4 \pm 0}{2}$

$x_2 = \frac{-4 + 0}{2} \qquad x_3 = \frac{-4 - 0}{2}$

$x_2 = -2 \qquad x_3 = -2$

Interaktive Inhalte:
hier klicken

1.3.6 Gleichungen höheren Grades

Gerader Exponent: $\mathbf{ax^n + c = 0}$

$ax^n + c = 0 \quad / - c$
$ax^n = -c \quad / : a$
$x_{1/2} = \pm \sqrt[n]{\frac{-c}{a}}$
Diskriminante:
$D = \frac{-c}{a}$
$D = 0$ eine Lösung
$D > 0$ zwei Lösungen
$D < 0$ keine Lösung

$-2x^4 + 162 = 0 \qquad / - 162$
$-2x^4 = -162 \qquad / : (-2)$
$x^4 = \frac{-162}{-2}$
$x = \pm \sqrt[4]{81}$
$x_1 = 3 \qquad x_2 = -3$

Ungerader Exponent: $\mathbf{ax^n + c = 0}$

$ax^n + b = 0$

$ax^n + b = 0 \qquad / - b$

$ax^n = -b \qquad / : a$

$x^n = \frac{-b}{a}$

$x = \sqrt[n]{\frac{-b}{a}}$

$\frac{-b}{a} > 0 \qquad x = \sqrt[n]{\frac{-b}{a}}$

$\frac{-b}{a} < 0 \qquad x = -\sqrt[n]{\left|\frac{-b}{a}\right|}$

$5x^3 + 320 = 0 \qquad / - 320$

$5x^3 = -320 \qquad / : 5$

$x^3 = -\frac{320}{5}$

$x = -\sqrt[3]{64}$

$x = -4$

Biquadratische Gleichung (Substitution)

$ax^4 + bx^2 + c = 0$

Substitution: $u = x^2 \qquad u^2 = x^4$

Quadratische Gleichung: $au^2 + bu + c = 0$

Lösungen: $u_1 \qquad u_2$

Resubstitution: $x^2 = u_1 \qquad x^2 = u_2$

$x^4 - 10x^2 + 9 = 0$

$u = x^2 \qquad u^2 = x^4$

$1u^2 - 10u + 9 = 0$

$u_{1/2} = \frac{+10 \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9}}{2 \cdot 1}$

$u_{1/2} = \frac{+10 \pm \sqrt{64}}{2}$

$u_{1/2} = \frac{10 \pm 8}{2}$

$u_1 = \frac{10 + 8}{2} \qquad u_2 = \frac{10 - 8}{2}$

$u_1 = 9 \qquad u_2 = 1$

$x^2 = 9$

$x = \pm\sqrt{9}$

$x_1 = 3 \qquad x_2 = -3$

$x^2 = 1$

$x = \pm\sqrt{1}$

$x_3 = 1 \qquad x_4 = -1$

Interaktive Inhalte:
hier klicken

1.3.7 Bruchgleichung

Überkreuzmultiplikation

- Nullstellen des Nenners aus dem Definitionsbereich ausschließen.
- Das Produkt aus dem Zähler des linken Bruchs und dem Nenner des rechten Bruchs ist gleich dem Produkt aus dem Nenner des linken Bruchs und dem Zähler des rechten Bruchs.
- Gleichung lösen.
- Lösungen müssen im Definitionsbereich enthalten sein.

$\frac{a}{bx + c} = \frac{d}{ex + f} \qquad a \cdot (ex + f) = d \cdot (bx + c)$

$\frac{2}{x + 4} = \frac{3}{x - 1}$

Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-4; 1\}$

Überkreuzmultiplikation: $2 \cdot (x - 1) = 3 \cdot (x + 4)$

$2x - 2 = 3x + 12$

$x = -14$

Mit dem Hauptnenner durchmultiplizieren

• Nullstellen des Nenners aus dem Definitionsbereich ausschließen.
• Gleichung mit dem Hauptnenner durchmultiplizieren.
• Gleichung lösen.
• Lösungen müssen im Definitionsbereich enthalten sein.

$\frac{2}{5x} = \frac{1}{x+3}$
Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-3; 0\}$
Hauptnenner:5x(x+3)
$\frac{2 \cdot 5x(x+3)}{5x} = \frac{1 \cdot 5x(x+3)}{(x+3)}$
$2 \cdot (x+3) = 5x$
$2x + 6 = 5x$
$x = 2$

1.3.8 Exponentialgleichungen

$\mathbf{b^x = a}$

$\bullet \mathbf{b^x = a \quad a > 0}$
$b^x = a \quad / \log_b \ldots$
$\log_b (b^x) = \log_b (a)$
Logarithmengesetz: $log_b b^x = x \log_b b = x$
$x = \log_b (a)$
$\bullet \mathbf{e^x = a \quad a > 0}$
Basis: e = 2,718.. (eulersche Zahl)
$e^x = a \quad a > 0$
$e^x = a \qquad / \ln \ldots$
$\ln (e^x) = \ln (a)$
Logarithmengesetz: $lne^x = x \ln e = x$
$x = \ln (a)$
$\bullet \mathbf{10^x = a \quad a > 0}$
Basis: 10
$10^x = a \quad a > 0$
$10^x = a \qquad / \lg \ldots$
$\lg (10^x) = \lg (a)$
Logarithmengesetz: $lg 10^x = x \lg 10 = x$
$x = \lg (a)$

$2^x = 8$
$x = \log_2 (8)$
$x = 3$

$e^x = 4$
$x = ln (4)$
$x = 1,39$

$\mathbf{a \cdot b^{(cx+d)} + f = 0}$

$a \cdot b^{(cx+d)} + f = 0$
$a \cdot b^{(cx+d)} + f = 0 \qquad / - f$
$a \cdot b^{(cx+d)} = -f \qquad / : a$
$b^{(cx+d)} = \frac{-f}{a} \qquad / \log_b(...)$
$\frac{-f}{a} > 0 \Rightarrow$
$\log_b \left(b^{(cx+d)}\right) = \log_b \left(\frac{-f}{a}\right)$
Logarithmengesetz: $log_b b^n = n \log_b b = n$
$(cx+d)\log_b(b) = \log_b \left(\frac{-f}{a}\right)$
$cx + d = \log_b \left(\frac{-f}{a}\right) \qquad / - d \qquad / : c$
$x = \frac{\log_b\left(\frac{-f}{a}\right) - d}{c}$
$\frac{-f}{a} \leq 0 \Rightarrow$ keine Lösung

$-2 \cdot 2^{(2x+3)} + 4 = 0$
$-2 \cdot 2^{(2x+3)} + 4 = 0 \qquad / - 4$
$-2 \cdot 2^{(2x+3)} = -4 \qquad / : -2$
$2^{(2x+3)} = 2 \qquad / \log_2$
$2x + 3 = \log_2(2) \qquad / - 3 \qquad / : 2$
$x = -1$
Basis: $e = 2,718..$(eulersche Zahl)
$2 \cdot e^{(3x+4)} - 6 = 0$
$2 \cdot e^{(3x+4)} - 6 = 0 \qquad / + 6$
$2 \cdot e^{(3x+4)} = +6 \qquad / : 2$
$e^{(3x+4)} = 3 \qquad / \ln$
$3x + 4 = \ln(3) \qquad / - 4 \qquad / : 3$
$x = -0,967$

Interaktive Inhalte:
$b^x = a$ | $e^x = a$ | $ab^{(cx+d)} + f = 0$ | $ae^{(cx+d)} + f = 0$

1.3.9 Logarithmusgleichungen

$\mathbf{\log_b x = a}$

• $\mathbf{\log_b x = a \quad /b}$
$x = b^a$
• $\mathbf{\lg x = a \quad /10}$
$x = 10^a$
• $\mathbf{\ln x = a \quad /e}$
$x = e^a$

$log_2 x = 3$
$x = 2^{(3)}$
$x = 8$

$ln(x) = 1,39$
$x = e^{(1,39)}$
$x = 4$

$\mathbf{a \log_b(cx + d) + f = 0}$

$a \log_b(cx+d) + f = 0$
$a \log_b(cx+d) + f = 0 \qquad / - f$
$a \log_b(cx+d) = -f \qquad / : a$
$\log_b(cx+d) = \frac{-f}{a} \qquad /b$
$b^{(\log_b(cx+d))} = b^{\left(\frac{-f}{a}\right)}$
$cx + d = b^{\left(\frac{-f}{a}\right)} \qquad / - d \qquad / : c$
$x = \frac{b^{\left(\frac{-f}{a}\right)} - d}{c}$

$2 \cdot log_3(4x+5) - 4 = 0$
$2 \cdot log_3(4x+5) - 4 = 0 \qquad / + 4$
$2 \cdot log_3(4x+5) = +4 \qquad / : 2$
$\log_3(4x+5) = 2 \qquad /3^{\cdot\cdot}$
$4x + 5 = 3^2 \qquad / - 5 \qquad / : 4$
$x = \frac{3^2 - 5}{4}$
Basis: $e = 2,718..$(eulersche Zahl)
$\log_e x = lnx \quad 4 \cdot ln(5x+7) + 8 = 0$
$4 \cdot ln(5x+7) + 8 = 0 \qquad / - 8$
$4 \cdot ln(5x+7) = -8 \qquad / : 4$
$\ln(5x+7) = -2 \qquad /e^{\cdot\cdot}$
$5x + 7 = e^{-2} \qquad / - 7 \qquad / : 5$
$x = \frac{e^{-2} - 7}{5}$
$x = -1,37$

Interaktive Inhalte:
$log_b x = a$ | $ln(x) = a$ | $a \log_b(cx+d) + f = 0$ | $a \ln(cx+d) + f = 0$

1.3.10 Trigonometrische Gleichungen

Grundlagen trigonometrische Gleichungen

• Lösung der Gleichungen:
$\sin(\alpha) = a \quad \cos(\alpha) = a \quad \tan(\alpha) = a$

• Der Arkussinus (Arcuscosinus,Arkustangens) des Betrags von a ist die Lösung im 1. Quadranten.
Gradmaß(DEG):
$\alpha' = \arcsin(|a|) = \sin^{-1}(|a|)$
$\alpha' = \arccos(|a|) = \cos^{-1}(|a|)$
$\alpha' = \arctan(|a|) = \tan^{-1}(|a|)$
Bogenmaß(RAD):
$x' = \arcsin(|a|) = \sin^{-1}(|a|)$
$x' = \arccos(|a|) = \cos^{-1}(|a|)$
$x' = \arctan(|a|) = \tan^{-1}(|a|)$

• Je nach Vorzeichen von a die Quadranten wählen.

	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$
I. Quadrant	+	+	+
II. Quadrant	+	-	-
III. Quadrant	-	-	+
IV. Quadrant	-	+	-

• Umrechnen des Winkels in die Quadranten.

	DEG	RAD
I. Quadrant	α	x
II. Quadrant	$180° - \alpha$	$\pi - x$
III. Quadrant	$180° + \alpha$	$\pi + x$
IV. Quadrant	$360° - \alpha$	$2\pi - x$

• Der Sinus und Kosinus sind periodisch mit der Periode $2\pi(360°)$.
$\mathbb{D} = \mathbb{R} \quad k \in \mathbb{Z}$
$\mathbb{L} = \{\alpha{+}k \cdot 360°\}$ (DEG)
$\mathbb{L} = \{x{+}k \cdot 2\pi\}$(RAD)
- Der Tangens ist periodisch mit der Periode $\pi(180°)$.
$\mathbb{D} = \mathbb{R} \quad k \in \mathbb{Z}$
$\mathbb{L} = \{\alpha{+}k \cdot 180°\}$ (DEG)
$\mathbb{L} = \{x{+}k \cdot \pi\}$(RAD)

Winkel in Gadmaß:$\alpha \quad k \in \mathbb{Z}$
$sin\alpha = -\frac{1}{2}$
$-\frac{1}{2} < 0 \Rightarrow$ Lösung im III Quadrant und IV Quadrant
$\alpha' = sin^{-1}(|-\frac{1}{2}|) = 30°$
III Quadrant: $\alpha_1 = 180° + 30° = 210°$
$\mathbb{D} = \mathbb{R} \quad \mathbb{L} = \{210°{+}k \cdot 360°\}$
IV Quadrant: $\alpha_2 = 360° - 30° = 330°$
$\mathbb{D} = \mathbb{R} \quad \mathbb{L} = \{330°{+}k \cdot 360°\}$
$\mathbb{D} = [0; 360°] \quad \mathbb{L} = \{210°; 330°\}$

Winkel in Bogenmaß:x $\quad k \in \mathbb{Z}$
$\sin x = -\frac{1}{2}$
$x = sin^{-1}(-\frac{1}{2})$
$x' = sin^{-1}(|-\frac{1}{2}|) = 0,524$
III Quadrant: $x_1 = \pi + 0,524 = 3,67$
$\mathbb{D} = \mathbb{R} \quad \mathbb{L} = \{3,67{+}k \cdot 2\pi\}$
IV Quadrant: $x_2 = 2\pi - 0,524 = 5,76$
$\mathbb{D} = \mathbb{R} \quad \mathbb{L} = \{5,76{+}k \cdot 2\pi\}$

] **Sinus durch Kosinus = Tangens**

$a\sin(x) = b\cos(x) \qquad / : a / : \cos(x)$
$\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{b}{a}$
$\tan(x) = \frac{b}{a}$
$x = \arctan(\frac{b}{a})$

$8\sin(x) = 4\cos(x) \qquad / : 8 / : \cos(x)$
$\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{4}{8}$
$\tan(x) = \frac{1}{2}$
$x = \arctan(\frac{1}{2})$
$x = 9,463(RAD) \qquad \alpha = 26,56^{\circ}(DEG)$

Interaktive Inhalte:
$\sin\alpha = a \quad \sin x = a$ | $\cos\alpha = a \quad \cos x = a$ | $\tan\alpha = a \quad \tan x = a$

1.3.11 Betragsgleichung

$|\mathbf{ax+b}| = \mathbf{c}$

• Aufspalten der Beträge in einzelne Intervalle.

- Betragsstriche sind nicht nötig, wenn der Term des Betrags positiv ist. $ax + b \geq 0$ für $x \geq \frac{-b}{a}$

- Betragsstriche sind nicht nötig, wenn der Term des Betrags negativ ist und dafür zusätzlich ein Minuszeichen vor den Term geschrieben wird. $ax + b < 0$ für $x < \frac{-b}{a}$

$|ax+b| = \begin{cases} (ax+b) & x \geq \frac{-b}{a} \\ -(ax+b) & x < \frac{-b}{a} \end{cases}$

• 1. Lösung für $x \geq \frac{-b}{a}$
$ax + b = c$
$ax + b = c \quad / - b \quad / : a$
$x = \frac{c-b}{a}$

• 1. Lösung ist die Schnittmenge aus $x \geq \frac{-b}{a} \wedge x = \frac{c-b}{a}$

• 2. Lösung für $x < \frac{-b}{a}$
$-(ax+b) = c \quad / : (-1)$
$ax + b = -c$
$ax + b = -c \quad / - b \quad / : a$
$x = \frac{-c-b}{a}$

• 2. Lösung ist die Schnittmenge aus $x > \frac{-b}{a} \wedge x = \frac{-c-b}{a}$

• Gesamtlösung ensteht aus der Vereinigungsmenge von 1. Lösung und 2. Lösung

$|2x+3| = 7$
$|2x+3| = \begin{cases} (2x+3) & x \geq \frac{-3}{2} \\ -(2x+3) & x < \frac{-3}{2} \end{cases}$
• 1. Lösung für $x \geq \frac{-3}{2}$
$2x + 3 = 7$
$2x + 3 = 7 \quad / - 3 \quad / : 2$
$x = 2$
1. Lösung ist die Schnittmenge aus $x \geq \frac{-3}{2} \wedge x = 2$
1. Lösung $x = 2$
• 2. Lösung für $x < \frac{-3}{2}$
$-(2x+3) = 7$
$2x + 3 = -7 \quad / - 3 \quad / : 2$
$x = -5$
2. Lösung ist die Schnittmenge aus $x < \frac{-3}{2} \wedge x = -5$
2. Lösung $x = -5$
Vereinigungsmenge aus 1. Lösung und 2. Lösung
$x = 2 \quad \vee \quad x = -5$

$|2x+3| = -7$
$|2x+3| = \begin{cases} (2x+3) & x \geq \frac{-3}{2} \\ -(2x+3) & x < \frac{-3}{2} \end{cases}$
• 1. Lösung für $x \geq \frac{-3}{2}$
$2x + 3 = -7$
$2x + 3 = -7 \quad / - 3 \quad / : 2$
$x = -5$
1. Lösung ist die Schnittmenge aus $x \geq \frac{-3}{2} \wedge x = -5$
1. Lösung ist leere Menge
• 2. Lösung für $x < \frac{-3}{2}$
$-(2x+3) = -7$
$2x + 3 = +7 \quad / - 3 \quad / : 2$
$x = 2$
2. Lösung ist die Schnittmenge aus $x < \frac{-3}{2} \wedge x = 2$
2. Lösung ist leere Menge
Gesamtlösung ist leere Menge

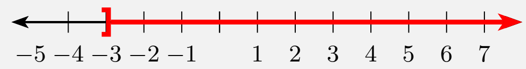
1.4 Ungleichungen

1.4.1 Grundlagen

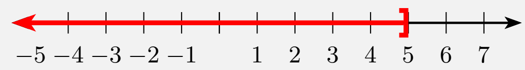
Ungleichheitszeichen

$x < b$	kleiner als	weniger als
$x > b$	größer als	mehr als
$x \leq b$	kleiner oder gleich	höchstens
$x \geq b$	größer oder gleich	mindestens

$x > -3$



$x \leq 5$



Intervalle in der Mengenschreibweise

offenes Intervall

Intervall	Mengenschreibweise
$a < x < b$	$]a;b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$
$x < b$	$]-\infty;b[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$
$x > a$	$]a;\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$

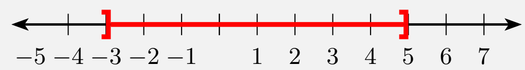
halboffenes Intervall

Intervall	Mengenschreibweise
$a < x \leq b$	$]a;b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$
$a \leq x < b$	$[a;b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$
$x \leq b$	$]-\infty;b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$
$x \geq a$	$[a;\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$

abgeschlossenes Intervall

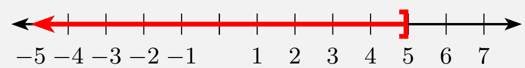
Intervall	Mengenschreibweise
$a \leq x \leq b$	$[a;b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$

$]-3;5] = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x \leq 5\}$



$-3 \notin]-3;5]$ $\quad 5 \in]-3;5]$ $\quad -1 \in]-3;5]$ $\quad 6 \notin]-3;5]$

$]-\infty;5] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 5\}$



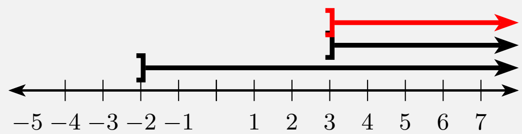
$-123 \in]-\infty;5]$ $\quad 5 \in]-\infty;5]$ $\quad 6 \notin]-\infty;5]$

Schnittmenge $\cap$ - und zugleich $\wedge$

$a < b \qquad \mathbb{G} = \mathbb{R}$

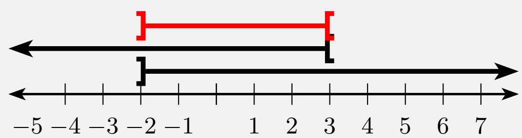
Intervall		Mengen	
$x > a \wedge x > b$	$x > b$	$]a;\infty[\,\cap\,]b;\infty[$	$]b;\infty[$
$x < a \wedge x < b$	$x < a$	$]-\infty;a[\,\cap\,]-\infty;b[$	$]-\infty;a[$
$x > a \wedge x < b$	$a < x < b$	$]a;\infty[\,\cap\,]-\infty;b[$	$]a;b[$
$x < a \wedge x > b$	$\{\}$	$]-\infty;a[\,\cap\,]b;\infty[$	$\{\}$

$x > -2 \wedge x > 3 = x > 3 \quad]-2;\infty[\,\cap\,]3;\infty[=]3;\infty[$



$x < -2 \wedge x < 3 = x < -2 \quad]-\infty;-2[\,\cap\,]-\infty;3[=]-\infty;-2[$

$x > -2 \wedge x < 3 = -2 < x < 3 \quad]-2;\infty[\,\cap\,]-\infty;3[=]-2;3[$



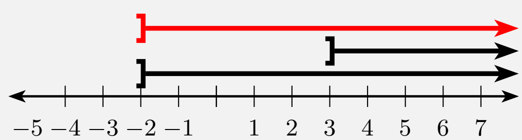
$x < -2 \wedge x > 3 = \{\} \quad]-\infty;-2[\,\cap\,]3;\infty[= \{\}$

Vereinigungsmenge $\cup$ - oder auch $\vee$

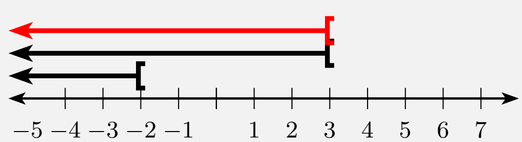
$a < b \qquad \mathbb{G} = \mathbb{R}$

Intervall		Mengen	
$x > a \vee x > b$	$x > a$	$]a;\infty[\,\cup\,]b;\infty[$	$]a;\infty[$
$x < a \vee x < b$	$x < b$	$]-\infty;a[\,\cup\,]-\infty;b[$	$]-\infty;b[$
$x > a \vee x < b$	$x \in \mathbb{R}$	$]a;\infty[\,\cup\,]-\infty;b[$	$\mathbb{R}$
$x < a \vee x > b$		$]-\infty;a[\,\cup\,]b;\infty[$	$\mathbb{R} \setminus [a;b]$

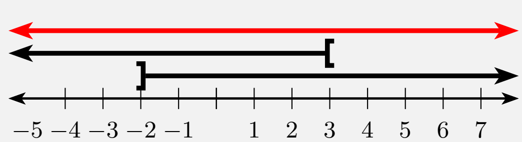
$x > -2 \vee x > 3 = x > -2 \quad]-2;\infty[\,\cup\,]3;\infty[=]-2;\infty[$



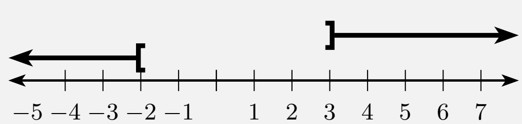
$x < -2 \vee x < 3 = x < 3 \quad]-\infty;-2[\,\cup\,]-\infty;3[=]-\infty;3[$



$x > -2 \vee x < 3 = x \in \mathbb{R} \quad]-2;\infty[\,\cup\,]-\infty;3[= \mathbb{R}$



$x < -2 \vee x > 3 \quad]-\infty;-2[\,\cup\,]3;\infty[$



1.4.2 Äquivalenzumformung

Durch eine Äquivalenzumformung ändert sich die Lösungsmenge einer Ungleichung nicht.
Äquivalenzumformungen von Ungleichungen

- Vertauschen der beiden Seiten ⇒ Umdrehen des Ungleichheitszeichens
- Addition des gleichen Terms (Zahl) auf beiden Seiten
- Subtraktion des gleichen Terms auf beiden Seiten
- Multiplikation mit dem gleichen Term (ungleich Null) auf beiden Seiten

Multiplikation mit einer negativen Zahl ⇒ Umdrehen des Ungleichheitszeichens

- Division durch mit dem gleichen Term (ungleich Null) auf beiden Seiten

Division mit einer negativen Zahl ⇒ Umdrehen des Ungleichheitszeichens

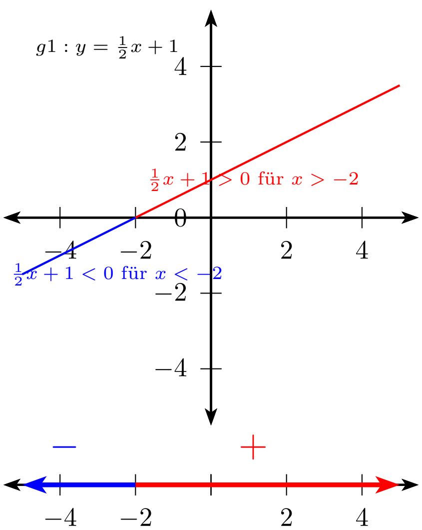
Vertauschen der beiden Seiten
$x-2>8 \qquad 8<x-2$
Addition des gleichen Terms auf beiden Seiten
$x-2>8 \qquad /+2$
$x-2+2>8+2$
$x>10$
Subtraktion des gleichen Terms auf beiden Seiten
$3x-2\leq 2x+3 \qquad /-2x$
$3x-2x-2\leq 2x-2x+3$
$x-2\leq 3$
Multiplikation mit dem gleichen Term auf beiden Seiten

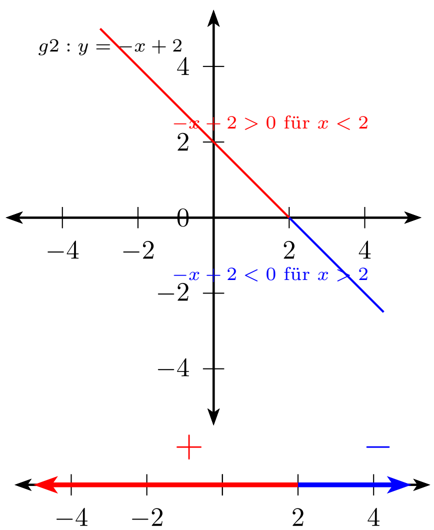
$\frac{x}{2}<-4 \qquad /\cdot 2$	$\frac{x}{-2}<-4 \qquad \cdot(-2)$
$\frac{x}{2}\cdot 2<-4\cdot 2$	$\frac{x}{-2}\cdot(-2)>-4\cdot(-2)$
$x<-8$	$x>8$

Division durch mit dem gleichen Term auf beiden Seiten

$2x>-4 \qquad /:2$	$\frac{x}{-2}>-4 \qquad /:(-2)$
$\frac{x}{2}\cdot 2>-4\cdot 2$	$\frac{x}{-2}\cdot(-2)<-4:(-2)$
$x>-8$	$x<8$

1.4.3 Lineare Ungleichung





Algebraische Lösung

$ax + b > 0 \qquad (>, <, \leq, \geq)$

- Klammern auflösen
- Terme zusammenfassen
- Äquivalenzumformung: Alle Terme mit der Variablen auf die linke Seite und alle Terme ohne Variable auf die rechte Seite.
- durch die Zahl vor der Variablen dividieren

Division oder Multiplikation mit einer negativen Zahl $\Rightarrow$ Umdrehen des Ungleichheitszeichens

$2\frac{1}{2}x + 5 \leq 4(x - 2) - 2x + 12$
Klammern auflösen
$2\frac{1}{2}x + 5 \leq 4x - 8 - 2x + 12$
Terme zusammenfassen
$2\frac{1}{2}x + 5 \leq 2x + 4$
Äquivalenzumformung:
$2\frac{1}{2}x + 5 \leq 2x + 4 \qquad / - 5 \qquad / - 2x$
$2\frac{1}{2}x - 2x \leq 4 - 5$
durch die Zahl vor der Variablen dividieren
$\frac{1}{2}x \leq -1 \qquad / : \frac{1}{2}$
$x \leq \frac{-1}{\frac{1}{2}}$
$x \leq -2 \qquad x \in] - \infty; 2[$

$-x + 2 > 0$
$-x + 2 = 0 \qquad / - 2$
$-x > -2 \qquad / : (-1)$
$x < 2 \qquad x \in] - \infty; 2[$

Graphische Lösung

$ax + b > 0 \qquad (>, <, \leq, \geq)$

- Klammern auflösen
- Terme zusammenfassen
- Äquivalenzumformung: Alle Terme auf die linke Seite
- Term als Funktion schreiben
- Nullstelle berechnen
- Graph der Funktion zeichnen
- Graph oberhalb der x-Achse $y > 0$
- Graph ist unterhalb der x-Achse $y < 0$
- x-Bereich aus dem Graphen ablesen

$2\frac{1}{2}x + 5 \leq 4(x - 2) - 2x + 12$
Klammern auflösen
$2\frac{1}{2}x + 5 \leq 4x - 8 - 2x + 12$
Terme zusammenfassen
$2\frac{1}{2}x + 5 \leq 2x + 4$
Äquivalenzumformung
$2\frac{1}{2}x + 5 \leq 2x + 4 \qquad / - 5 \qquad / - 2x$
$\frac{1}{2}x + 1 \leq 0$
$y \leq 0$
Term als Funktion schreiben
$g_1 : y = \frac{1}{2}x + 1$
Nullstelle berechnen
$\frac{1}{2}x + 1 = 0 \qquad / - 1$
$\frac{1}{2}x = -1 \qquad / : \frac{1}{2}$
$x = -2$
Graph zeichnen g_1
$y \leq 0$ der Graph ist unterhalb der x-Achse
x-Bereich aus dem Graphen ablesen
$x \leq -2 \qquad x \in] - \infty; -2]$

$-x + 2 > 0$
Term als Funktion schreiben
$g_2 : y = -x + 2 \quad y > 0$
Nullstelle berechnen
$-x + 2 = 0 \qquad / - 2$
$-x = -2 \qquad / : (-1)$
$x = 2$
Graph zeichnen g_2
$y > 0$ der Graph ist oberhalb der x-Achse
x-Bereich aus dem Graphen ablesen
$x < 2 \qquad \in] - \infty; 2[$

Vorzeichentabelle

$ax + b > 0 \qquad (>, <, \leq, \geq)$

- Klammern auflösen
- Terme zusammenfassen
- Äquivalenzumformung: Alle Terme auf die linke Seite
- Term als Funktion schreiben
- Nullstelle berechnen
- Vorzeichentabelle:

Das Vorzeichen einer linearen Funktion kann sich nur an den Nullstellen ändern. Einen beliebigen Wert kleiner bzw. größer als die Nullstelle wählen und das Vorzeichen des Funktionswerts in die Vorzeichentabelle eintragen.

- x-Bereich aus der Vorzeichentabelle ablesen

	$x <$	x_1	$< x$
y	$+$	0	$-$
	$ax + b > 0$		$ax + b < 0$

	$x <$	x_1	$< x$
y	$-$	0	$+$
	$ax + b < 0$		$ax + b > 0$

$\frac{1}{2}x + 1 \leq 0$
$y \leq 0 \quad -$ negative Funktionswerte
Term als Funktion schreiben
$g_1 : y = \frac{1}{2}x + 1$
Nullstelle berechnen
$\frac{1}{2}x + 1 = 0 \qquad / - 1$
$\frac{1}{2}x = -1 \qquad / : \frac{1}{2}$
$x = -2$
Wert kleiner als die Nullstelle wählen: $\quad x = -4$
$g1 : y = \frac{1}{2} \cdot (-4) + 1 = -1$ Minuszeichen eintragen
Wert größer als die Nullstelle wählen: $\quad x = 0$
$g1 : y = \frac{1}{2} \cdot (0) + 1 = +1$ Pluszeichen eintragen
Vorzeichentabelle:

	$x <$	-2	$< x$
y	$-$	0	$+$
	$\frac{1}{2}x + 1 < 0$		$\frac{1}{2}x + 1 > 0$

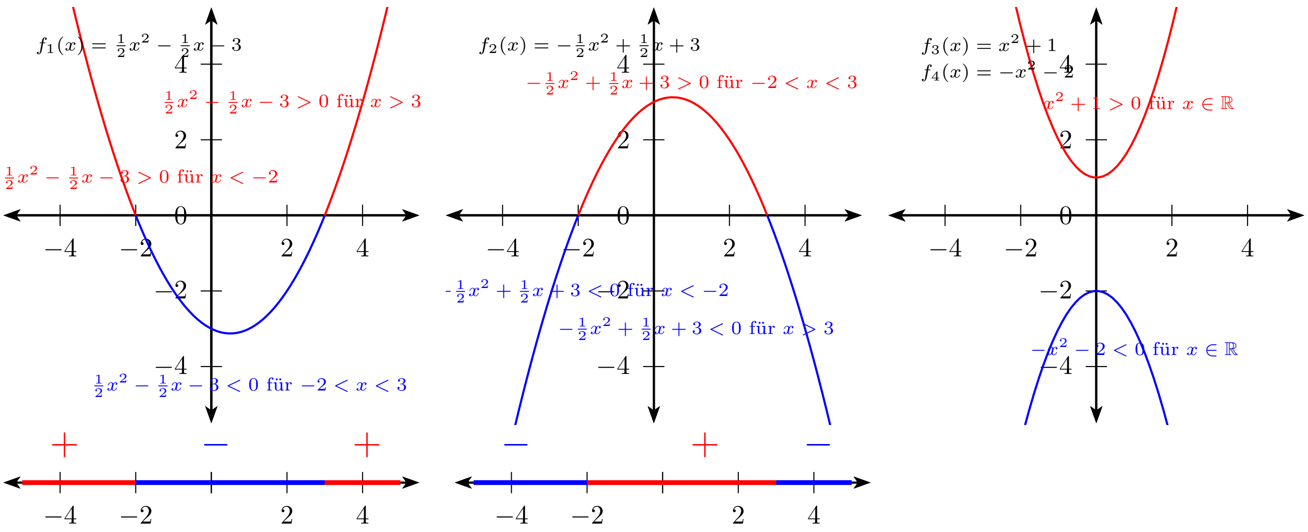
Lösung der Ungleichung: $\frac{1}{2}x + 1 \leq 0$
$x \leq -2 \qquad x \in]-\infty; -2]$

$-x + 2 > 0$
$y > 0 \quad +$positive Funktionswerte
Term als Funktion schreiben
$g_2 : y = -x + 2$
Nullstelle berechnen
$-x + 2 = 0 \qquad / - 2$
$-x = -2 \qquad / : (-1)$
$x = 2$
Wert kleiner als die Nullstelle wählen: $\quad x = 0$
$g2 : y = -0 + 1 = +1$ Pluszeichen eintragen
Wert größer als die Nullstelle wählen: $\quad x = 2$
$g2 : y = -2 + 1 = -1$ Minuszeichen eintragen
Vorzeichentabelle:

	$x <$	2	$< x$
y	$+$	0	$-$
	$-x + 2 > 0 \quad x < 2$		$-x + 2 < 0 \quad x > 2$

Lösung der Ungleichung: $-x + 2 > 0$
$x < 2 \qquad x \in]-\infty; 2[$

1.4.4 Quadratische Ungleichung



Algebraische Lösung

$ax^2 + bx + c > 0 \qquad (>, <, \leq, \geq)$

- 1. Methode
- Ungleichung nach Null auflösen
- quadratische Ergänzung
- quadratischen Term alleinstellen
- Wurzelziehen und Betrag schreiben
- Betragsungleichung lösen
- 2. Methode
- Ungleichung nach Null auflösen
- Term faktorisieren

$a(x - x_1)(x - x_2)$

- Auspalten in lineare Ungleichungen

1. Fall $\qquad a(x - x_1)(x - x_2) > 0$

$(+ \cdot + = +) \vee (- \cdot - = +)$

$(a(x - x_1) > 0 \wedge x - x_2 > 0) \vee$

$(a(x - x_1) < 0 \wedge x - x_2 < 0)$

2. Fall $\qquad a(x - x_1)(x - x_2) < 0$

$(+ \cdot - = -) \vee (- \cdot + = -)$

$(a(x - x_1) > 0 \wedge x - x_2 < 0) \vee$

$(a(x - x_1) < 0 \wedge x - x_2 > 0)$

- Zusammenfassen der einzelnen Lösungen

1. Methode
$\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 3 > 0$
quadratische Ergänzung
$\frac{1}{2}(x^2 - x + \frac{1}{2}^2 - \frac{1}{2}^2 - 6) > 0$
$\frac{1}{2}[(x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} - 6] > 0$
$\frac{1}{2}[(x - \frac{1}{2})^2 - 6\frac{1}{4}] > 0$
$\frac{1}{2}(x - \frac{1}{2})^2 - 3\frac{1}{8} > 0$
quadratischen Term alleinstellen
$(x - \frac{1}{2})^2 > \frac{25}{4}$
Wurzelziehen und Betrag schreiben
$|x - \frac{1}{2}| > \frac{5}{2}$
Betragsungleichung
$x > 3 \quad \vee \quad x < -2$

2. Methode
$\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 3 > 0$
Term faktorisieren
$\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 3 = 0$
$x_1 = 3 \qquad x_2 = -2$
$\frac{1}{2}(x + 2)(x - 3) > 0$
Aufspalten in lineare Ungleichungen
$(\frac{1}{2}(x + 2) > 0 \wedge x - 3 > 0) \vee (\frac{1}{2}(x + 2) < 0 \wedge x - 3 < 0)$
$(x > -2 \wedge x > 3) \vee (x < -2 \wedge x < 3)$
Lösungen zusammenfassen
$x > 3 \vee x < -2$

Graphische Lösung

$ax^2 + bx + c > 0 \qquad (>, <, \leq, \geq)$

- Äquivalenzumformung: Alle Terme auf die linke Seite
- Term als Funktion schreiben
- Nullstelle berechnen
- Graph der Funktion zeichnen
- Graph oberhalb der x-Achse $f(x) > 0$
- Graph unterhalb der x-Achse $f(x) < 0$
- x-Bereich aus dem Graphen ablesen

$\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 3 > 0$
$f_1(x) > 0$
Term als Funktion schreiben
$f_1(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 3$
Nullstelle berechnen
$\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 3 = 0$

$$x_{1/2} = \frac{+\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot (-3)}}{2 \cdot \frac{1}{2}}$$

$x_1 = 3 \qquad x_2 = -2$
Graph zeichnen $f_1(x)$
$\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 3 > 0$ der Graph ist oberhalb der x-Achse
x-Bereich aus dem Graphen ablesen
$x > 3 \vee x < -2$

Vorzeichentabelle

$ax^2 + bx + c > 0 \qquad (>, <, \leq, \geq)$

- Äquivalenzumformung: Alle Terme auf die linke Seite
- Term als Funktion schreiben
- Nullstelle berechnen
- Vorzeichentabelle:

Das Vorzeichen einer quadratischen Funktion kann sich nur an den Nullstellen ändern. Einen beliebigen Wert kleiner bzw. größer als die Nullstelle wählen und das Vorzeichen des Funktionswerts in die Vorzeichentabelle eintragen.

- x-Bereich aus der Vorzeichentabelle ablesen

$\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 3 > 0$
$f_1(x) > 0$
Term als Funktion schreiben
$f_1(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 3$
Nullstelle berechnen
$\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 3 = 0$

$$x_{1/2} = \frac{+\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot (-3)}}{2 \cdot \frac{1}{2}}$$

$x_1 = -2 \qquad x_2 = 3$
Wert kleiner als die Nullstelle $x_1 = -2$ wählen $\quad x = -4$
$f_1(-4) = +7$ Pluszeichen eintragen
Wert zwischen $x_1 = -2$ und $x_2 = 3$ wählen $\quad x = 0$
$f_1(0) = -3$ Minuszeichen eintragen
Wert größer als die Nullstelle $x_2 = 3$ wählen $\quad x = 4$
$f_1(4) = +3$ Pluszeichen eintragen
Vorzeichentabelle:

	$x <$	-2	$< x <$	3	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 3 > 0$
x-Bereiche aus der Vorzeichentabelle ablesen
$x \in]-\infty; -2[\quad \cup \quad]3; \infty[$

1.4.5 Betragsungleichung

$|ax+b|>c$

• Aufspalten der Beträge in einzelne Intervalle.

Betragsstriche sind nicht nötig, wenn der Term des Betrags positiv ist. $ax+b \geq 0$ für $x \geq \frac{-b}{a}$

Betragsstriche sind nicht nötig, wenn der Term des Betrags negativ ist und dafür zusätzlich ein Minuszeichen vor dem Term geschrieben wird. $ax+b<0$ für $x<\frac{-b}{a}$

$$|ax+b| = \begin{cases} (ax+b) & x \geq \frac{-b}{a} \\ -(ax+b) & x < \frac{-b}{a} \end{cases}$$

• 1. Lösung für $x \geq \frac{-b}{a}$

$ax+b>c$

$ax+b>c \quad /-b \quad /:a \qquad (a>0)$

$x>\frac{c-b}{a}$

1. Lösung ist die Schnittmenge aus $x \geq \frac{-b}{a} \wedge x > \frac{c-b}{a}$

• 2. Lösung für $x<\frac{-b}{a}$

$-(ax+b)>c \quad /:(-1)$

$ax+b<-c$

$ax+b<-c \quad /-b \quad /:a \quad (a>0)$

$x<\frac{-c-b}{a}$

2. Lösung ist die Schnittmenge aus $x<\frac{-b}{a} \wedge x<\frac{-c-b}{a}$

• Gesamtlösung aus Vereinigungsmenge von 1. Lösung und 2. Lösung

$|2x+3|>7$

$$|2x+3| = \begin{cases} (2x+3) & x \geq \frac{-3}{2} \\ -(2x+3) & x < \frac{-3}{2} \end{cases}$$

• 1. Lösung für $x \geq \frac{-3}{2}$

$2x+3>7$

$2x+3>7 \quad /-3 \quad /:2$

$x>2$

1. Lösung ist die Schnittmenge aus $x \geq \frac{-3}{2} \wedge x>2$

1. Lösung $x>2$

• 2. Lösung für $x<\frac{-3}{2}$

$-(2x+3)>7$

$2x+3<-7 \quad /-3 \quad /:2$

$x<-5$

2. Lösung ist die Schnittmenge aus $x<\frac{-3}{2} \wedge x<-5$

2. Lösung $x<-5$

Vereinigungsmenge aus 1. Lösung und 2. Lösung

$x>2 \quad \vee \quad x<-5$

$|2x+3|<7$

$$|2x+3| = \begin{cases} (2x+3) & x \geq \frac{-3}{2} \\ -(2x+3) & x < \frac{-3}{2} \end{cases}$$

• 1. Lösung für $x \geq \frac{-3}{2}$

$2x+3<7$

$2x+3<7 \quad /-3 \quad /:2$

$x<2$

1. Lösung ist die Schnittmenge aus $x \geq \frac{-3}{2} \wedge x<2$

1. Lösung $\frac{-3}{2} \leq x < 2$

• 2. Lösung für $x<\frac{-3}{2}$

$-(2x+3)<7$

$2x+3>-7 \quad /-3 \quad /:2$

$x>-5$

2. Lösung ist die Schnittmenge aus $x<\frac{-3}{2} \wedge x>-5$

2. Lösung $-5<x<\frac{-3}{2}$

Vereinigungsmenge aus 1. Lösung und 2. Lösung

$-5<x<2$

1.5 Lineares Gleichungssystem

1.5.1 Einsetzverfahren (2)

$I \quad a1 \cdot x + b1 \cdot y = c1$

$II \quad a2 \cdot x + b2 \cdot y = c2$

- Gleichung I oder II nach x oder y auflösen
- Term in die andere Gleichung einsetzen
- Gleichung nach der Unbekannten auflösen
- zweite Unbekannte berechnen

$I \quad 3x + 5y = 19$
$II \quad 7x + 5y = 31$
I nach x auflösen
$3x + 5y = 19$
$3x + 5y = 19 \quad / - 5y$
$3x = 19 - 5y \quad / : 3$
$x = 6\frac{1}{3} - 1\frac{2}{3}y$
I in II
$7(6\frac{1}{3} - 1\frac{2}{3}y) + 5y = 31$
$44\frac{1}{3} - 11\frac{2}{3}y + 5y = 31 \quad / - 44\frac{1}{3}$
$-11\frac{2}{3}y + 5y = 31 - 44\frac{1}{3}$
$-6\frac{2}{3}y = -13\frac{1}{3} \quad / : \left(-6\frac{2}{3}\right)$
$y = \frac{-13\frac{1}{3}}{-6\frac{2}{3}}$
$y = 2$
$x = 6\frac{1}{3} - 1\frac{2}{3}y$
$x = 6\frac{1}{3} - 1\frac{2}{3} \cdot 2$
$x = 3$
$L = \{3/2\}$

$I \quad 3x + 5y = 19$
$II \quad 7x + 5y = 31$
I nach y auflösen
$3x + 5y = 19$
$3x + 5y = 19 \quad / - 3x$
$5y = 19 - 3x \quad / : 5$
$y = 3\frac{4}{5} - \frac{3}{5}x$
I in II
$7x + 5(3\frac{4}{5} - \frac{3}{5}x) = 31$
$19 - 3x + 5x = 31 \quad / - 19$
$-3x + 5x = 31 - 19$
$4x = 12 \quad / : 4$
$x = \frac{12}{4}$
$x = 3$
$y = 3\frac{4}{5} - \frac{3}{5}x$
$y = 3\frac{4}{5} - \frac{3}{5} \cdot 3$
$y = 2$
$L = \{3/2\}$

Interaktive Inhalte:
hier klicken

1.5.2 Gleichsetzungsverfahren (2)

$I \quad a1 \cdot x + b1 \cdot y = c1$

$II \quad a2 \cdot x + b2 \cdot y = c2$

- beide Gleichungen nach x oder y auflösen
- Terme gleichsetzen
- Gleichung nach der Unbekannten auflösen
- zweite Unbekannte berechnen

$I \quad 3x + 5y = 19$
$II \quad 7x + 5y = 31$
I nach y auflösen
$3x + 5y = 19$
$3x + 5y = 19 \quad / - 3x$
$5y = 19 - 3x \quad / : 5$
$y = 3\frac{4}{5} - \frac{3}{5}x$
II nach y auflösen
$7x + 5y = 31$
$7x + 5y = 31 \quad / - 7x$
$5y = 31 - 7x \quad / : 5$
$y = 6\frac{1}{5} - 1\frac{2}{5}x$
I = II
$3\frac{4}{5} - \frac{3}{5}x = 6\frac{1}{5} - 1\frac{2}{5}x \quad / + \frac{3}{5}x$
$3\frac{4}{5} = 6\frac{1}{5} - \frac{4}{5}x \quad / - 6\frac{1}{5}$
$-2\frac{2}{5} = -\frac{4}{5}x \quad / : \left(-\frac{4}{5}\right)$
$x = 3$
x in I
$y = 3\frac{4}{5} - \frac{3}{5}3$
$y = 2$
$L = \{3/2\}$

$I \quad 3x + 5y = 19$
$II \quad 7x + 5y = 31$
I nach x auflösen
$3x + 5y = 19$
$3x + 5y = 19 \quad / - 5y$
$3x = 19 - 5y \quad / : 3$
$x = 6\frac{1}{3} - 1\frac{2}{3}y$
II nach x auflösen
$7x + 5y = 31$
$7x + 5y = 31 \quad / - 5y$
$7x = 31 - 5y \quad / : 7$
$x = 4\frac{3}{7} - \frac{5}{7}y$
I = II
$6\frac{1}{3} - 1\frac{2}{3}y = 4\frac{3}{7} - \frac{5}{7}y \quad / + 1\frac{2}{3}y$
$6\frac{1}{3} = 4\frac{3}{7} + \frac{20}{21}y \quad / - 4\frac{3}{7}$
$1\frac{19}{21} = \frac{20}{21}y \quad / : \frac{20}{21}$
$y = 2$
y in I
$x = 6\frac{1}{3} - 1\frac{2}{3}2$
$x = 3$
$L = \{3/2\}$

Interaktive Inhalte:
hier klicken

1.5.3 Additionsverfahren (2)

$I \quad a1 \cdot x + b1 \cdot y = c1$
$II \quad a2 \cdot x + b2 \cdot y = c2$

- Terme mit x und y müssen untereinander stehen
- Gleichungen multiplizieren, so dass die Variablen beim spaltenweisen addieren herausfallen
- Gleichung nach der Unbekannten auflösen
- zweite Unbekannte berechnen

$I \quad 3x + 5y = 19$
$II \quad 7x + 5y = 31$
$I \quad 3x + 5y = 19 \quad / \cdot 7$
$II \quad 7x + 5y = 31 \quad / \cdot (-3)$
$I \quad 21x + 35y = 133$
$II \quad -21x - 15y = -93$
I + II
$21x - 21x + 35y - 15y = 133 - 93$
$20y = 40 \quad / : 20$
$y = \frac{40}{20}$
$y = 2$
y in I
$I \quad 3x + 5 \cdot 2 = 19$
$3x + 10 = 19 \quad / - 10$
$3x = 19 - 10$
$3x = 9 \quad / : 3$
$x = \frac{9}{3}$
$x = 3$
$L = \{3/2\}$

$I \quad 3x + 5y = 19$
$II \quad 7x + 5y = 31$
$I \quad 3x + 5y = 19 \quad / \cdot 1$
$II \quad 7x + 5y = 31 \quad / \cdot (-1)$
$I \quad 3x + 5y = 19$
$II \quad -7x - 5y = -31$
I + II
$3x - 7x + 5y - 5y = 19 - 31$
$-4x = -12 \quad / : (-4)$
$x = \frac{-12}{-4}$
$x = 3$
x in I
$I \quad 3 \cdot 3 + 5y = 19$
$5y + 9 = 19 \quad / - 9$
$5y = 19 - 9$
$5y = 10 \quad / : 5$
$y = \frac{10}{5}$
$y = 2$
$L = \{3/2\}$

Interaktive Inhalte:
hier klicken

1.5.4 Determinantenverfahren (2)

$I \quad a1 \cdot x + b1 \cdot y = c1$
$II \quad a2 \cdot x + b2 \cdot y = c2$

$$D_h = \begin{vmatrix} a1 & b1 \\ a2 & b2 \end{vmatrix} = a1 \cdot b2 - b1 \cdot a2$$

$$D_x = \begin{vmatrix} c1 & b1 \\ c2 & b2 \end{vmatrix} = c1 \cdot b2 - b1 \cdot c2$$

$$D_y = \begin{vmatrix} a1 & c1 \\ a2 & c2 \end{vmatrix} = a1 \cdot c2 - c1 \cdot a2$$

- Eindeutige Lösung $D_h \neq 0$

$x = \frac{D_x}{D_h}$
$y = \frac{D_y}{D_h}$

- Keine Lösung $D_h = 0$

$D_x \neq 0$ oder $D_y \neq 0$

- Unendlich viele Lösungen

$D_h = D_x = D_y = 0$

$I \quad 3x + 5y = 19$
$II \quad 7x + 5y = 31$

$$D_h = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 - 5 \cdot 7 = -20$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 19 & 5 \\ 31 & 5 \end{vmatrix} = 19 \cdot 5 - 5 \cdot 31 = -60$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 3 & 19 \\ 7 & 31 \end{vmatrix} = 3 \cdot 31 - 19 \cdot 7 = -40$$

$x = \frac{-60}{-20}$
$x = 3$
$y = \frac{-40}{-20}$
$y = 2$
$L = \{3/2\}$

Interaktive Inhalte:
hier klicken

1.5.5 Determinantenverfahren (3)

$a1x + b1y + c1z = d1$

$a2x + b2y + c2z = d2$

$a3x + b3y + c3z = d3$

$$D_h = \begin{vmatrix} a1 & b1 & c1 \\ a2 & b2 & c2 \\ a3 & b3 & c3 \end{vmatrix} \begin{matrix} a1 & b1 \\ a2 & b2 \\ a3 & b3 \end{matrix}$$

$D_h = a1 \cdot b2 \cdot c3 + b1 \cdot c2 \cdot a3 + c1 \cdot a2 \cdot b3$

$- c1 \cdot b2 \cdot a3 - a1 \cdot c2 \cdot b3 - b1 \cdot a2 \cdot c3$

$$D_x = \begin{vmatrix} d1 & b1 & c1 \\ d2 & b2 & c2 \\ d3 & b3 & c3 \end{vmatrix} \begin{matrix} d1 & b1 \\ d2 & b2 \\ d3 & b3 \end{matrix}$$

$D_x = d1 \cdot b2 \cdot c3 + b1 \cdot c2 \cdot d3 + c1 \cdot d2 \cdot b3$

$- c1 \cdot b2 \cdot d3 - d1 \cdot c2 \cdot b3 - b1 \cdot d2 \cdot c3$

$$D_y = \begin{vmatrix} a1 & d1 & c1 \\ a2 & d2 & c2 \\ a3 & d3 & c3 \end{vmatrix} \begin{matrix} a1 & d1 \\ a2 & d2 \\ a3 & d3 \end{matrix}$$

$D_y = a1 \cdot d2 \cdot c3 + d1 \cdot c2 \cdot a3 + c1 \cdot a2 \cdot d3$

$- c1 \cdot d2 \cdot a3 - a1 \cdot c2 \cdot d3 - d1 \cdot a2 \cdot c3$

$$D_z = \begin{vmatrix} a1 & b1 & d1 \\ a2 & b2 & d2 \\ a3 & b3 & d3 \end{vmatrix} \begin{matrix} a1 & b1 \\ a2 & b2 \\ a3 & b3 \end{matrix}$$

$D_z = a1 \cdot b2 \cdot d3 + b1 \cdot d2 \cdot a3 + d1 \cdot a2 \cdot b3$

$- d1 \cdot b2 \cdot a3 - a1 \cdot d2 \cdot b3 - b1 \cdot a2 \cdot d3 = 0$

- Eindeutige Lösung $D_h \neq 0$

$x = \frac{D_x}{D_h}$

$y = \frac{D_y}{D_h}$

$z = \frac{D_z}{D_h}$

- Keine Lösung $D_h = 0$

$D_x \neq 0$ oder $D_y \neq 0$ oder $D_z \neq 0$

- Unendlich viele Lösungen

$D_h = D_x = D_y = D_z = 0$

$11x + 13y + 4z = 37$

$12x + 14y + 5z = 40$

$9x + 3y + 3z = 15$

$$D_h = \begin{vmatrix} 11 & 13 & 4 \\ 12 & 14 & 5 \\ 9 & 3 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 11 & 13 \\ 12 & 14 \\ 9 & 3 \end{matrix}$$

$D_h = 11 \cdot 14 \cdot 3 + 13 \cdot 5 \cdot 9 + 4 \cdot 12 \cdot 3$

$-4 \cdot 14 \cdot 9 - 11 \cdot 5 \cdot 3 - 13 \cdot 12 \cdot 3 = 54$

$$D_x = \begin{vmatrix} 37 & 13 & 4 \\ 40 & 14 & 5 \\ 15 & 3 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 37 & 13 \\ 40 & 14 \\ 15 & 3 \end{matrix}$$

$D_x = 37 \cdot 14 \cdot 3 + 13 \cdot 5 \cdot 15 + 4 \cdot 40 \cdot 3$

$-4 \cdot 14 \cdot 15 - 37 \cdot 5 \cdot 3 - 13 \cdot 40 \cdot 3 = 54$

$$D_y = \begin{vmatrix} 11 & 37 & 4 \\ 12 & 40 & 5 \\ 9 & 15 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 11 & 37 \\ 12 & 40 \\ 9 & 15 \end{matrix}$$

$D_y = 11 \cdot 40 \cdot 3 + 37 \cdot 5 \cdot 9 + 4 \cdot 12 \cdot 15$

$-4 \cdot 40 \cdot 9 - 11 \cdot 5 \cdot 15 - 37 \cdot 12 \cdot 3 = 108$

$$D_z = \begin{vmatrix} 11 & 13 & 37 \\ 12 & 14 & 40 \\ 9 & 3 & 15 \end{vmatrix} \begin{matrix} 11 & 13 \\ 12 & 14 \\ 9 & 3 \end{matrix}$$

$D_z = 11 \cdot 14 \cdot 15 + 13 \cdot 40 \cdot 9 + 37 \cdot 12 \cdot 3$

$-37 \cdot 14 \cdot 9 - 11 \cdot 40 \cdot 3 - 13 \cdot 12 \cdot 15 = 0$

$x = \frac{54}{54}$

$x = 1$

$y = \frac{108}{54}$

$y = 2$

$z = \frac{0}{54}$

$z = 0$

$L = \{1/2/0\}$

Interaktive Inhalte:
hier klicken

1.6 Lineare Algebra

1.6.1 Matrix

Definition

Eine $m \times n$–*Matrix* ist ein rechteckiges Zahlenschema aus m Zeilen und n Spalten.

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$A = (a_{ik})$

a_{ik} : Elemente der Matrix

i : Zeilenindex

k : Spaltenindex

• Quadratische Matrix

Die Anzahl der Zeilen ist gleich der Anzahl der Spalten.

$m = n$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

3×3Quadratische Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$a_{11} = 1 \quad a_{12} = 2 \quad a_{13} = 3$

$a_{21} = 4 \quad a_{22} = 5 \quad a_{23} = 6$

$a_{31} = 7 \quad a_{32} = 8 \quad a_{33} = 9$

2×3 Matrix

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 13 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

1×3 Zeilenmatrix (Zeilenvektor)

$C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

3×1 Spaltenmatrix (Spaltenvektor)

$$D = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Besondere Matrizen

• Einheitsmatrix

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \; E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

• Transponierte Matrix

Vertauschen von Zeilen- und Spaltenindex.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$A = (A^T)^T$

symmetrische Matrix

$$\begin{bmatrix} 10 & 4 & -2 \\ 4 & 3 & 6 \\ -2 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

obere Dreiecksmatrix

$$\begin{bmatrix} 10 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

untere Dreiecksmatrix

$$\begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ -2 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

Diagonalmatrix

$$\begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Nullmatrix

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Transponierte Matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Addition von Matrizen

Summe der Matrix $A = (a_{ik})$ und der Matrix $B = (b_{ik})$
Die Anzahl der Spalten (i) und der Zeilen(k) der beiden Matrizen müssen gleich sein. $A + B = a_{ik} + b_{ik}$

- Summe 2×2 Matrix

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{bmatrix}$$

- Summe 3×3 Matrix

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & a_{33} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33}+a_{33} \end{bmatrix}$$

Summe zweier 2×3 Matrizen

$$\begin{bmatrix} 1 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 0 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

Multiplikation von Matrizen

- Produkt aus der Matrix $A = (a_{ik})$ mit einer Konstanten $\lambda \in \mathbb{R}$:

$\lambda A = \lambda a_{ik}$

2×2 Matrix

$$\lambda \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ \lambda a_{12} & \lambda a_{22} \end{bmatrix}$$

- Produkt aus Matrix $A = (a_{ij})$ und Matrix $B = (b_{jk})$

Anzahl der Zeilen von A muss gleich der Anzahl der Spalten von B sein.
Zeilenelemente von A mal Spaltenelemente von B.

- Produkt zweier 2×2 Matrizen

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} & a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} \\ a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} & a_{21} \cdot b_{21} + a_{22} \cdot b_{22} \end{bmatrix}$$

Produkt 2×3 Matrix mit 3

$$3 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 15 \\ 0 & 12 & 6 \end{bmatrix}$$

Produkt 2×3 Matrix mit einer 3×2 Matrix

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 2 & -7 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 3 \cdot 1 + 4 \cdot (-2) + 1 \cdot 3 \\ 2 \cdot 2 + (-7) \cdot (-2) + 6 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ 34 \end{bmatrix}$$

Inverse Matrix

• Produkt aus der Matrix A und der inversen Matrix A^{-1} ist gleich der Einheitsmatrix.

$AA^{-1} = E$

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

• Die inverse Matrix ist nur möglich, wenn die Determinante von A ungleich Null ist.

$\det A \neq 0$

• Berechnung von A^{-1} mit dem Gauß-Jordan-Algorithmus

Matrix A und Einheitsmatrix E in der Form schreiben

A		E	
a_{11}	a_{12}	1	0
a_{21}	a_{22}	0	1

Umformen durch:

- Multiplizieren oder Dividieren der Zeilen mit einer Zahl
- Addieren oder Subtrahieren der Zeilen
- Vertauschen der Zeilen

in die Form Einheitsmatrix und inverse Matrix A^-1 bringen.

E		A^{-1}	
1	0	x_{11}	x_{12}
0	1	x_{21}	x_{22}

$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$

$det(A) = (-10) \Rightarrow$ Matrix ist invertierbar

$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$

$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Zeile2 = Zeile2 - Zeile1 $\cdot \frac{4}{2}$

$a21 = 4 - 2 \cdot \frac{4}{2} = 0$

$a22 = 1 - 3 \cdot \frac{4}{2} = -5$

$b21 = 0 - 1 \cdot \frac{4}{2} = 0$

$b22 = 1 - 0 \cdot \frac{4}{2} = 1$

$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

Zeile1 = Zeile1 - Zeile2 $\cdot \frac{3}{-5}$

$a12 = 3 - (-5) \cdot \frac{3}{-5} = 0$

$b11 = 1 - (-2) \cdot \frac{3}{-5} = 1$

$b12 = 0 - 1 \cdot \frac{3}{-5} = 0$

$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

Zeile1 = Zeile1 : 2

Zeile2 = Zeile2 : −5

$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

A			E		
1	2	−1	1	0	0
2	5	−1	0	1	0
1	2	0	0	0	1

E			$E' = A^{-1}$		
1	0	0	2	−2	3
0	1	0	−1	1	−1
0	0	1	−1	0	1

Eigenwert und Eigenvektor

Gegegeben: A - Matrix

Gesucht: x - Eigenvektor (Spaltenvektor)

λ - *Eigenwert*

Das Produkt aus Matrix A und Eigenvektor x ist gleich dem Produkt aus Eigenwert λ und Eigenvektor x.

$Ax = \lambda x$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix}$$

• Eigenwert aus folgender Gleichung:

$\det(A - \lambda \cdot E) = 0$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$\left| \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\left| \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{bmatrix} \right| = 0$$

$(a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}a_{21} = 0$

charakteristisches Polynom:

$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22}) \cdot \lambda + a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12} = 0$

• Eigenvektoren durch einsetzen der λ-Werte

$(A - \lambda E)x = 0$

$$\begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

$a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 = \lambda \cdot x_1$

$a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 = \lambda \cdot x_2$

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

$\det(A - \lambda \cdot E) = 0$

$$\begin{bmatrix} 7 - \lambda & 2 & 0 \\ -2 & 6 - \lambda & -2 \\ 0 & -2 & 5 - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

Interaktive Inhalte:

Matrix

1.6.2 Determinante

Definition

Aus einer quadratischen Matrix kann eine Determinante (Zahlenwert) berechnet werden.

D=det $A = |A|$

Anwendung der Determinante:

- Lineare Gleichungssysteme
- Volumenberechnung im R3
- Flächenberechnungen im R2
- Spatprodukt
- Lineare Abhängigkeit von Vektoren - inverse Matrix

2-reihige Determinante

Determinante einer 2×2 Matrix

$$D = \det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21}$$

$$D = \det A = |A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 - (-2) \cdot 4 = 23$$

3-reihige Determinante

Determinante einer 3×3 Matrix

Methode 1

$$D = \det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}(a_{22} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a_{32}) - a_{12}(a_{21} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a_{31}) +$$
$$a_{13}(a_{21} \cdot a_{32} - a_{22} \cdot a_{31})$$

Methode 2 (Regel von Sarrus)

$$\text{D}= \left| \begin{array}{ccc|cc} \overset{+}{a_1} & \overset{+}{b_1} & \overset{+}{c_1} & a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 \\ \underset{-}{a_3} & \underset{-}{b_3} & \underset{-}{c_3} & a_3 & b_3 \end{array} \right.$$

$$D = a1 \cdot b2 \cdot c3 + b1 \cdot c2 \cdot a3 + c1 \cdot a2 \cdot b3$$
$$- c1 \cdot b2 \cdot a3 - a1 \cdot c2 \cdot b3 - b1 \cdot a2 \cdot c3$$

$$D = \det A = |A| = \left| \begin{array}{ccc|cc} 11 & 13 & 4 & 11 & 13 \\ 12 & 14 & 5 & 12 & 14 \\ 9 & 3 & 3 & 9 & 3 \end{array} \right.$$

$D = 11 \cdot 14 \cdot 3 + 13 \cdot 5 \cdot 9 + 4 \cdot 12 \cdot 3$
$-4 \cdot 14 \cdot 9 - 11 \cdot 5 \cdot 3 - 13 \cdot 12 \cdot 3 = 54$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 11 & 12 & 9 \\ 13 & 14 & 3 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$11 \cdot \begin{vmatrix} 14 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} - 13 \cdot \begin{vmatrix} 12 & 9 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 12 & 9 \\ 14 & 3 \end{vmatrix} = 54$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 12 & 9 \\ 14 & 3 \end{vmatrix} = 12 \cdot 3 - 14 \cdot 9 = -90$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 12 & 9 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 12 \cdot 3 - 5 \cdot 9 = -9$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 14 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 14 \cdot 3 - 5 \cdot 3 = 27$$

$D_3 = 11 \cdot 27 - 13 \cdot (-9) + 4 \cdot (-90) = 54$

$det(D) = 54$

Interaktive Inhalte:

hier klicken | hier klicken | *Determinante*

1.6.3 Lineare Gleichungssysteme und Gauß-Algorithmus

Lineare Gleichungssysteme in Matrizenschreibweise

$Ax = b \qquad x = A^{-1}b$

A Koeffizientenmatrix

b Spaltenvektor der rechten Seite

x *Lösungsvektor*

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Inhomogenes Gleichungssystem:

$a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \cdots + a_{1n} \cdot x_n = b_1$

$a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \cdots + a_{2n} \cdot x_n = b_2$

$\vdots$

$a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \cdots + a_{mn} \cdot x_n = b_m$

Homogenes Gleichungssystem:

$a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \cdots + a_{1n} \cdot x_n = 0$

$a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \cdots + a_{2n} \cdot x_n = 0$

$\vdots$

$a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \cdots + a_{mn} \cdot x_n = 0$

Variablen:x_1,x_2,x_3

$a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + a_{13} \cdot x_3 = b_1$

$a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + a_{23} \cdot x_3 = b_2$

$a_{31} \cdot x_1 + a_{32} \cdot x_2 + a_{33} \cdot x_3 = b_m$

oder in der Schreibweise mit den Variablen:x, y, z

$a1 \cdot x + b1 \cdot y + c1 \cdot z = d1$

$a2 \cdot x + b2 \cdot y + c2 \cdot z = d2$

$a3 \cdot x + b3 \cdot y + c3 \cdot z = d3$

Erweiterte Koeffizientenmatrix:

x	y	z	
$a1$	$b1$	$c1$	$d1$
$a2$	$b2$	$c2$	$d2$
$a3$	$b3$	$c3$	$d3$

$Ax = b$

$$A = \begin{bmatrix} 11 & 13 & 4 \\ 12 & 14 & 5 \\ 9 & 3 & 3 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 37 \\ 40 \\ 15 \end{bmatrix} \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 11 & 13 & 4 \\ 12 & 14 & 5 \\ 9 & 3 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 37 \\ 40 \\ 15 \end{bmatrix}$$

$11x_1 + 13x_2 + 4x_3 = 37$

$12x_1 + 14x_2 + 5x_3 = 40$

$9x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 15$

oder

$11x + 13y + 4z = 37$

$12x + 14y + 5z = 40$

$9x + 3y + 3z = 15$

x	y	z	
11	13	4	37
12	14	5	40
9	3	3	15

Gaußsches Eliminationsverfahren

$a1 \cdot x + b1 \cdot y + c1 \cdot z = d1$
$a2 \cdot x + b2 \cdot y + c2 \cdot z = d2$
$a3 \cdot x + b3 \cdot y + c3 \cdot z = d3$

Koeffizientenmatrix erstellen:

x	y	z	
$a1$	$b1$	$c1$	$d1$
$a2$	$b2$	$c2$	$d2$
$a3$	$b3$	$c3$	$d3$

x	y	z	
$Zeile1Spalte1$	$z1s2$	$z1s3$	$z1s4$
$z2s1$	$z2s2$	$z2s3$	$z2s4$
$z3s1$	$z3s2$	$z3s3$	$z3s4$

Die Lösungsmenge ändert sich nicht durch:
- Multiplizieren oder Dividieren der Zeilen mit einer Zahl
- Addieren oder Subtrahieren der Zeilen
- Vertauschen der Zeilen

Umformen in die Stufenform
- Eindeutige Lösung

x	y	z	
$Z1S1$	$z1s2$	$z1s3$	$z1s4$
0	$z2s2$	$z2s3$	$z2s4$
0	0	$z3s3$	$z3s4$

Rückwärtseinsetzen
$z = \frac{z3s3}{z3s4}$
z in die 2. Zeile einsetzen ⇒ y
z und y in die 1. Zeile einsetzen ⇒ x

- Keine Lösung

x	y	z	
$Z1S1$	$z1s2$	$z1s3$	$z1s4$
0	$z2s2$	$z2s3$	$z2s4$
0	0	0	$z3s4$

- Unendlich viele Lösungen

x	y	z	
$Z1S1$	$z1s2$	$z1s3$	$z1s4$
0	$z2s2$	$z2s3$	$z2s4$
0	0	0	0

$11x + 13y + 4z = 37$
$12x + 14y + 5z = 40$
$9x + 3y + 3z = 15$

x	y	z	
11	13	4	37
12	14	5	40
9	3	3	15

$\text{Zeile2} = \text{Zeile2} \cdot 11 - \text{Zeile1} \cdot 12$
$z2s1 = 12 \cdot 11 - 11 \cdot 12 = 0$
$z2s2 = 14 \cdot 11 - 13 \cdot 12 = -2$
$z2s3 = 5 \cdot 11 - 4 \cdot 12 = 7$
$z2s4 = 40 \cdot 11 - 37 \cdot 12 = -4$

x	y	z	
11	13	4	37
0	−2	7	−4
9	3	3	15

$\text{Zeile3} = \text{Zeile3} \cdot 11 - \text{Zeile1} \cdot 9$
$z3s1 = 9 \cdot 11 - 11 \cdot 9 = 0$
$z3s2 = 3 \cdot 11 - 13 \cdot 9 = -84$
$z3s3 = 3 \cdot 11 - 4 \cdot 9 = -3$
$z3s4 = 15 \cdot 11 - 37 \cdot 9 = -168$

x	y	z	
11	13	4	37
0	−2	7	−4
0	−84	−3	−168

$\text{Zeile3} = \text{Zeile3} \cdot (-2) - \text{Zeile2} \cdot (-84)$
$z3s2 = (-84) \cdot -2 - (-2) \cdot (-84) = 0$
$z3s3 = (-3) \cdot -2 - 7 \cdot (-84) = 594$
$z3s4 = (-168) \cdot -2 - (-4) \cdot (-84) = 0$

x	y	z	
11	13	4	37
0	−2	7	−4
0	0	594	0

$z = \frac{0}{594} = 0$
$y \cdot (-2) + 7 \cdot 0 = (-4)$
$y = 2$
$x \cdot 11 + 13 \cdot 2 + 4 \cdot 0 = 37$
$x = 1$
$L = \{1/2/0\}$

Gauß-Jordan-Algorithmus

$a1 \cdot x + b1 \cdot y + c1 \cdot z = d1$
$a2 \cdot x + b2 \cdot y + c2 \cdot z = d2$
$a3 \cdot x + b3 \cdot y + c3 \cdot z = d3$

Koeffizientenmatrix erstellen:

x	y	z	
$a1$	$b1$	$c1$	$d1$
$a2$	$b2$	$c2$	$d2$
$a3$	$b3$	$c3$	$d3$

x	y	z	
$Zeile1Spalte1$	$z1s2$	$z1s3$	$z1s4$
$z2s1$	$z2s2$	$z2s3$	$z2s4$
$z3s1$	$z3s2$	$z3s3$	$z3s4$

Die Lösungsmenge ändert sich nicht durch:

- Multiplizieren oder Dividieren der Zeilen mit einer Zahl
- Addieren oder Subtrahieren der Zeilen
- Vertauschen der Zeilen

Ziel ist das Umformen in die Diagonalenform

- Eindeutige Lösung

x	y	z	
$z1s1$	0	0	$z1s4$
0	$z2s3$	0	$z2s4$
0	0	$z3s3$	$z3s4$

$x = \frac{z1s4}{z1s1}$
$y = \frac{z2s4}{z2s3}$
$z = \frac{z3s3}{z3s4}$

- Keine Lösung

x	y	z	
$z1s1$	0	0	$z1s4$
0	$z2s3$	0	$z2s4$
0	0	0	$z3s4$

- Unendlich viele Lösungen

x	y	z	
$z1s1$	0	0	$z1s4$
0	$z2s3$	0	$z2s4$
0	0	0	0

$11x + 13y + 4z = 37$
$12x + 14y + 5z = 40$
$9x + 3y + 3z = 15$

x	y	z	
11	13	4	37
12	14	5	40
9	3	3	15

$\text{Zeile2} = \text{Zeile2} - \text{Zeile1} \cdot \frac{12}{11}$
$z2s1 = 12 - 11 \cdot \frac{12}{11} = 0$
$z2s2 = 14 - 13 \cdot \frac{12}{11} = -\frac{2}{11}$
$z2s3 = 5 - 4 \cdot \frac{12}{11} = \frac{7}{11}$
$z2s4 = 40 - 37 \cdot \frac{12}{11} = -\frac{4}{11}$

x	y	z	
11	13	4	37
0	$-\frac{2}{11}$	$\frac{7}{11}$	$-\frac{4}{11}$
9	3	3	15

$\text{Zeile3} = \text{Zeile3} - \text{Zeile1} \cdot \frac{9}{11}$
$z3s1 = 9 - 11 \cdot \frac{9}{11} = 0$
$z3s2 = 3 - 13 \cdot \frac{9}{11} = -7\frac{7}{11}$
$z3s3 = 3 - 4 \cdot \frac{9}{11} = -\frac{3}{11}$
$z3s4 = 15 - 37 \cdot \frac{9}{11} = -15\frac{3}{11}$

x	y	z	
11	13	4	37
0	$-\frac{2}{11}$	$\frac{7}{11}$	$-\frac{4}{11}$
0	$-7\frac{7}{11}$	$-\frac{3}{11}$	$-15\frac{3}{11}$

$\text{Zeile1} = \text{Zeile1} - \text{Zeile2} \cdot \frac{13}{-\frac{2}{11}}$
$z1s2 = 13 - (-\frac{2}{11}) \cdot \frac{13}{-\frac{2}{11}} = 0$
$z1s3 = 4 - \frac{7}{11} \cdot \frac{13}{-\frac{2}{11}} = 49\frac{1}{2}$
$z1s4 = 37 - (-\frac{4}{11}) \cdot \frac{13}{-\frac{2}{11}} = 11$

x	y	z	
11	0	$49\frac{1}{2}$	11
0	$-\frac{2}{11}$	$\frac{7}{11}$	$-\frac{4}{11}$
0	$-7\frac{7}{11}$	$-\frac{3}{11}$	$-15\frac{3}{11}$

$\text{Zeile3} = \text{Zeile3} - \text{Zeile2} \cdot \frac{-7\frac{7}{11}}{-\frac{2}{11}}$
$z3s2 = -7\frac{7}{11} - (-\frac{2}{11}) \cdot \frac{-7\frac{7}{11}}{-\frac{2}{11}} = 0$
$z3s3 = -\frac{3}{11} - \frac{7}{11} \cdot \frac{-7\frac{7}{11}}{-\frac{2}{11}} = -27$
$z3s4 = -15\frac{3}{11} - (-\frac{4}{11}) \cdot \frac{-7\frac{7}{11}}{-\frac{2}{11}} = 0$

x	y	z	
11	0	$49\frac{1}{2}$	11
0	$-\frac{2}{11}$	$\frac{7}{11}$	$-\frac{4}{11}$
0	0	-27	0

$\text{Zeile1} = \text{Zeile1} - \text{Zeile3} \cdot \frac{49\frac{1}{2}}{-27}$
$z1s3 = 49\frac{1}{2} - (-27) \cdot \frac{49\frac{1}{2}}{-27} = 0$
$z1s4 = 11 - 0 \cdot \frac{49\frac{1}{2}}{-27} = 11$

x	y	z	
11	0	0	11
0	$-\frac{2}{11}$	$\frac{7}{11}$	$-\frac{4}{11}$
0	0	-27	0

$\text{Zeile2} = \text{Zeile2} - \text{Zeile3} \cdot \frac{\frac{7}{11}}{-27}$
$z2s3 = \frac{7}{11} - (-27) \cdot \frac{\frac{7}{11}}{-27} = 0$
$z2s4 = -\frac{4}{11} - 0 \cdot \frac{\frac{7}{11}}{-27} = -\frac{4}{11}$

x	y	z	
11	0	0	11
0	$-\frac{2}{11}$	0	$-\frac{4}{11}$
0	0	-27	0

$x = \frac{11}{11} = 1$
$y = \frac{-\frac{4}{11}}{-\frac{2}{11}} = 2$
$z = \frac{0}{-27} = 0$
$L = \{1/2/0\}$

Interaktive Inhalte:
hier klicken | $n - Gleichungen$ | hier klicken

1.7 Finanzmathematik

1.7.1 Zinsrechnung - Jahreszins

$z = \frac{K \cdot p \cdot t}{100}$

t	Anzahl der Jahre	
K	Kapital	*Euro*
p	Zinssatz	%
z	Zinsen	*Euro*

$p = \frac{z \cdot 100}{K \cdot t}$ $K = \frac{z \cdot 100}{p \cdot t}$ $t = \frac{z \cdot 100}{K \cdot p}$

Interaktive Inhalte:
$z = \frac{K \cdot p \cdot t}{100}$ $p = \frac{z \cdot 100}{K \cdot t}$ $K = \frac{z \cdot 100}{p \cdot t}$ $t = \frac{z \cdot 100}{K \cdot p}$

1.7.2 Zinsrechnung - Tageszins

$z = \frac{K \cdot p \cdot t}{100 \cdot 360}$

t	Anzahl der Tage	
K	Kapital	*Euro*
p	Zinssatz	%
z	Zinsen	*Euro*

$p = \frac{z \cdot 100 \cdot 360}{K \cdot t}$ $K = \frac{z \cdot 100 \cdot 360}{p \cdot t}$ $t = \frac{z \cdot 100 \cdot 360}{p \cdot K}$

Interaktive Inhalte:
$z = \frac{K \cdot p \cdot t}{100 \cdot 360}$ $p = \frac{z \cdot 100 \cdot 360}{K \cdot t}$ $K = \frac{z \cdot 100 \cdot 360}{p \cdot t}$ $t = \frac{z \cdot 100 \cdot 360}{p \cdot K}$

1.7.3 Zinsrechnung - Monatszins

$z = \frac{K \cdot p \cdot t}{100 \cdot 12}$

t	Anzahl der Monate	
K	Kapital	*Euro*
p	Zinssatz	%
z	Zinsen	*Euro*

$p = \frac{z \cdot 100 \cdot 12}{K \cdot t}$ $K = \frac{z \cdot 100 \cdot 12}{p \cdot t}$ $t = \frac{z \cdot 100 \cdot 12}{p \cdot K}$

Interaktive Inhalte:
$z = \frac{K \cdot p \cdot t}{100 \cdot 12}$ $p = \frac{z \cdot 100 \cdot 12}{K \cdot t}$ $K = \frac{z \cdot 100 \cdot 12}{p \cdot t}$ $t = \frac{z \cdot 100 \cdot 12}{p \cdot K}$

1.7.4 Zinsfaktor

$q = 1 + \frac{p}{100}$

p	Zinssatz	%
q	Zinsfaktor	

$p = (q - 1) \cdot 100$

Interaktive Inhalte:
$q = 1 + \frac{p}{100}$ $p = (q - 1) \cdot 100$

1.7.5 Zinseszinsformel

$K_t = K_0 \cdot (1 + \frac{p}{100})^t$

t	Anzahl der Jahre	
p	Zinssatz	%
K_0	Anfangskapital	*Euro*
K_t	Kapital nach t Jahren	*Euro*

$K_0 = \frac{K_t}{(1+\frac{p}{100})^t}$ $p = (\sqrt[t]{\frac{K_t}{K_0}} - 1) \cdot 100$ $t = \frac{\ln(K_t) - \ln(K_0)}{\ln(1+\frac{p}{100})}$

Interaktive Inhalte:
$K_t = K_0 \cdot (1 + \frac{p}{100})^t$ $K_0 = \frac{K_t}{(1+\frac{p}{100})^t}$ $p = (\sqrt[t]{\frac{K_t}{K_0}} - 1) \cdot 100$ $t = \frac{\ln(K_t) - \ln(K_0)}{\ln(1+\frac{p}{100})}$

1.7.6 Degressive Abschreibung

$B_t = B_0 \cdot (1 - \frac{p}{100})^t$

t	Anzahl der Jahre	
p	Abschreibungssatz	%
B_0	Anschaffungswert	*Euro*
B_t	Buchwert	*Euro*

$B_0 = \frac{B_t}{(1-\frac{p}{100})^t}$ $\quad t = \frac{\ln(B_t)-\ln(B_0)}{\ln(1-\frac{p}{100})}$ $\quad p = (1 - \sqrt[t]{\frac{B_t}{B_0}}) \cdot 100$

Interaktive Inhalte:

$B_t = B_0 \cdot (1 - \frac{p}{100})^t$ $\quad B_0 = \frac{B_t}{(1-\frac{p}{100})^t}$ $\quad t = \frac{\ln(B_t)-\ln(B_0)}{\ln(1-\frac{p}{100})}$ $\quad p = (1 - \sqrt[t]{\frac{B_t}{B_0}}) \cdot 100$

1.7.7 Rentenrechnung

Vorschüssiger Rentenendwert

$$R_n = r \cdot q \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

q - Zinsfaktor
r - Rente
n - Anzahl der Jahre
R_n - Rentenendwert

$r = \frac{R_n \cdot (q-1)}{q \cdot (q^n - 1)}$

$n = \frac{ln[\frac{R_n \cdot (q-1)}{r \cdot q} + 1]}{ln\ q}$

Nachschüssiger Rentenendwert

$$R_n = r \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

q - Zinsfaktor
r - Rente
n - Anzahl der Jahre
R_n - Rentenendwert

$r = \frac{R_n \cdot (q-1)}{q^n - 1}$

$n = \frac{ln[\frac{R_n \cdot (q-1)}{r} + 1]}{ln\ q}$

Vorschüssiger Rentenendwert mit Startkapital

Kapitalmehrung:

$$R_n = K_0 \cdot q^n + r \cdot q \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Kapitalminderung:

$$R_n = K_0 \cdot q^n - r \cdot q \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

q - Zinsfaktor
r - Rente
K_0 - Startkapital
n - Anzahl der Jahre
R_n - Rentenendwert

Nachschüssiger Rentenendwert mit Startkapital

Kapitalmehrung:

$$R_n = K_0 \cdot q^n + r \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Kapitalminderung:

$$R_n = K_0 \cdot q^n - r \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

q - Zinsfaktor
r - Rente
K_0 - Startkapital
n - Anzahl der Jahre
R_n - Rentenendwert

Rentenendwert - Rentenbarwert

$$R_0 = \frac{R_n}{q^n}$$

q - Zinsfaktor
n - Anzahl der Jahre
R_0 - Rentenbarwert
R_n - Rentenendwert
$R_n = R_0 \cdot q^n$
$n = \frac{\ln \frac{R_n}{R_0}}{\ln \ q} = \frac{\ln R_n - \ln R_0}{\ln \ q}$

Interaktive Inhalte:

$R_n = r \cdot q \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$ $R_n = r \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$

$r = \frac{R_n \cdot (q - 1)}{q \cdot (q^n - 1)}$ $r = \frac{R_n \cdot (q - 1)}{q^n - 1}$

$n = \frac{ln[\frac{R_n \cdot (q - 1)}{r \cdot q} + 1]}{ln \ q}$ $n = \frac{ln[\frac{R_n \cdot (q - 1}{r}}{ln \ q}$