Formelsammlung Analytische Geometrie

http://www.fersch.de

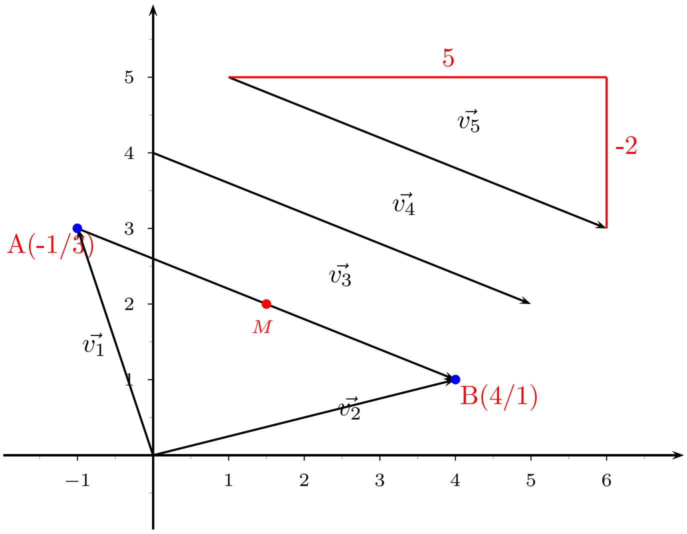
9. August 2017

Inhaltsverzeichnis

6 Analytische Geometrie

6.1 Vektorrechung in der Ebene

6.1.1 Vektor - Abstand - Steigung - Mittelpunkt



Vektor - Ortsvektor

• Vektor $\vec{v}$ - Menge aller parallelgleicher Pfeile

$\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

• Ortsvektor $\vec{v}$ - Vektor zwischen einem Punkt und dem Koordinatenursprung

$A(x_a/y_a)$

$\vec{A} = \vec{OA} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix}$

• Gegenvektor $\vec{v}$ - gleiche Länge und Richtung aber entgegengesetzte Orientierung

$\vec{v} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$

Vektoren: $\vec{AB} = \vec{v_3} = \vec{v_4} = \vec{v_5}$
$= \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$

Ortsvektor: $\vec{A} = \vec{v_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Ortsvektor: $\vec{B} = \vec{v_2} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

Gegenvektor zu $\vec{v_5} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$

Vektor zwischen 2 Punkten

2 Punkte: $A(x_a/y_a)$ $\quad B(x_b/y_b)$

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} x_b - x_a \\ y_b - y_a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \end{pmatrix}$$

Punkte: $A(-1/3)$ $\quad B(4/1)$
Vektor zwischen zwei Punkten

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 4+1 \\ 1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Länge des Vektors - Betrag des Vektors - Abstand zwischen zwei Punkten

$$\left|\vec{AB}\right| = \sqrt{x_c^2 + y_c^2}$$
$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2)}$$

$$\left|\vec{AB}\right| = \left|\vec{AB}\right| = \sqrt{5^2 + (-2)^2}$$
$$\left|\vec{AB}\right| = \sqrt{29}$$
$$\left|\vec{AB}\right| = 5,39$$

Steigung der Graden AB

$\vec{AB} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Steigung der Graden AB

$m = \frac{y}{x}$

Winkel des Vektors mit der x-Achse

$\tan \alpha = m$

Steigng der Geraden AB

$m = \frac{-2}{5}$

Mittelpunkt der Strecke AB

$\vec{M} = \frac{1}{2}\left(\vec{A} + \vec{B}\right)$

$\vec{M} = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \end{pmatrix}\right)$

$M(\frac{x_a+x_b}{2} / \frac{y_a+y_b}{2})$

Mittelpunkt der Strecke AB

$\vec{M} = \frac{1}{2}\left(\vec{A} + \vec{B}\right)$

$\vec{M} = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

$\vec{M} = \begin{pmatrix} 1\frac{1}{2} \\ 2 \end{pmatrix}$

$M(1\frac{1}{2}/2)$

Vektorkette

Punkt: $A(x_a/y_a)$

Vektor : $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\vec{OB} = \vec{OA} + \vec{v} \qquad \vec{B} = \vec{A} + \vec{v}$

$\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$A(-1/3) \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$

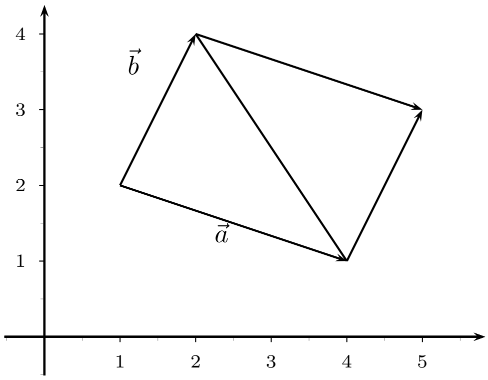
$\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

$B(4/1)$

Interaktive Inhalte: hier klicken

6.1.2 Skalarprodukt - Fläche - Winkel



$\vec{a} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \end{pmatrix}$

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Steigung der Vektoren

$m_a = \frac{y_a}{x_a} \qquad m_a = \frac{y_b}{x_b}$

$m_a = m_b \Rightarrow$ Vektoren sind parallel

Steigung

$m_s = \frac{y_a}{x_a} = \frac{-1}{3} = -\frac{1}{3}$

$m_b = \frac{y_b}{x_b} = \frac{2}{1} = 2$

Skalarprodukt

$$\vec{a} \circ \vec{b} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \end{pmatrix} = x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b$$

Senkrechte Vektoren:

$\vec{a} \circ \vec{b} = 0 \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$

$$\vec{a} \circ \vec{b} == \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 3 \cdot 1 + -1 \cdot 2 = 1$$

Fläche aus 2 Vektoren

Fläche des Parallelogramms aus $\vec{a}, \vec{b}$

$$A = \begin{vmatrix} x_a & x_b \\ y_a & y_b \end{vmatrix} = x_a \cdot y_b - y_a \cdot x_b$$

Fläche des Dreiecks aus $\vec{a}, \vec{b}$

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_a & x_b \\ y_a & y_b \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \left(x_a \cdot y_b - y_a \cdot x_b \right)$$

Fläche des Parallelogramms aus $\vec{a}, \vec{b}$

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 - -1 \cdot 1 = 7$$

Fläche des Dreiecks aus $\vec{a}, \vec{b}$

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(3 \cdot 2 - (-1) \cdot 1) = 3\frac{1}{2}$$

Winkel zwischen Vektoren

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right|}$$

$$\cos \alpha = \frac{x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2} \cdot \sqrt{x_b^2 + y_b^2}}$$

Schnittwinkel:

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right|}$$

$$\cos \alpha = \frac{3 \cdot 1 + -1 \cdot 2}{\sqrt{3^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{1^2 + 2^2}}$$

$$\cos \alpha = \left| \frac{1}{3,16 \cdot 2,24} \right|$$

$$\cos \alpha = |0,141|$$

$$\alpha = 81,9$$

Interaktive Inhalte: hier klicken

6.1.3 Abbildungen

Lineare Abbildung in Matrixform - Koordinatenform

Matrixform

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

Koordinatenform

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot x + b \cdot y \\ c \cdot x + d \cdot y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot x + b \cdot y + e \\ c \cdot x + d \cdot y + f \end{pmatrix}$$

$$x' = a \cdot x + b \cdot y + e \qquad y' = c \cdot x + d \cdot y + f$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 4 \\ 3 \cdot 5 + 4 \cdot 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 31 \end{bmatrix}$$

Verschiebung

Punkt: $P(x_p/y_p)$

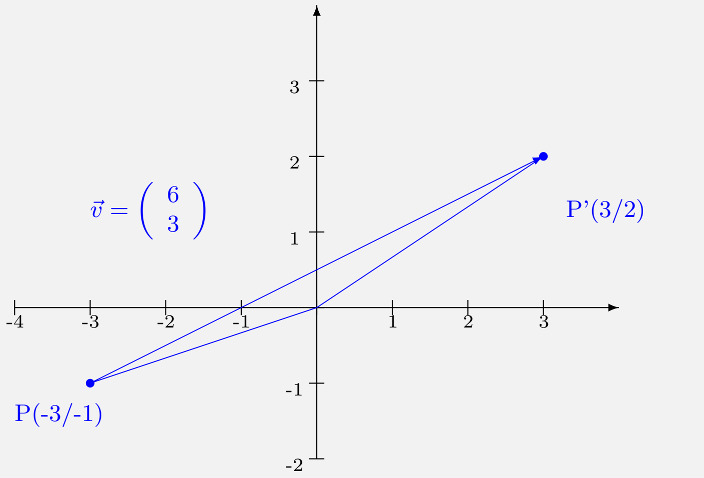
Vektor : $\vec{v} = \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x_{P'} \\ y_{P'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x_{P'} \\ y_{P'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix}$

$\vec{OP'} = \vec{OP} + \vec{v}$

$\vec{OP'} = \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$



$P(-3/-1)$ $\quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\vec{OP'} = \vec{OP} + \vec{v}$

$\vec{OP'} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\vec{OP'} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$P'(3/2)$

Spiegelung an den Koordinatenachsen

Spiegelung an der x–Achse

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$$

$$x' = x \qquad y' = -y$$

Spiegelung an der y–Achse

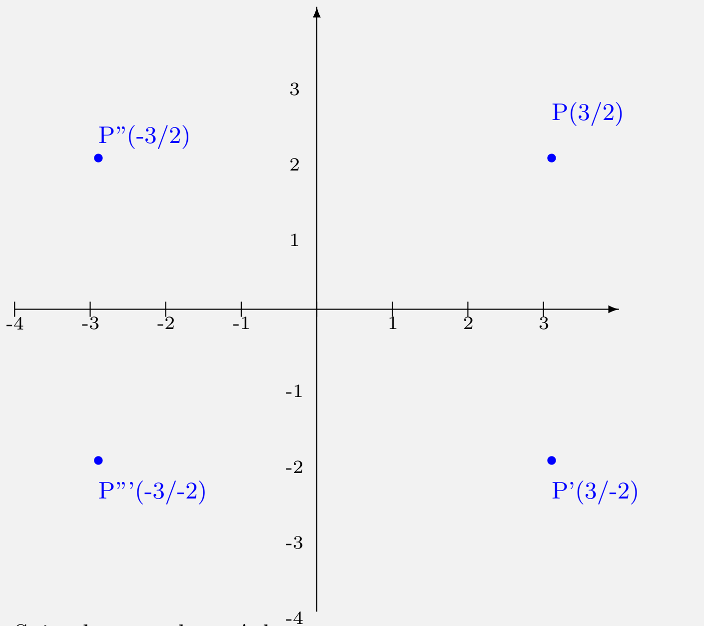
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$$

$$x' = -x \qquad y' = y$$

Spiegelung am Ursprung

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$$

$$x' = -x \qquad y' = -y$$



Spiegelung an der x-Achse
$P(3/2) \longmapsto P'(3/-2)$
Spiegelung an der y-Achse
$P(3/2) \longmapsto P''(-3/2)$
Spiegelung am Ursprung
$P(3/2) \longmapsto P'''(-3/-2)$

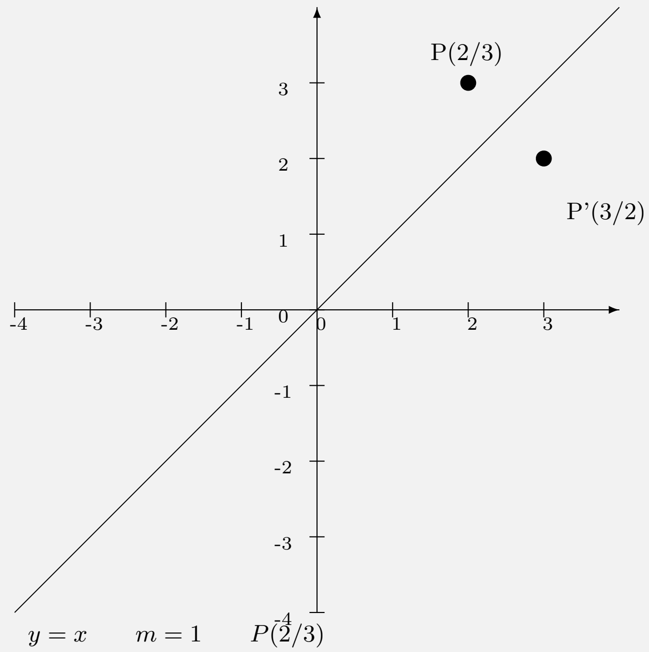
Spiegelung an der Urspungsgerade

$$y = m \cdot x \qquad \tan\alpha = m$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' = x \cdot \cos 2\alpha + y \cdot \sin 2\alpha \\ y' = x \cdot \sin 2\alpha - y \cdot \cos 2\alpha \end{pmatrix}$$

$$x' = x \cdot \cos 2\alpha + y \cdot \sin 2\alpha \qquad y' = x \cdot \sin 2\alpha - y \cdot \cos 2\alpha$$



$y = x \qquad m = 1 \qquad P(2/3)$

$tan\alpha = 1 \qquad \alpha = 45°$

$x' = x \cdot \cos 2\alpha + y \cdot \sin 2\alpha$

$x' = 2 \cdot \cos 2 \cdot 45° + 3 \cdot \sin 2 \cdot 45°$

$x' = 3$

$y' = x \cdot \sin 2\alpha - y \cdot \cos 2\alpha$

$y' = 2 \cdot \sin 2 \cdot 45° - 3 \cdot \cos 2 \cdot 45°$

$y' = 2$

$P(2/3) \longmapsto P'(3/2)$

Zentrische Streckung

Streckzentrum: $Z(0/0)$
Streckungsfaktor :k
Urpunkt: $P(x_P/y_P)$
Bildpunkt: $P'(x_{P'}/y_{P'})$

$$\begin{pmatrix} x_{P'} \\ y_{P'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_{P'} \\ y_{P'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot x \\ k \cdot y \end{pmatrix}$$

Streckzentrum: $Z(x_z/y_z)$
Streckungsfaktor:k
Urpunkt: $P(x_P/y_P)$
Bildpunkt: $P'(x_{P'}/y_{P'})$
Vektorform

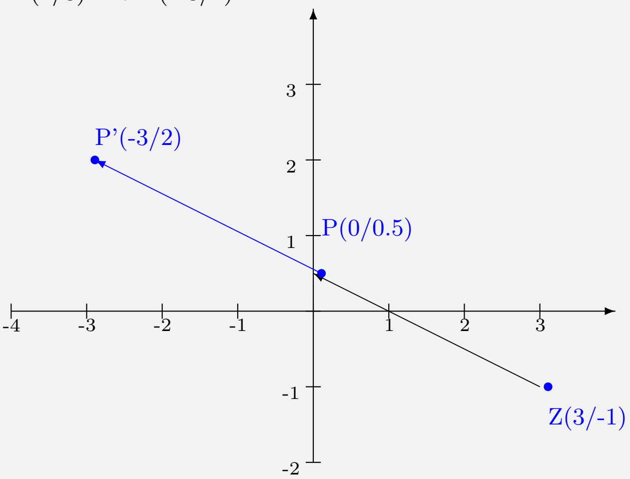
$$\vec{ZP'} = k \cdot \vec{ZP}$$

$$\begin{pmatrix} x_{P'} - x_Z \\ y_{P'} - y_Z \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} x_P - x_Z \\ y_P - y_Z \end{pmatrix}$$

$$\vec{OP'} = k \cdot \vec{ZP} + \vec{OZ}$$

$$\begin{pmatrix} x_{P'} \\ y_{P'} \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} x_P - x_Z \\ y_P - y_Z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_Z \\ y_Z \end{pmatrix}$$

$P(2/3) \longmapsto P(-3/2)$



Streckzentrum: $Z(3/-1)$
Streckungsfaktor:2
Urpunkt: $P(0/0,5)$
Bildpunkt: $P'(x_{P'}/y_{P'})$

$$\vec{OP'} = k \cdot \vec{ZP} + \vec{OZ}$$

$$\begin{pmatrix} x_{P'} \\ y_{P'} \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 0-3 \\ 0,5-(-1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_{P'} \\ y_{P'} \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1,5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_{P'} \\ y_{P'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_{P'} \\ y_{P'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$P'(-3/2)$

Drehung um den Ursprung

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' = x \cdot \cos\alpha - y \cdot \sin\alpha \\ y' = x \cdot \sin\alpha + y \cdot \cos\alpha \end{pmatrix}$$

$x' = x \cdot \cos\alpha - y \cdot \sin\alpha \qquad y' = x \cdot \sin\alpha + y \cdot \cos\alpha$

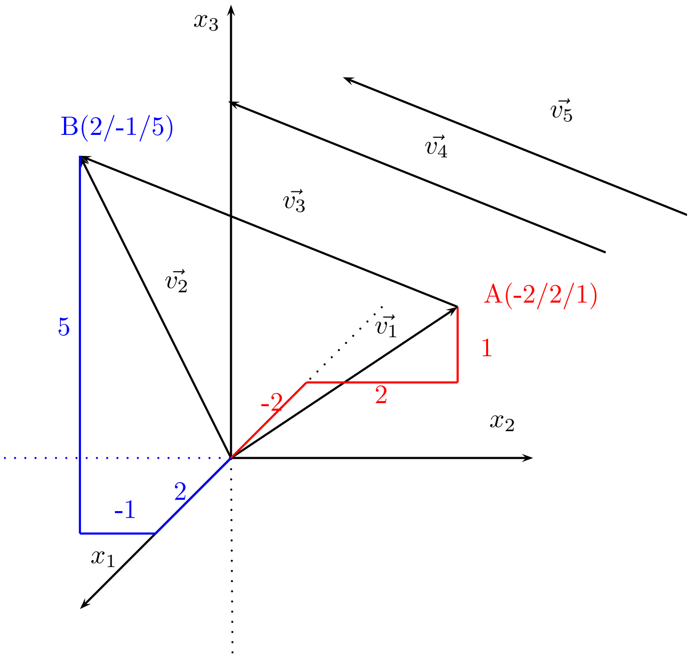
Orthogonale Affinität mit der x-Achse als Affinitätsachse

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ k \cdot y \end{pmatrix}$$

$x' = x \qquad y' = k \cdot y$

6.2 Vektor

6.2.1 Vektor - Abstand - Mittelpunkt



Vektor - Ortsvektor

• Vektor $\vec{v}$ - Menge aller parallelgleicher Pfeile

$\vec{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

• Ortsvektor $\vec{v}$ - Vektor zwischen einem Punkt und dem Koordinatenursprung

$A(x_a/y_a)$

$\vec{A} = \vec{OA} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$

• Gegenvektor $\vec{v}$ - gleiche Länge und Richtung aber entgegengesetzte Orientierung

$\vec{v} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ -x_3 \end{pmatrix}$

Vektoren: $\vec{AB} = \vec{v_3} = \vec{v_4}$
$= \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$

Ortsvektor: $\vec{A} = \vec{v_1} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Ortsvektor: $\vec{B} = \vec{v_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$

Gegenvektor zu $\vec{v_5} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$

Vektor zwischen 2 Punkten

2 Punkte: $A(a_1/a_2/a_3) \quad B(b_1/b_2/b_3)$

$\vec{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$

Punkte: $A(-2/2/1) \quad B(2/-1/5)$
Vektor zwischen zwei Punkten
$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 2+2 \\ -1-2 \\ 5-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$

Länge des Vektors - Betrag des Vektors - Abstand zwischen zwei Punkten

$$\left|\vec{AB}\right| = \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}$$
$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$

$$\left|\vec{AB}\right| = \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}$$
$$\left|\vec{AB}\right| = \sqrt{4^2 + (-3)^2 + 4^2}$$
$$\left|\vec{AB}\right| = \sqrt{41}$$
$$\left|\vec{AB}\right| = 6,4$$

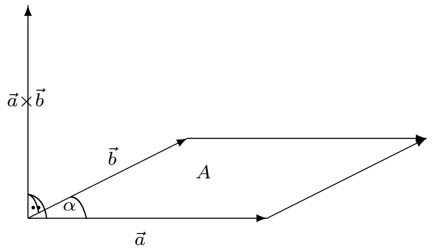
Mittelpunkt der Strecke AB

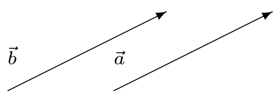
$$\vec{M} = \tfrac{1}{2}\left(\vec{A} + \vec{B}\right)$$
$$\vec{M} = \tfrac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}\right)$$
$$M\left(\tfrac{a_1+b_1}{2} / \tfrac{a_2+b_2}{2} / \tfrac{a_3+b_3}{2}\right)$$

Mittelpunkt der Strecke AB
$$\vec{M} = \tfrac{1}{2}\left(\vec{A} + \vec{B}\right)$$
$$\vec{M} = \tfrac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}\right)$$
$$\vec{M} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 3 \end{pmatrix}$$
$$M(0/\tfrac{1}{2}/3)$$

Interaktive Inhalte: hier klicken

6.2.2 Winkel - Skalarprodukt - Vektorprodukt - Abhängigkeit





$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Länge der Vektoren

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$
$$\left|\vec{b}\right| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}$$

Länge der Vektoren:
$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$
$$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}$$
$$|\vec{a}| = 3$$
$$\left|\vec{b}\right| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}$$
$$\left|\vec{b}\right| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + (-2)^2}$$
$$\left|\vec{b}\right| = 3$$

Skalarprodukt

$$\vec{a} \circ \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} =$$
$$a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$$

Senkrechte Vektoren:
$$\vec{a} \circ \vec{b} = 0 \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$$

Skalarprodukt:
$$\vec{a} \circ \vec{b} = 2 \cdot -2 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot -2 = -7$$

Vektorprodukt - Fläche des Parallelogramms

$\vec{c} \perp \vec{a}$ und $\vec{c} \perp \vec{b}$

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_1 - b_3 \cdot a_1 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

Fläche des Parallelogramms:

$A = \left| \vec{a} \times \vec{b} \right|$

$A = |\vec{c}| = \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}$

Fläche des Dreiecks aus $\vec{a}, \vec{b}$

$A = \frac{1}{2} \left| \vec{a} \times \vec{b} \right|$

Vektorprodukt:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \cdot (-2) - 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot (-2) - (-2) \cdot 2 \\ 2 \cdot 1 - 1 \cdot (-2) \end{pmatrix}$$

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Fläche des Parallelogramms:

$|\vec{c}| = \sqrt{(-4)^2 + 0^2 + 4^2}$

$|\vec{c}| = 5,657$

Winkel zwischen Vektoren

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right|}$$

$$\cos\alpha = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

Schnittwinkel:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right|}$$

$$\cos\alpha = \left| \frac{-7}{3 \cdot 3} \right|$$

$\cos\alpha = \left| -\frac{7}{9} \right|$

$\alpha = 38,942$

Lineare Abhängigkeit von 2 Vektoren

$$\begin{array}{lllll} a_1 & = & b_1 k & / : b_1 & \Rightarrow k_1 \\ a_2 & = & b_2 k & / : b_2 & \Rightarrow k_2 \\ a_3 & = & b_3 k & / : b_3 & \Rightarrow k_3 \end{array}$$

$k_1 = k_2 = k_3 \Rightarrow$

Vekoren sind linear abhängig - parallel

nicht alle k gleich $\Rightarrow$

Vektoren sind linear unabhängig - nicht parallel

Lineare Abhängigkeit von 2 Vektoren

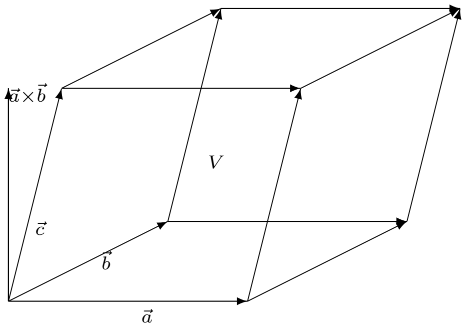
$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

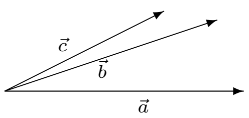
$$\begin{array}{lllll} 2 & = & -2k & / : -2 & \Rightarrow k = -1 \\ 1 & = & 1k & / : 1 & \Rightarrow k = 1 \\ 2 & = & -2k & / : -2 & \Rightarrow k = -1 \end{array}$$

$\Rightarrow$ Vektoren sind linear unabhängig - nicht parallel

Interaktive Inhalte: hier klicken

6.2.3 Spatprodukt - lineare Abhängigkeit - Basisvektoren - Komplanarität





$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$

Spatprodukt: $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} =$

$\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$

Vektorprodukt von $\vec{a}, \vec{b}$ skalar multipliziert mit $\vec{c}$

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\left(\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -3 \cdot 2 - 4 \cdot (-7) \\ 4 \cdot (-4) - 2 \cdot 3 \\ 3 \cdot (-7) - (-3) \cdot (-4) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} 22 \\ -22 \\ -33 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 44$

Spatprodukt = Wert der Determinante

Spatprodukt: $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) =$

$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = a_1 \cdot b_2 \cdot c_3 + b1 \cdot c2 \cdot a_3 + c1 \cdot a_2 \cdot b_3$

$-c1 \cdot b2 \cdot a_3 - a_1 \cdot c2 \cdot b3 - b1 \cdot a_2 \cdot c_3$

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$D = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 7 \\ -3 & -7 & 2 \\ 4 & 2 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 3 & -4 \\ -3 & -7 \\ 4 & 2 \end{matrix}$

$D = 3 \cdot (-7) \cdot 2 + (-4) \cdot 2 \cdot 4 + 7 \cdot (-3) \cdot 2$

$-7 \cdot (-7) \cdot 4 - 3 \cdot 2 \cdot 2 - (-4) \cdot (-3) \cdot 2$

$D = 44$

Spatprodukt - Volumen

•Volumen von Prisma oder Spat

$V = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$

•Volumen einer Pyramide mit den Grundflächen:

Quadrat,Rechteck,Parallelogramm

$V = \frac{1}{3}(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$

• Volumen ein dreiseitigen Pyramide

$V = \frac{1}{6}(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$V = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 7 \\ -3 & -7 & 2 \\ 4 & 2 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 3 & -4 \\ -3 & -7 \\ 4 & 2 \end{matrix}$

$V = 3 \cdot (-7) \cdot 2 + (-4) \cdot 2 \cdot 4 + 7 \cdot (-3) \cdot 2$

$-7 \cdot (-7) \cdot 4 - 3 \cdot 2 \cdot 2 - (-4) \cdot (-3) \cdot 2$

$V = 44$

Eigenschaften von 3 Vektoren

• $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0 \Rightarrow$ die drei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

- sind linear abhängig
- liegen in einer Ebene (komplanar)
- sind keine Basisvektoren

• $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} \neq 0 \Rightarrow$ die drei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

- sind linear unabhängig
- liegen nicht in einer Ebene
- sind Basisvektoren

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 44$

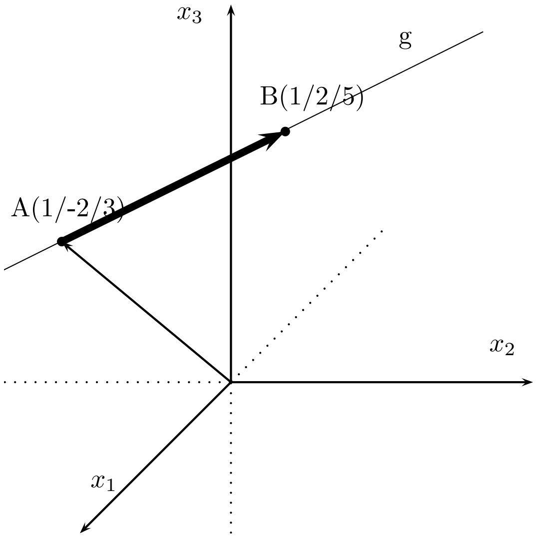
$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} \neq 0 \Rightarrow$ die drei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

- sind linear unabhängig
- liegen nicht in einer Ebene
- sind Basisvektoren

Interaktive Inhalte: hier klicken

6.3 Gerade

6.3.1 Gerade aus 2 Punkten



Punkte: $A(a_1/a_2/a_3)$ $B(b_1/b_2/b_3)$

Richtungsvektor

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

Punkt A oder B als Aufpunkt wählen

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

Punkte: $A(1/-3/3)$ $B(1/2/5)$

Gerade aus zwei Punkten:

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 1-1 \\ 2+3 \\ 5-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Besondere Geraden

$x_1 -$ Achse $\quad \vec{x} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

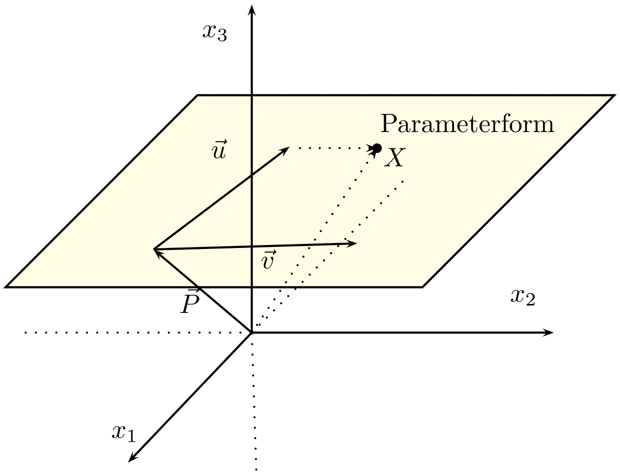
$x_2 -$ Achse $\quad \vec{x} = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

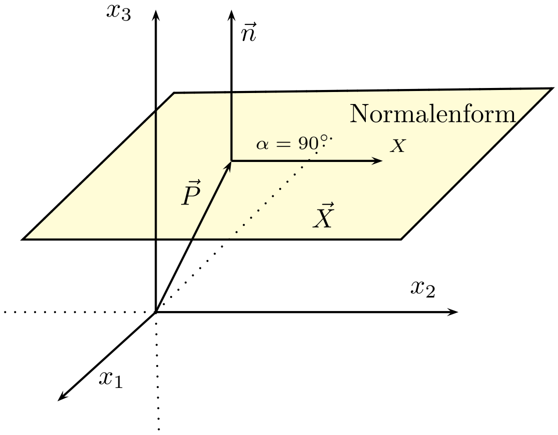
$x_3 -$ Achse $\quad \vec{x} = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Interaktive Inhalte: hier klicken

6.4 Ebene

6.4.1 Parameterform - Normalenform





Parameterform

$\vec{x}$ - Ortsvektor zu einem Punkt X in der Ebene

$\vec{P}$ - Aufpunkt (Stützvektor,Ortsvektor)

$\vec{u}, \vec{v}$ - Richtungsvektoren

λ, σ-Parameter

$\vec{x} = \vec{P} + \lambda \cdot \vec{u} + \sigma \cdot \vec{v}$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

Normalenform - Koordinatenform

$\vec{x}$ - Ortsvektor zu einem Punkt X in der Ebene

$\vec{n}$ - Normalenvektor

$\vec{P}$ - Aufpunkt (Stützvektor,Ortsvektor)

$\vec{n} \cdot (\vec{x} - \cdot\vec{p}) = 0$

$$\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \circ \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \right) = 0$$

Koordinatenform:

$n_1(x_1 - p_1) + n_2(x_2 - p_2) + n_3(x_3 - p_3) = 0$

$n_1 x1 - n1p1 + n_2 x_2 - n_2 p_2 + n_3 x_3 - n_3 p_3 = 0$

$c = -(n_1 p_1 + n_2 p_2 + n_3 p_3)$

$n_1 x1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 + c = 0$

Normalenvektor: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

Punkt in der Ebene $P(2/-1/1)$

Nomalenform:

$\vec{n} \cdot (\vec{x} - \cdot\vec{p}) = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \circ \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = 0$$

Koordinatenform:

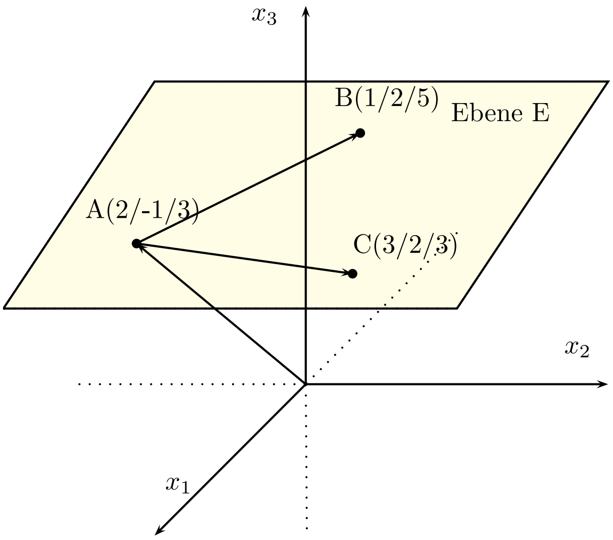
$1(x_1 - 2) + 2(x_2 + 1) + 3(x_3 - 1) = 0$

$x1 + 2x_2 + 3x_3 - 3 = 0$

Besondere Ebenen

Ebene	Parameterform	Koordinatenform
$x1 - x2$	$\vec{x} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$x_3 = 0$
$x1 - x3$	$\vec{x} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	$x_2 = 0$
$x2 - x3$	$\vec{x} = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	$x_1 = 0$

6.4.2 Ebenengleichung aufstellen



Ebene aus 3 Punkten

Punkte: $A(a_1/a_2/a_3)$ $B(b_1/b_2/b_3)$ $C(c_1/c_2/c_3)$

Die 3 Punkte dürfen nicht auf einer Geraden liegen.

Ebene aus drei Punkten:

Richtungsvektor: $\vec{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$

Richtungsvektor: $\vec{AC} = \begin{pmatrix} c_1 - a_1 \\ c_2 - a_2 \\ c_3 - a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$

Ebenengleichung aus Aufpunkt und den Richtungsvektoren.

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$$

Punkte: $A(2/-1/3)$ $B(1/2/5)$ $C(3/2/3)$

Ebene aus drei Punkten:

$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 1-2 \\ 2+1 \\ 5-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\vec{AC} = \begin{pmatrix} 3-2 \\ 2+1 \\ 3-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

Ebene aus Gerade und Punkt

Der Punkte darf nicht auf der Geraden liegen.

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Punkt: $C(c_1/c_2/c_3)$

Richtungsvektor zwischen Aufpunkt A und dem Punkt C

$$\vec{AC} = \begin{pmatrix} c_1 - a_1 \\ c_2 - a_2 \\ c_3 - a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$$

Gerade: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$

Punkt: $C(2/0/1)$

$$\vec{AC} = \begin{pmatrix} 2-1 \\ 0-3 \\ 1+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Ebene aus zwei parallelen Geraden

Gerade 1: $\vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

Gerade 2: $\vec{x} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$

Bei parallelen Geraden sind Richtungsvektoren linear abhängig. Für die Ebenengleichung muß ein 2. Richtungsvektor erstellt werden. 2. Richtungsvektor zwischen den Aufpunkten A und C.

Ebenengleichung in Parameterform

$$\vec{AC} = \begin{pmatrix} c_1 - a_1 \\ c_2 - a_2 \\ c_3 - a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$$

Gerade 1: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

Gerade 2: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

Richtungsvektoren:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{rcll} 2 & = & +4k & /:4 \quad \Rightarrow k = \frac{1}{2} \\ 0 & = & +0k & /:0 \quad \Rightarrow k = \mathit{beliebig} \\ -1 & = & -2k & /:-2 \quad \Rightarrow k = \frac{1}{2} \end{array}$$

$\Rightarrow$ Geraden sind parallel

Aufpunkt von Gerade 2 in Gerade 1

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Punkt: $A(3/4/5)$

$$\begin{array}{rcll} 3 & = & 1 \; +2\lambda & /-1 \\ 4 & = & 3 \; +0\lambda & /-3 \\ 5 & = & 0 \; -1\lambda & /-0 \\ 2 & = & 2\lambda & /:2 \quad \Rightarrow \lambda = 1 \\ 1 & = & 0\lambda & \quad \Rightarrow \text{falsch} \\ 5 & = & -1\lambda & /:-1 \quad \Rightarrow \lambda = -5 \end{array}$$

$\Rightarrow$

Geraden sind echt parallel

2. Richtungsvektor zwischen den Aufpunkten A und C

$$\vec{AC} = \begin{pmatrix} 3-1 \\ 4-3 \\ 5-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Ebenengleichung in Parameterform

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Ebene aus zwei sich schneidenden Geraden

Gerade 1: $\vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

Gerade 2: $\vec{x} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$

Bei sich schneidenden Geraden sind Richtungsvektoren linear unabhängig.

Ebenengleichung in Parameterform

$\vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$

Gerade 1: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ -8 \end{pmatrix}$

Gerade 2: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$

Die Geraden schneiden sich im Punkt $S(5, -9, 0)$

Ebenengleichung in Parameterform

$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ -8 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$

Interaktive Inhalte: 3 Punkte - Punkt und Gerade - Parallele Geraden -

6.4.3 Parameterform - Koordinatenform

1. Methode: Determinante

$\vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$

$D = \left| \begin{array}{ccc|cc} x_1 - a_1 & b_1 & c_1 & x_1 - a_1 & b_1 \\ x_2 - a_2 & b_2 & c_2 & x_2 - a_2 & b_2 \\ x_3 - a_3 & b_3 & c_3 & x_3 - a_3 & b_3 \end{array} \right. = 0$

$(x_1 - a_1) \cdot b_2 \cdot c_3 + b1 \cdot c2 \cdot (x_3 - a_3) +$

$c1 \cdot (x_2 - a_2) \cdot b_3 - c1 \cdot b2 \cdot (x_3 - a_3) -$

$(x_1 - a_1) \cdot c2 \cdot b3 - b1 \cdot (x_2 - a_2) \cdot c_3 = 0$

Koordinatenform:

$n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 + k = 0$

$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$

$D = \left| \begin{array}{ccc|cc} x_1 - 1 & -2 & 2 & x_1 - 1 & -2 \\ x_2 + 3 & 4 & -5 & x_2 + 3 & 4 \\ x_3 - 2 & 3 & 0 & x_3 - 2 & 3 \end{array} \right. = 0$

$(x_1 - 1) \cdot 4 \cdot 0 + (-2) \cdot (-5) \cdot (x_3 - 2) + 2 \cdot (x_2 + 3) \cdot 3-$

$2 \cdot 4 \cdot (x_3 - 2) - (x_1 - 1) \cdot (-5) \cdot 3 - (-2) \cdot (x_2 + 3) \cdot 0 = 0$

$15x_1 + 6x_2 + 2x_3 - 1 = 0$

Koordinatenform:

$15x_1 + 6x_2 + 2x_3 - 1 = 0$

2. Methode: Vektorprodukt

$\vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$

Normalenvektor der Ebene mit dem Vektorprodukt

$\vec{n} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_2 \cdot c_3 - b_3 \cdot c_2 \\ b_3 \cdot c_1 - c_3 \cdot b_1 \\ b_1 \cdot c_2 - b_2 \cdot c_1 \end{pmatrix}$

$\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$

Normalenvektor der Ebene und Aufpunkt in die Koordinatenform einsetzen.

$n_1 a_1 + n_2 a_2 + n_3 a_3 + k = 0$

k berechnen

$n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 + k = 0$

$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Vektorprodukt:

$\vec{n} = \vec{b} \times \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot (-1) - 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 0 - (-1) \cdot (-1) \end{pmatrix}$

$\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Normalenvektor in die Koordinatenform einsetzen.

$-1x_1 - 1x_2 - 1x_3 + k = 0$

Aufpunkt in die Koordinatenform einsetzen.

$-1 \cdot 1 - 1 \cdot 2 - 1 \cdot 1 + k = 0$

$k = -4$

Koordinatenform

$-1x_1 - 1x_2 - 1x_3 - 4 = 0$

Interaktive Inhalte: Determinante - Vektorprodukt -

6.4.4 Koordinatenform - Parameterform

1. Methode

$n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + k = 0$

•x_1 durch einen Parameter ersetzen

$x_1 = \lambda$

•x_2 durch einen Parameter σ ersetzen

$x_2 = \sigma$

• Koordinatenform nach x_3 auflösen

$x_3 = -\frac{k}{n_3} - \frac{n_1}{n_3}x_1 - \frac{n_2}{n_3}x_2$

• Ebene in Punktdarstellung :

$x_1 = 0 + 1 \cdot \lambda + 0 \cdot \sigma$

$x_2 = 0 + 0 \cdot \lambda + 1 \cdot \sigma$

$x_3 = -\frac{k}{n_3} - \frac{n_1}{n_3}\lambda - \frac{n_2}{n_3}\sigma$

• Parameterform der Ebene

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{k}{n_3} \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{n_1}{n_3} \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{n_2}{n_3} \end{pmatrix}$$

$4x_1 + 8x_2 + 2x_3 - 2 = 0$

•x_1 durch einen Parameter ersetzen

$x_1 = \lambda$

•x_2 durch einen Parameter σ ersetzen

$x_2 = \sigma$

• Koordinatenform nach x_3 auflösen

$x_3 = -\frac{2}{2} - \frac{4}{2}x_1 - \frac{8}{2}x_2$

$x_3 = 1 - 2x_1 - 4x_2$

• Ebene in Punktdarstellung :

$x_1 = 0 + 1 \cdot \lambda + 0 \cdot \sigma$

$x_2 = 0 + 0 \cdot \lambda + 1 \cdot \sigma$

$x_3 = 1 - 2\lambda - 4\sigma$

• Parameterform der Ebene

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$4x_1 - 2 = 0$

•x_2 durch einen Parameter ersetzen

$x_2 = \lambda$

•x_3 durch einen Parameter σ ersetzen

$x_3 = \sigma$

• Koordinatenform nach x_1 auflösen

$x_1 = \frac{1}{2}$

• Ebene in Punktdarstellung :

$x_1 = \frac{1}{2} + 0 \cdot \lambda + 0 \cdot \sigma$

$x_2 = 0 + 1 \cdot \lambda + 0 \cdot \sigma$

$x_3 = 0 + 0 \cdot \lambda + 1 \cdot \sigma$

• Parameterform der Ebene

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. Methode

• Drei beliebige Punkte, die in der Ebene liegen ermitteln.

• Die Richtungsvektoren müssen linear unabhängig sein.

• Ebenengleichung aus 3 Punkten aufstellen.

$4x_1 + 8x_2 + 2x_3 - 2 = 0$

•$x_1 = 0$ $x_2 = 0$ frei wählen und in die Ebenengleichung einsetzen.$\Rightarrow x_3 = 1$ und $P_1(0/0/1)$

• 2 weitere Punkte ermitteln: $P_2(1/0/-1)$ $P_3(0/1/-3)$

• Die Richtungvektoren sind linear unabhängig:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

• Parameterform der Ebene

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

6.4.5 Koordinatenform - Hessesche Normalenform

Koordinatenform:

$n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + k_1 = 0$

Normalenvektor

$\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$

Länge des Normalenvektors:

$|\vec{n}| = \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}$

Hessesche Normalenform:

$k1 < 0$

HNF: $\dfrac{n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + k_1}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}} = 0$

$k1 > 0$

HNF: $\dfrac{n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + k_1}{-\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}} = 0$

Koordinatenform:

$15x_1 + 6x_2 + 2x_3 - 1 = 0$

$\vec{n} = \begin{pmatrix} 15 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$

Länge des Normalenvektors:

$|\vec{n}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$

$|\vec{n}| = \sqrt{15^2 + 6^2 + 2^2}$

$|\vec{n}| = 16,3$

Hessesche Normalenform:

HNF: $\dfrac{15x_1 + 6x_2 + 2x_3 - 1}{16,3} = 0$

Interaktive Inhalte: hier klicken

6.5 Kugel

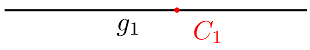
6.5.1 Kugelgleichung

$M(m_1/m_2/m_3)$ - Mittelpunkt der Kugel
r - Radius der Kugel
$X(x_1/x_2/x_3)$ - beliebiger Punkt auf der Kugel
Kugelgleichung:
$(x_1 - m_1)^2 + (x_2 - m_2)^2 + (x_2 - m_2)^2 = r^2$

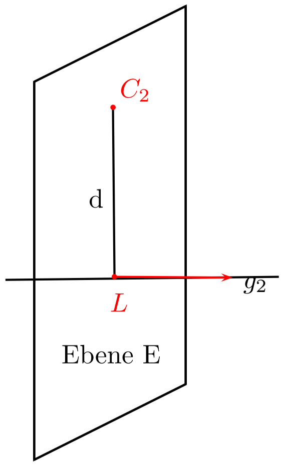
$M(3/2/-4)$ – Mittelpunkt der Kugel
$r = 6$ – Radius der Kugel
$X(x_1/x_2/x_3)$ – beliebiger Punkt auf der Kugel
Kugelgleichung:
$(x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2)^2 + (x_2 + 4)^2 = 6^2$

6.6 Lagebeziehung

6.6.1 Punkt - Gerade



Punkt C_1 liegt auf der Geraden g_1



Abstand d des Punktes C_2 von der Geraden g_2

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Punkt: $C(c_1/c_2/c_3)$

$$\begin{array}{llll} c_1 = & a_1 & + & b_1\lambda_1 & \Rightarrow \lambda_1 \\ c_1 = & a_2 & + & b_2\lambda_2 & \Rightarrow \lambda_2 \\ c_1 = & a_3 & + & b_3\lambda_3 & \Rightarrow \lambda_3 \end{array}$$

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 \Rightarrow$

Punkt liegt auf der Geraden

nicht alle λ gleich $\Rightarrow$

Punkt liegt nicht auf der Geraden

Lotfußpunkt und Abstand des Punktes berechnen.

Die Koordinatenform der Ebenengleichung aufstellen, die senkrecht zur Geraden ist und den Punkt C enthält.

Richtungsvektor der Geraden = Normalenvektor der Ebene. Der Lotfußpunkt ist der Schnittpunkt zwischen Gerade und Ebene.

Abstand des Punktes, ist die Länge des Vektors $\vec{LC}$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Punkt: $C(7, 9, -6)$

$$\begin{array}{cclll} 7 & = & 1 & -2\lambda & / -1 \\ 9 & = & 3 & -2\lambda & / -3 \\ -6 & = & -3 & +2\lambda & / +3 \\ 6 & = & -2\lambda & / : -2 & \Rightarrow \lambda = -3 \\ 6 & = & -2\lambda & / : -2 & \Rightarrow \lambda = -3 \\ -3 & = & 2\lambda & / : 2 & \Rightarrow \lambda = -1\frac{1}{2} \end{array}$$

$\Rightarrow$ Punkt liegt nicht auf der Geraden

Lotfußpunkt und Abstand des Punktens berechnen.

Richtungsvektor der Geraden = Normalenvektor der Ebene.

$-2x_1 - 2x_2 + 2x_3 + k = 0$

C ist Punkt in der Ebene

$-2 \cdot 7 - 2 \cdot 9 + 2 \cdot 7 + k = 0$

$k = 44$

$-2x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 44 = 0$

Lotfußpunkt ist der Schnittpunkt zwischen Gerade und Ebene.

$$\begin{array}{lll} x_1 = & 1 & -2\lambda \\ x_2 = & 3 & -2\lambda \\ x_3 = & -3 & +2\lambda \end{array}$$

$-2(1 - 2\lambda) - 2(3 - 2\lambda) + 2(-3 + 2\lambda) + 44 = 0$

$12\lambda + 30 = 0$

$\lambda = \frac{-30}{12}$

$\lambda = -2\frac{1}{2}$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} - 2\tfrac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Lotfußpunkt: $L(6, 8, -8)$

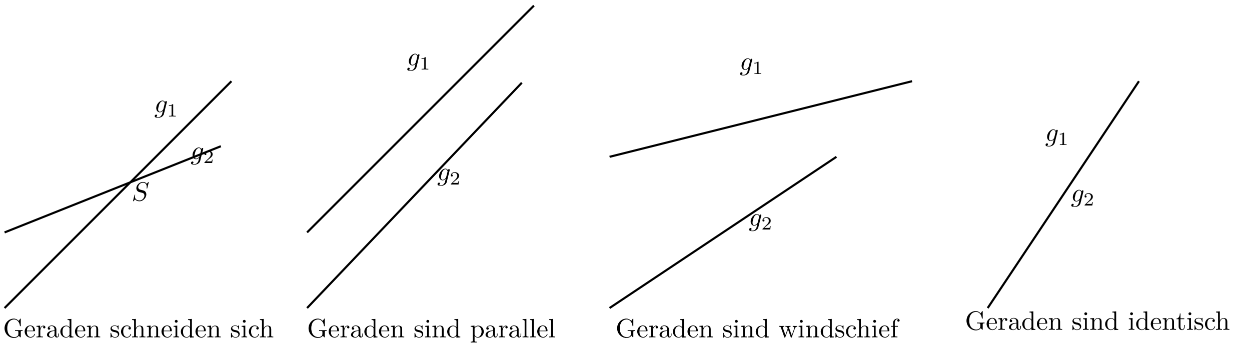
$$\vec{CL} = \begin{pmatrix} 12 - 7 \\ 30 - 9 \\ -2\frac{1}{2} + 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Abstand Punkt Gerade

$$\left|\vec{CL}\right| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + (-2)^2}$$

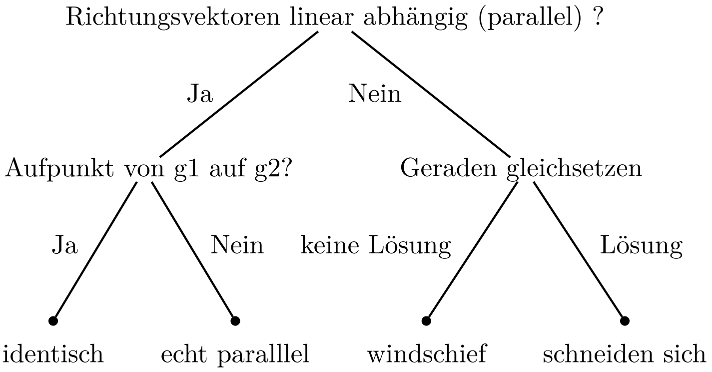
Interaktive Inhalte: hier klicken

6.6.2 Gerade - Gerade



Gerade 1: $\vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

Gerade 2: $\vec{x} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$



Gerade 1: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ -8 \end{pmatrix}$

Gerade 2: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$

Richtungsvektoren:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ -8 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccccc} 4 & = & -4k & /:-4 & \Rightarrow k = -1 \\ -7 & = & -4k & /:-4 & \Rightarrow k = 1\frac{3}{4} \\ -8 & = & -3k & /:-3 & \Rightarrow k = 2\frac{2}{3} \end{array}$$

$\Rightarrow$ Geraden sind nicht parallel

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cccccc} 1 & +4\lambda & = & 9 & -4\sigma & /-1 \quad /+4\sigma \\ -2 & -7\lambda & = & -5 & -4\sigma & /+2 \quad /+4\sigma \\ 8 & -8\lambda & = & 3 & -3\sigma & /-8 \quad /+3\sigma \end{array}$$

$I \quad 4\lambda + 4\sigma = 8$
$II \quad -7\lambda + 4\sigma = -3$
$III \quad -8\lambda - 3\sigma = -5$

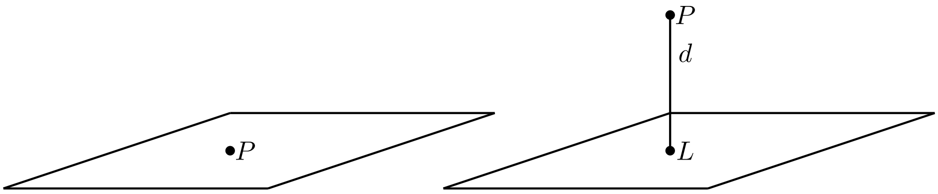
Aus den Gleichungen I und II λ und σ berechnen
$\sigma = 1$
$\lambda = 1$
λ und σ in die verbleibende Gleichung einsetzen
$III \quad 8 + 1 \cdot (-8) = 3 + 1 \cdot (-3)$
$0 = 0$
λ oder σ in die Geradengleichung einsetzen

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ -8 \end{pmatrix}$$

Schnittpunkt: $S(5, -9, 0)$

Interaktive Inhalte: hier klicken

6.6.3 Punkt - Ebene (Koordinatenform)



Punkt liegt in der Ebene

Punkt liegt nicht in der Ebene

Punkt: $A(a_1/a_2/a_3)$

Ebene: $n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + c_1 = 0$

$n_1 \cdot a_1 + n_2 \cdot a_2 + n_3 \cdot a_3 + c_1 = 0$

• Liegt der Punkt in der Ebene?

Punkt in die Ebene einsetzen.

Gleichung nach Umformung: $0 = 0 \Rightarrow$ Punkt liegt in der Ebene

• Abstand Punkt - Ebene

Punkt in die HNF einsetzen.

Punkt: $A(1/2/0)$
Ebene: $-1x_1 - 3x_2 + 1x_3 + 7 = 0$
$-1 \cdot 1 - 3 \cdot 2 + 1 \cdot 0 + 7 = 0$
$0 = 0$
Punkt liegt in der Ebene

Punkt: $A(2/-4/3)$
Ebene: $-1x_1 - 3x_2 + 1x_3 + 7 = 0$
$-1 \cdot 2 - 3 \cdot (-4) + 1 \cdot 3 + 7 = 0$
$20 = 0$
Punkt liegt nicht in der Ebene
Abstand des Punktes von der Ebene
Koordinatenform in Hessesche Normalenform HNF
$-1x_1 - 3x_2 + 1x_3 + 7 = 0$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

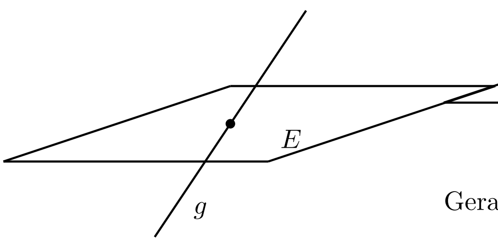
Länge des Normalenvektors:
$|\vec{n}| = \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}$
$|\vec{n}| = \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2 + 1^2}$
$|\vec{n}| = 3,32$
HNF:
$\frac{-1x_1 - 3x_2 + 1x_3 + 7}{-3,32} = 0$
Punkt in HNF:

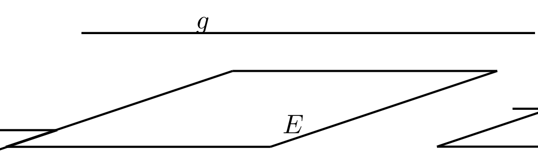
$$d = \left|\frac{-1 \cdot 2 - 3 \cdot (-4) + 1 \cdot 3 + 7}{-3,32}\right|$$

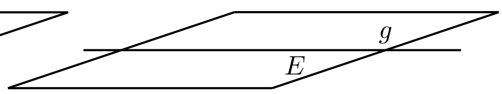
$d = |-6,03|$
$d = 6,03$

Interaktive Inhalte: hier klicken

6.6.4 Gerade - Ebene (Koordinatenform)







Gerade ist parallel zur Ebene

Gerade liegt in der Ebene

Gerade schneidet Ebene

Gerade: $\vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

Ebene: $n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + c_1 = 0$

Gerade1 in Punktdarstellung

$x_1 = a_1 + b_1\lambda$

$x_2 = a_2 + b_2\lambda$

$x_3 = a_3 + b_3\lambda$

x_1, x_2, x_3 in die Ebenengleichung einsetzen

$n_1(a_1 + b_1\lambda) + n_2(a_2 + b_2\lambda) + n_3(a_3 + b_3\lambda) + c_1 = 0$

Die Gleichung nach der Variablen auflösen.

• Schnittpunkt zwischen Gerade und Ebene

Auflösung nach einer Variablen ist möglich. Variable in die Gerade einsetzen

• Geraden und Ebene sind parallel

Auflösung nach der Variablen ist nicht möglich. λ heben sich auf.

Gleichung nach Umformung: $Konstante = 0$

• Gerade liegt in der Ebene

Auflösung nach der Variablen ist nicht möglich. λ heben sich auf.

Gleichung nach Umformung:$0 = 0$

Gerade: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$

Ebene: $1x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 10 = 0$

$x_1 = \; 3 \; +4\lambda$

$x_2 = \; 5 \; +5\lambda$

$x_3 = \; 7 \; +5\lambda$

$1(3 + 4\lambda) - 2(5 + 5\lambda) + 5(7 + 5\lambda) + 10 = 0$

$19\lambda + 38 = 0$

$\lambda = \frac{-38}{19}$

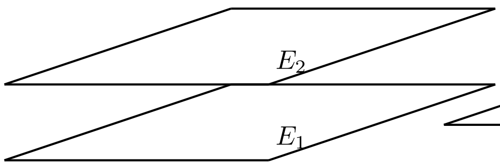
$\lambda = -2$

$\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$

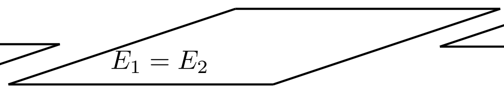
Schnittpunkt: $S(-5, -5, -3)$

Interaktive Inhalte: hier klicken

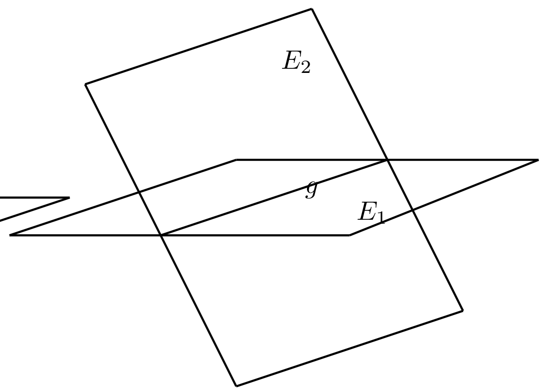
6.6.5 Ebene - Ebene



Ebenen sind parallel



Ebenen sind identisch



Ebenen schneiden sich

Parameterform - Koordinatenform

Parameterform - Ebene1

$$\vec{x}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}+\sigma\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}$$

Koordinatenform - Ebene2

$n_1x_1+n_2x_2+n_3x_3+k_1=0$

Ebene1 in Punktdarstellung

$x_1=a_1+b_1\lambda+c_1\sigma$

$x_2=a_2+b_2\lambda+c_2\sigma$

$x_3=a_3+b_3\lambda+c_2\sigma$

x_1,x_2,x_3 in die Ebenengleichung einsetzen

$n_1(a_1+b_1\lambda+c_1\sigma)+$

$n_2(a_2+b_2\lambda+c_2\sigma)+$

$n_3(a_3+b_3\lambda+c_2\sigma)+k1=0$

Die Gleichung nach einer Variablen auflösen

• Schnittgerade zwischen den Ebenen

Auflösung nach einer Variablen ist möglich. λ oder σ in die Parameterform einsetzen

• Ebenen sind parallel

Auflösung nach einer Variablen ist nicht möglich. λ und σ heben sich auf

Gleichung nach Umformung: $Konstante=0$

• Ebenen sind identisch

Auflösung nach einer Variablen ist nicht möglich. λ und σ heben sich auf

Gleichung nach Umformung: $0=0$

Ebene: $\vec{x}=\begin{pmatrix}-2\\-4\\2\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}+\sigma\begin{pmatrix}0\\-1\\-2\end{pmatrix}$

Ebene: $1x_1+1x_2+0x_3+0=0$

$$\begin{array}{llll} x_1= & -2 & +1\lambda & +0\sigma\\ x_2= & -4 & +2\lambda & -1\sigma\\ x_3= & 2 & +2\lambda & -1\sigma\end{array}$$

$1(-2+1\lambda+0\sigma)+1(-4+2\lambda-1\sigma)+0(2+2\lambda-2\sigma)+0=0$

$3\lambda-1\sigma-6=0$

$\sigma=\frac{-3\lambda+6}{-1}$

$\sigma=3\lambda-6$

$\vec{x}=\begin{pmatrix}-2\\-4\\2\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}+(3\lambda-6)\cdot\begin{pmatrix}0\\-1\\-2\end{pmatrix}$

Schnittgerade: $\vec{x}=\begin{pmatrix}-2\\2\\14\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}1\\-1\\-4\end{pmatrix}$

Parameterform - Parameterform

Eine Ebene in die Koordinatenform umrechnen. Danach die Lösung mit Parameterform - Koordinatenform berechnen.

Koordinatenform - Koordinatenform

Eine Ebene in die Parameterform umrechnen. Danach die Lösung mit Parameterform - Koordinatenform berechnen.

Interaktive Inhalte: hier klicken