Formelsammlung Funktionen

http://www.fersch.de

16. März 2018

Inhaltsverzeichnis

3 Funktionen

3.1 Grundlagen

3.1.1 Definition

Jedem Element x aus der Definitionsmenge D wird genau ein Element y aus der Wertemenge W zugeordnet.
x - unabhängige Variable
y - abhängige Variable
Zu jeder Funktion gehört ein Definitionsbereich.

Ein Tafel Schokolade kostet 2 €.
Wieviel kosten 1, 2, 3, 4, 5 Tafeln ?
x= Anzahl der Tafeln
y= Preis

x	1	2	3	4	5
y	2	4	6	8	10

$\mathbb{D} = \{1; 2; 3; 4; 5\}$
$\mathbb{W} = \{2; 4; 6; 8; 10\}$
Funktionsgleichung: $y = 2 \cdot x$

x	1	2	3	4	4
y	2	4	6	8	10

keine eindeutige Zordnung $\Rightarrow$ keine Funktion

Schreibweise

$y = f(x)$ - Funktionsgleichung, Funktion
$f(x)$ - Funktionsterm
$f : x \mapsto y$ x-Werte werden auf y-Werte abgebildet
$f : x \mapsto f(x)$ x-Werte werden auf f(x) abgebildet

$y = 2 \cdot x$
$f(x) = 2 \cdot x$
$f : x \mapsto 2 \cdot x$

Definitions- und Wertebereich

• Definitionsbereich
Zahlenbereich der für x (unabhängige Variable) eingesetzt werden darf.
Einschränkungen des Definitionsbereichs sind nötig bei:
• Textaufgaben, bei denen nur bestimmte x-Wert möglich sind.
• Bruchfunktionen: Division durch Null ist nicht erlaubt. (Nenner $\neq 0$)
• Wurzelfunktionen: unter der Wurzel (Radikant) dürfen keine negativen Zahlen stehen. (Radikant ≥ 0)
•Logarithmusfunktionen: das Argument muss positiv sein. (Argument > 0)

• Wertebereich
Zahlenbereich den y (abhängige Variable Funktionswert) annehmen kann.

$y = (x+3)^{-1}+1 = \frac{1}{x+3}+1$ $\quad \mathbb{D} = \mathbb{R}\setminus\{-3\}$ $\quad \mathbb{W} = \mathbb{R}\setminus\{1\}$
$y = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$ $\quad \mathbb{D} = \mathbb{R}_0^+$ $\quad \mathbb{W} = \mathbb{R}_0^+$
$y = \log_3(x)$ $\quad \mathbb{D} = \mathbb{R}^+$ $\quad \mathbb{W} = \mathbb{R}$

3.1.2 Umkehrfunktion

Definition

Jedem Element y aus der Wertemenge W wird genau ein Element x aus der Definitionsmenge D zugeordnet.
y - unabhängige Variable
x - abhängige Variable
Funktionen sind umkehrbar, wenn sie im Definitionsbereich streng monoton steigen oder streng monoton fallen.

Schreibweise

$x = f^{-1}(y)$ - Umkehrfunktion
$f : y \mapsto x$ y-Werte werden auf x-Werte abgebildet
Nach dem Vertauschen der Variablen:
$y = f^{-1}(x)$ - Umkehrfunktion

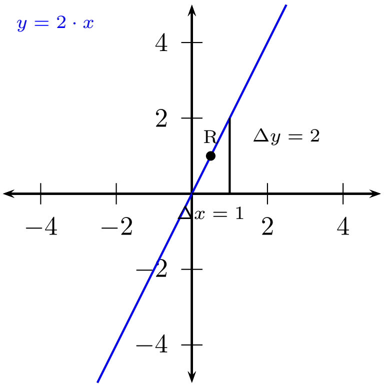
Ermittlen der Umkehrfunktion

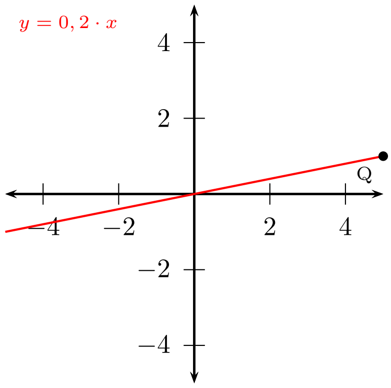
Graphisch: Funktionsgraph an der Winkelhalbierenden $y = x$ spiegeln.
Algebraisch: Funktionsgleichung nach x auflösen und die Variablen x und y vertauschen.

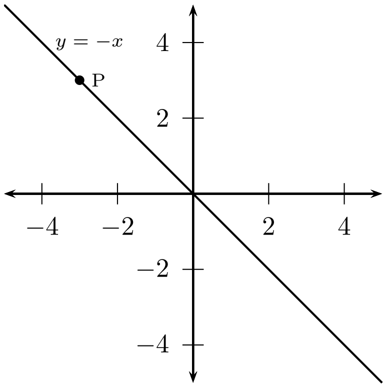
$y = 2 \cdot x - 3$ /+3 /:2
$\frac{y+3}{2} = x$
$\frac{1}{2} \cdot y + \frac{3}{2} = x$
$x = \frac{1}{2} \cdot y + \frac{3}{2}$
$f^{-1}(y) = \frac{1}{2} \cdot y + \frac{3}{2}$
Vertauschen der Variablen:
$y = \frac{1}{2} \cdot x + \frac{3}{2}$
$f^{-1}(x) = \frac{1}{2} \cdot x + \frac{3}{2}$

3.2 Lineare Funktion

3.2.1 Ursprungsgerade







Ursprungsgerade

$y = m \cdot x$

Steigung-Proportionalitätsfaktor: $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

$m > 0$ steigend

$m = 0$ $y = 0$ entspricht der x-Achse

$m < 0$ fallend

Winkelhalbierende des I und III Quadranten: $y = x$

Winkelhalbierende des II und IV Quadranten: $y = -x$

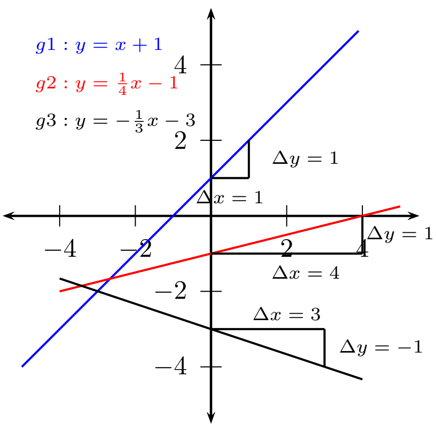
$y = m \cdot x$
$y = 2 \cdot x \quad m = 2$
$R(\frac{1}{2}/y) \quad x = \frac{1}{2}$
$y = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1 \quad R(\frac{1}{2}/1)$

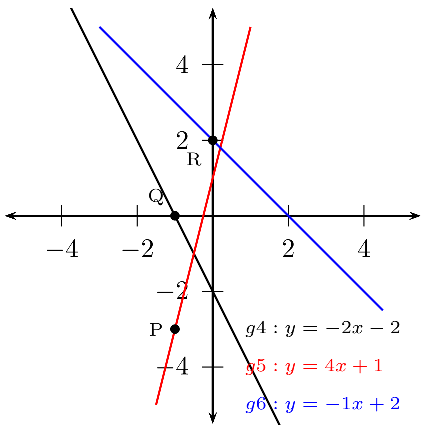
$m = \frac{y}{x}$
$Q(5/1) \quad y = 1 \quad x = 5$
$m = \frac{1}{5} \quad y = \frac{1}{5}x$

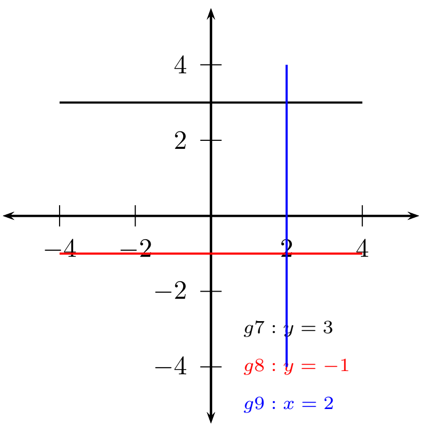
$x = \frac{y}{m}$
$P(x/3) \quad y = -1 \cdot x$
$m = -1 \quad y = 3$
$3 = -1 \cdot x$
$x = -3 \quad P(-3/3)$

Interaktive Inhalte: Graph (JS) - Graph - $y = m \cdot x$ - $x = \frac{y}{m}$ - $m = \frac{y}{x}$ -

3.2.2 Graph und Eigenschaften







Gerade - lineare Funktion

$y = m \cdot x + t \qquad f(x) = m \cdot x + t \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R} \quad \mathbb{W} = \mathbb{R}$

Steigung: $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

$m > 0$ steigend

$m = 0$ parallel zur x-Achse

$m < 0$ fallend

y-Achsenabschnitt: t

Besondere Geraden:

$y = 0$ x-Achse

$y = t$ Parallele zur x-Achse im Abstand t

$x = 0$ y-Achse

$x = k$ Parallele zur y-Achse im Abstand k

$g1 : y = x + 1$

Steigung: $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{1} = 1$

$m > 0$ steigend

y-Achsenabschnitt: $t = 1$

$g2 : y = \frac{1}{4}x - 1$

Steigung: $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{4}$

$m > 0$ steigend

y-Achsenabschnitt: $t = -1$

$g3 : y = -\frac{1}{3}x - 3$

Steigung: $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1}{3}$

$m < 0$ fallend

y-Achsenabschnitt: $t = -3$

$g5 : y = 4x + 1$

Steigung: $m = 4$

$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4}{1}$

y-Achsenabschnitt: $t = 1$

$P(-1/y) \quad x = 1$

$y = 4 \cdot (-1) + 1$

$y = -1 \quad P(-1/-3)$

Schnittpunkt mit der x-Achse - Nullstelle

$y = mx + t$

$y = 0 \qquad mx + t = 0$

$x = \frac{-t}{m}$

$g4 : y = -2x - 2$

$0 = -2x - 2 \qquad / + 2$

$2 = -2x \qquad / : (-2)$

$x = -1 \quad Q(-1/0)$

Schnittpunkt mit der y-Achse

$x = 0 \qquad y = m \cdot 0 + t$

$y = m \cdot 0 + t$

$y = t$

Schnittpunkt mit der y-Achse: $x = 0$

$g5 : y = -x + 2$

$y = -1 \cdot 0 + 2$

$y = 2$

Graph oberhalb/unterhalb der x-Achse

Einen beliebigen Wert kleiner bzw. größer als die Nullstelle wählen und das Vorzeichen des Funktionswerts in die Vorzeichentabelle eintragen.

	$x <$	x_1	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$-$

$+$ $f(x) > 0$ Graph oberhalb der x-Achse

\- $f(x) < 0$ Graph unterhalb der x-Achse

$g5 : y = 4x + 1 = 0$

$4x + 1 = 0 \qquad / - 1$

$4x = -1 \qquad / : 4$

$x = \frac{-1}{4}$

Wert kleiner als die Nullstelle wählen: $x = -1$

$g5 : y = 4 \cdot (-1) + 1 = -3$

Minuszeichen eintragen

Wert größer als die Nullstelle wählen: $x = 0$

$g5 : y = 4 \cdot (0) + 1 = +1$

Pluszeichen eintragen

Vorzeichentabelle:

	$x <$	$-\frac{1}{4}$	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$+$

$+ \quad f(x) > 0$ Graph oberhalb der x-Achse

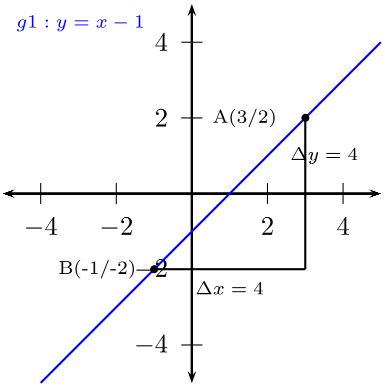
$4x + 1 > 0$ für $\underline{x \in]-\frac{1}{4}; \infty[}$

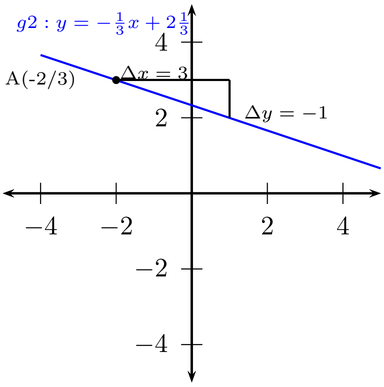
$- \quad f(x) < 0$ Graph unterhalb der x-Achse

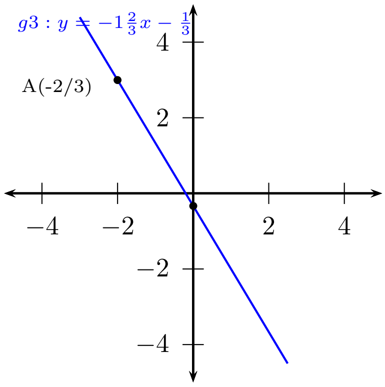
$4x + 1 < 0$ für $\underline{x \in]-\infty; -\frac{1}{4}[}$

Interaktive Inhalte: Graph (JS) - Graph - Eigenschaften - $y = m \cdot x + t$ - $m = \frac{y-t}{x}$ - $x = \frac{y-t}{m}$ - $t = y - m \cdot x$ -

3.2.3 Geradengleichung aufstellen







Gerade durch 2 Punkte

$y = m \cdot x + t$
$A(xa/ya) \qquad B(xb/yb)$
$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{ya - yb}{xa - xb}$
$t = ya - m \cdot xa$

$A(3/2) \qquad B(-1/-2)$
$m = \frac{2+2}{3+1}$
$m = 1$
$2 = 1 \cdot 3 + t$
$2 = 3 + t \qquad / - 3$
$t = 2 - 3$
$t = -1$
$g_1 : y = x - 1$

Gerade durch den Punkt A mit der Steiung m

$y = m \cdot x + t$
$A(xa/ya) \qquad$ Steigung: m
$t = ya - m \cdot xa$

$A(-2/3) \qquad m = -\frac{1}{3}$
$3 = -\frac{1}{3} \cdot (-2) + t$
$3 = \frac{2}{3} + t \qquad / - \frac{2}{3}$
$t = 3 - \frac{2}{3}$
$t = 2\frac{1}{3}$
$g_2 : y = -\frac{1}{3}x + 2\frac{1}{3}$

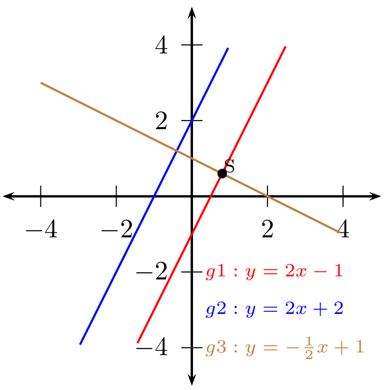
Gerade durch den Punkt A und dem y-Achsenabschnitt t

$A(xa/ya) \qquad$ y-Achsenabschnitt: t
$m = \frac{ya-t}{xa}$

$A(-2/3) \qquad t = -\frac{1}{3}$
$3 = m \cdot (-2) - \frac{1}{3}$
$3 = m \cdot (-2) - \frac{1}{3} \qquad / + \frac{1}{3}$
$3 + \frac{1}{3} = m \cdot (-2) \qquad / : -2$
$m = -1\frac{2}{3}$
$g_3 : y = -1\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$

Interaktive Inhalte: 2 Punkte - Punkt und Steigung - Punkt und y-Achsenabschnitt -

3.2.4 Gerade - Gerade



Parallele Geraden

$g1: y = m_1x + t_1 \qquad g2: y = m_2x + t_2$

$m_1 = m_2 \Rightarrow g1 \parallel g2$

$g1: y = 2x - 1 \quad g2: y = 2x + 2$
$m_1 = m_2$
$2 = 2$
$\Rightarrow g1 \parallel g2$

Senkrechte Geraden

$g1: y = m_1x + t_1 \qquad g3: y = m_3x + t_3$

$m_1 \cdot m_2 = -1 \Rightarrow g1 \perp g3$

$g1: y = 2x - 1 \quad g3: y = -\frac{1}{2}x + 1$
$m_1 \cdot m_2 = -1$
$2 \cdot -\frac{1}{2} = -1$
$\Rightarrow g1 \perp g3$

Schnittpunkt zweier Geraden

$g1: y = m_1x + t_1 \qquad g3: y = m_3x + t_3$

- Terme gleichsetzen:

$m_1x + t_1 = m_2x + t_2$

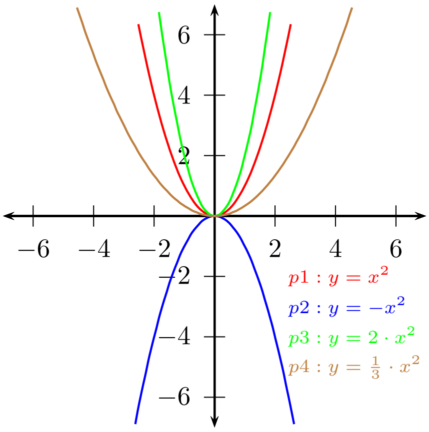
- x-Wert durch umformen berechnen
- x-Wert in eine der beiden Funktionen einsetzen, um den y-Wert zu berechnen

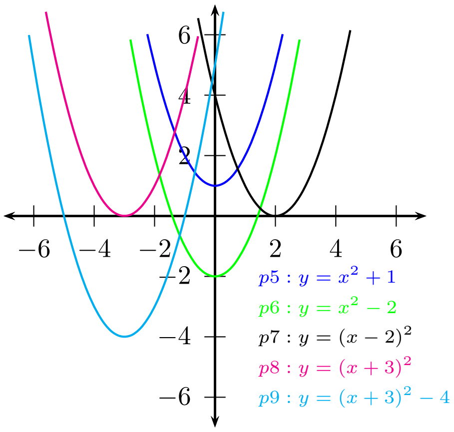
$g_1: y = 2x - 1 \qquad g_2: y = -\frac{1}{2}x + 1$
$2x - 1 = -\frac{1}{2}x + 1$
$2x - 1 = -\frac{1}{2}x + 1 \qquad / + \frac{1}{2}x$
$2\frac{1}{2}x - 1 = 1 \qquad / + 1$
$2\frac{1}{2}x = 2 \qquad / : 2\frac{1}{2}$
$x = \frac{4}{5}$
$g_1: y = 2 \cdot \frac{4}{5} - 1$
$S(\frac{4}{5}/\frac{3}{5})$

Interaktive Inhalte: Graph (JS) - $y = m_1x + t_1 \qquad y = m_2x + t_2$ -

3.3 Quadratische Funktion

3.3.1 Graph und Eigenschaften





Formen der Parabelgleichung

Normalparabel	$y = x^2$
Allgemeine Form	$y = ax^2 + bx + c$
Scheitelform	$y = a(x - xs)^2 + ys$
faktorisierte Form	$y = a(x - x_1)(x - x_2)$
a	Formfaktor
$a > 0$	nach oben geöffnet
$a < 0$	nach unten geöffnet
$\vert a\vert > 1$	gestreckt
$\vert a\vert < 1$	gestaucht
x_s	Verschiebung in x-Richtung
y_s	Verschiebung in y-Richtung
$S(x_s/y_s)$	Scheitelkoordinaten
x_1, x_2	Nullstellen

$p1: y = x^2 \quad S(0/0)$ Normalparabel nach oben geöffnet
$p2: y = -x^2 \quad S(0/0)$ Normalparabel nach unten geöffnet
$p3: y = 2x^2 \quad S(0/0) \quad a = 2$ gestreckt
$p4: y = \frac{1}{3}x^2 \quad S(0/0) \quad a = \frac{1}{3}$ gestaucht
$p5: y = x^2 + 1 \quad S(0/1)$ 1 nach oben verschoben
$p6: y = x^2 - 2 \quad S(0/-2)$ 2 nach unten verschoben
$p7: y = (x-2)^2 \quad S(2/0)$ 2 nach rechts verschoben
$p8: y = (x+3)^2 \quad S(-3/0)$ 3 nach links verschoben
$p9: y = (x+3)^2 - 4 \quad S(-3/-4)$ 3 nach links verschoben und 4 nach unten verschoben

Definitions- und Wertebreich

$\mathbb{D} = \mathbb{R}$
$a > 0 \quad \mathbb{W} = [\text{y-Wert des Scheitels}; \infty[$
$a < 0 \quad \mathbb{W} =]-\infty; \text{y-Wert des Scheitels}]$

$p2: y = -x^2 \quad S(0/0)$
$\mathbb{D} = \mathbb{R} \quad \mathbb{W} =]-\infty; 0]$
$p9: y = (x+3)^2 - 4 \quad S(-3/-4)$
$\mathbb{D} = \mathbb{R} \quad \mathbb{W} = [-4; \infty[$

Schnittpunkt mit der x-Achse - Nullstellen

$y = ax^2 + bx + c$

$y = 0 \qquad ax^2 + bx + c = 0$

$x_{1/2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$

Diskriminante: $D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$

$D = 0$ eine Nullstelle

$D > 0$ zwei Nullstellen

$D < 0$ keine Nullstelle

$p9: y = x^2 + 6x + 5 = 0$
$1x^2 + 6x + 5 = 0$
$x_{1/2} = \dfrac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1}$
$x_{1/2} = \dfrac{-6 \pm \sqrt{16}}{2} = \dfrac{-6 \pm 4}{2}$
$x_1 = \dfrac{-6 + 4}{2} \qquad x_2 = \dfrac{-6 - 4}{2}$
$x_1 = -1 \qquad x_2 = -5$
$D > 0 \Rightarrow$ zwei Nullstellen
$p9: y = x^2 + 6x + 5 = (x + 5)(x + 1)$

$p5: y = x^2 + 1 = 0$
$x_{1/2} = \dfrac{-0 \pm \sqrt{0^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1}$
$x_{1/2} = \dfrac{-0 \pm \sqrt{-4}}{2}$
$D < 0 \Rightarrow$ keine Nullstelle

$p8: y = x^2 + 6x + 9 = 0$
$x_{1/2} = \dfrac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9}}{2 \cdot 1}$
$x_{1/2} = \dfrac{-6 \pm \sqrt{0}}{2}$
$x_{1/2} = \dfrac{-6 \pm 0}{2}$
$x_{1/2} = -3$
$D = 0 \Rightarrow$ eine Nullstellen

Schnittpunkt mit der y-Achse

$p: y = ax^2 + bx + c$

$x = 0 \qquad p: y = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c$

$p(x) = c \qquad Q(0/c)$

$p9: y = x^2 + 6x + 5$
$y = 0^2 + 6 \cdot 0 + 5$
$y = 5 \qquad Q(0/5)$

Allgemeine Form in Scheitelform

Allgemeine Form

$y = ax^2 + bx + c$

Scheitelform

$y = a(x - xs)^2 + ys$

Quadratische Ergänzung:

$y = ax^2 + bx + c$

$y = a(x^2 + \frac{b}{a}x) + c$

$y = a(x^2 + \frac{b}{a}x + (\frac{b}{2a})^2 - (\frac{b}{2a})^2) + c$

$y = a[(x + \frac{b}{2a})^2 - (\frac{b}{2a})^2] + c$

$y = a(x + \frac{b}{2a})^2 - a \cdot \frac{b^2}{4a^2} + c$

$y = a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a} + c$

$x_s = -\frac{b}{2 \cdot a}$

$y_s = c - \frac{b^2}{4 \cdot a}$

Scheitelformel:

$S(x_s/y_s)$

$S(-\frac{b}{2 \cdot a}/c - \frac{b^2}{4 \cdot a})$

quadratische Ergänzung
$p9: y = x^2 + 6x + 5$
$p9: y = (x^2 + 6x + 5)$
$p9: y = (x^2 + 6x + 3^2 - 3^2 + 5)$
$p9: y = [(x + 3)^2 - 3^2 + 5]$
$p9: y = [(x + 3)^2 - 9 + 5]$
$p9: y = [(x + 3)^2 - 4]$
$p9: y = (x + 3)^2 - 4$
Scheitel(-3/-4)

Scheitelformel
$y = x^2 + 6x + 5$
$xs = -\frac{6}{2 \cdot 1}$
$xs = -3$
$ys = 5 - \frac{6^2}{4 \cdot 1}$
$ys = -4$
$Scheitel(-3/-4)$
$p9: y = (x + 3)^2 - 4$

Interaktive Inhalte: Graph (JS) - Graph - $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ - *Eigenschaften* -

3.3.2 Parabelgleichung aufstellen und umformen

Parabelgleichung aus 2 Punkten und dem Formfaktor

Gegeben: Formfaktor a und Punkte $A(x_a/y_a)$ und $B(x_b/y_b)$

• Formfaktor a und Punkt $A(x_a/y_a)$ in die Funktionsgleichung einsetzen.

$y_a = ax_a^2 + bx_a + c$

• Formfaktor a und Punkt $B(x_b/y_b)$ in die Funktionsgleichung einsetzen.

$y_b = ax_b^2 + bx_b + c$

siehe Lösung von linearen Gleichungssystemen

$a = -2 \qquad A(2/-1) \qquad B(-1/4)$

Formfaktor a einsetzen:

$y = -2x^2 + bx + c$

I)Punkt A einsetzen

$-1 = -2 \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c$

$-1 = -8 + 2b + c \qquad / + 8 \quad / - 2b$

$-1 + 8 - 2b = c$

$7 - 2b = c$

II)Punkt B einsetzen

$4 = -2 \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c$

$4 = -2 - 1b + c$

I in II

$4 = -2 - 1b + 7 - 2b$

$4 = 5 - 3b \qquad / - 5 \qquad / : (-3)$

$b = \frac{4-5}{-3}$

$b = \frac{1}{3}$

$c = 7 - 2 \cdot \frac{1}{3}$

$c = 6\frac{1}{3}$

$y = -2x^2 + \frac{1}{3}x + 6\frac{1}{3}$

Parabelgleichung aus Formfaktor und dem Scheitel

Formfaktor a und Scheitel in Scheitelform einsetzen:

$y = a(x - xs)^2 + ys$

Binomische Formel auflösen:

$y = a(x^2 - 2 \cdot x \cdot xs + xs^2) + ys$

$y = a \cdot x^2 - 2 \cdot a \cdot x \cdot xs + a \cdot xs^2 + ys$

Formfaktor: $a = -\frac{1}{2} \qquad S(2/-3)$

$y = a(x - xs)^2 + ys$

$y = -\frac{1}{2}(x - 2)^2 - 3$

$y = -\frac{1}{2}(x^2 - 4x + 2^2) - 3$

$y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 5$

Parabelgleichung aus einem Punkt und dem Scheitel

Punkt $A(x_a/y_a)$ und Scheitel $S(x_s/y_s)$in die Scheitelform einsetzen und nach a auflösen. $y_a = a(x_a - xs)^2 + ys$

$A(2/-4) \qquad S(1/2)$

$y = a(x - xs)^2 + ys$

$-4 = a(2 - 1)^2 + 2$

$-4 = 1 \cdot a + 2 \qquad / - 2 \qquad / : 1$

$a = \frac{-4-2}{1}$

$a = -6$

$y = -6(x - 1)^2 + 2$

$y = -6(x^2 - 2x + 1^2) + 2$

$y = -6x^2 + 12x - 4$

Parabelgleichung aus Formfaktor und Nullstellen

Formfaktor a und Nullstellen in die faktorisierte Form einsetzen

$P(x_1/0) \qquad Q(x_2/0) \qquad a$

$y = a(x - x_1)(x - x_2)$

$y = a(x^2 - x_1 \cdot x - x_2 \cdot x + x_1 \cdot x_2)$

$y = ax^2 - a \cdot x_1 \cdot x - a \cdot x_2 \cdot x + a \cdot x_1 \cdot x_2$

Nullstellen$x_1 = 1 \qquad x_2 = -4 \qquad a = 7$

$P(1/0) \qquad Q(-4/0) \qquad a = 7$

$y = a(x - x_1)(x - x_2)$

$y = 7(x - 1)(x + 4)$

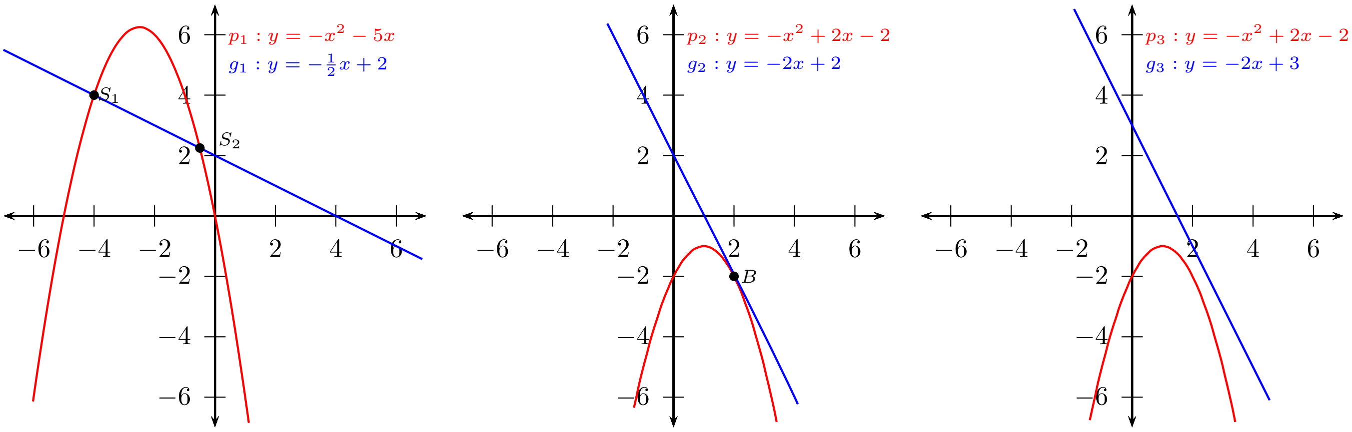
$y = 7(x^2 + 4x - 1x - 4)$

$y = 7(x^2 + 3x - 4)$

$y = 7x^2 + 21x - 28$

Interaktive Inhalte: Graph (JS) - Graph - 2 Punkte und Formfaktor - Scheitel und Formfaktor - Scheitel und Punkt - Nullstellen - Faktorisierte Form -

3.3.3 Parabel - Gerade



$p : y = ax^2 + bx + c \qquad g : y = mx + t$

Terme gleichsetzen: $ax^2 + bx + c = mx + t$

Term nach Null umformen: $ax^2 + (b - m)x + c - t = 0$

Lösung der quadratischen Gleichung:

$ax^2 + bx + c = 0$

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

Diskriminante:

$D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$

$D = 0$ Gerade ist Tangente - Berührpunkt

$D > 0$ Gerade ist Sekante - zwei Schnittpunkte

$D < 0$ Gerade ist Passante - keinen Schnittpunkt

x-Wert(e) in eine der beiden Funktionen einsetzen, um den y-Wert zu berechnen

$p_1 : y = -x^2 - 5x \qquad g_1 : y = -\frac{1}{2}x + 2$

$-1x^2 - 5x = -\frac{1}{2}x + 2 \qquad / + \frac{1}{2}x / - 2$

$-1x^2 - 5x + \frac{1}{2}x - 2 = 0$

$-1x^2 - 4\frac{1}{2}x - 2 = 0$

$$x_{1/2} = \frac{+4\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(-4\frac{1}{2}\right)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-2)}}{2 \cdot (-1)}$$

$$x_{1/2} = \frac{+4\frac{1}{2} \pm \sqrt{12\frac{1}{4}}}{-2}$$

$$x_{1/2} = \frac{4\frac{1}{2} \pm 3\frac{1}{2}}{-2}$$

$$x_1 = \frac{4\frac{1}{2} + 3\frac{1}{2}}{-2} \qquad x_2 = \frac{4\frac{1}{2} - 3\frac{1}{2}}{-2}$$

$x_1 = -4 \qquad x_2 = -\frac{1}{2}$

$D > 0$ Gerade ist Sekante - zwei Schnittpunkte

$y = -1(-4)^2 - 5(-4) = 4 \qquad S_1(-4/4)$

$y = -\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}) + 2 = 2\frac{1}{4} \qquad S_2(-\frac{1}{2}/2\frac{1}{4})$

$p_2 : y = -x^2 + 2x - 2 \qquad g_2 : y = -2x + 2$

$-x^2 + 2x - 2 = -2x + 2$

$-x^2 + 2x - 2 + 2x - 2) = 0$

$-x^2 + 4x - 4 = 0$

$$x_{1/2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-4)}}{2 \cdot (-1)}$$

$$x_{1/2} = \frac{-4 \pm \sqrt{0}}{-2} \qquad = \frac{-4 \pm 0}{-2}$$

$$x_{1/2} = \frac{-4 + 0}{-2} \qquad x_2 = \frac{-4 - 0}{-2}$$

$x_{1/2} = 2$

$D = 0$ Gerade ist Tangente - Berührpunkt

$y = -2$

$B(2/-2)$

$p_3 : y = -x^2 + 2x - 2 \qquad g_3 : y = -2x + 3$

$-x^2 + 2x - 2 = -2x + 3$

$-x^2 + 2x - 2 + 2x - 3) = 0$

$-x^2 + 4x - 5 = 0$

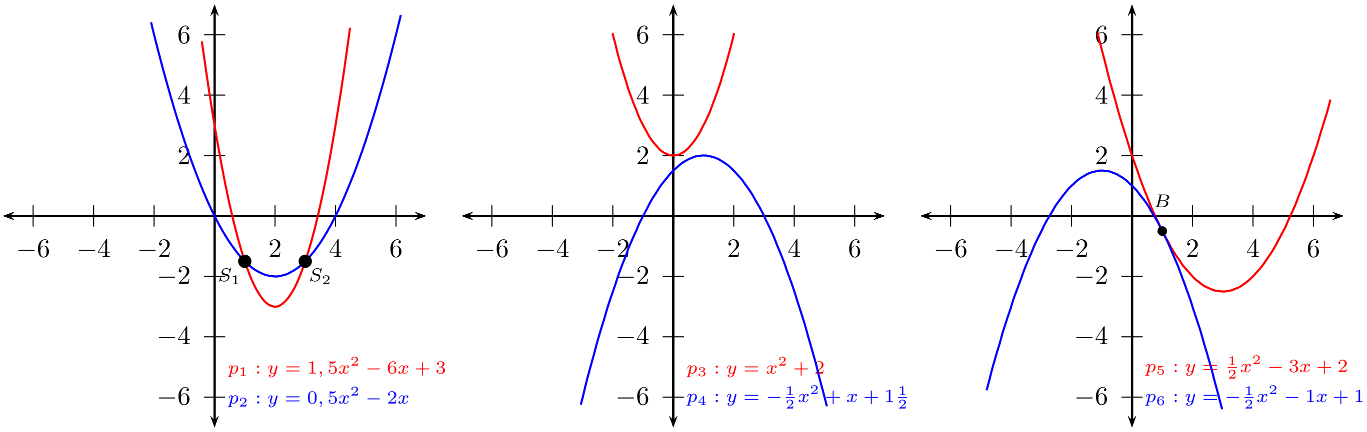
$$x_{1/2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-5)}}{2 \cdot (-1)}$$

$$x_{1/2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-4}}{-2}$$

$D < 0$ Gerade ist Passante - keinen Schnittpunkt

Interaktive Inhalte: Graph (JS) - Graph - Parabel-Gerade -

3.3.4 Parabel - Parabel



$p_1 : y = a_1x^2 + b_1x + c_1$

$p_2 : y = a_2x^2 + b_2x + c_2$

Terme gleichsetzen:

$a_1x^2 + b_1x + c_1 = a_2x^2 + b_2x + c_2$

Term nach Null umformen:

$ax^2 + bx + c = 0$

Lösung der quadratischen Gleichung:

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

Diskriminante: $D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$

$D = 0$ Berührpunkt

$D > 0$ zwei Schnittpunkte

$D < 0$keinen Schnittpunkt

x-Wert(e) in eine der beiden Funktionen einsetzen, um den y-Wert zu berechnen

$p_1 : y = 1\frac{1}{2}x^2 - 6x + 3 \qquad p_2 : y = \frac{1}{2}x^2 - 2x$

$1\frac{1}{2}x^2 - 6x + 3 = \frac{1}{2}x^2 - 2x$

$1\frac{1}{2}x^2 - 6x + 3 - (\frac{1}{2}x^2 - 2x) = 0$

$1x^2 - 4x + 3 = 0$

$$x_{1/2} = \frac{+4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1}$$

$$x_{1/2} = \frac{+4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2}$$

$$x_1 = \frac{4+2}{2} \qquad x_2 = \frac{4-2}{2}$$

$x_1 = 3 \qquad x_2 = 1$

$D > 0$ zwei Schnittpunkte

$y = 1\frac{1}{2} \cdot 3^2 - 6 \cdot 3 + 3 = -1\frac{1}{2} \qquad S_1(3/-1\frac{1}{2})$

$y = 1\frac{1}{2} \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 + 3 = -1\frac{1}{2} \qquad S_2(1/-1\frac{1}{2})$

$p_3 : y = x^2 + 2 \qquad p_4 : y = -\frac{1}{2}x^2 + x + 1\frac{1}{2}$

$x^2 + 2 - (-\frac{1}{2}x^2 + x + 1\frac{1}{2}) = 0$

$1\frac{1}{2}x^2 - 1x + \frac{1}{2} = 0$

$$x_{1/2} = \frac{+1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}}{2 \cdot 1\frac{1}{2}}$$

$$x_{1/2} = \frac{+1 \pm \sqrt{-2}}{3}$$

$D < 0$ keinen Schnittpunkt

$p_5 : y = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 2 \qquad p_6 : y = -\frac{1}{2}x^2 - 1x + 1$

$y = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 2 = -\frac{1}{2}x^2 - 1x + 1$

$\frac{1}{2}x^2 - 3x + 2 - (-\frac{1}{2}x^2 - 1x + 1) = 0$

$1x^2 - 2x + 1 = 0$

$$x_{1/2} = \frac{+2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1}$$

$$x_{1/2} = \frac{+2 \pm \sqrt{0}}{2}$$

$$x_{1/2} = \frac{2 \pm 0}{2}$$

$$x_1 = \frac{2+0}{2} \qquad x_2 = \frac{2-0}{2}$$

$x_1 = 1 \qquad x_2 = 1$

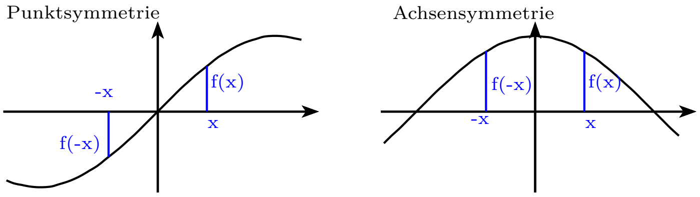
$D = 0$ Berührpunkt

$B(1/-\frac{1}{2})$

Interaktive Inhalte: Graph (JS) - Graph - Parabel-Parabel -

3.4 Eigenschaften von Funktionen

3.4.1 Symmetrie



Punktsymmetrie zum Ursprung - ungerade Funktion

$f(-x) = -f(x) \Rightarrow f(x)$ ist eine ungerade Funktion

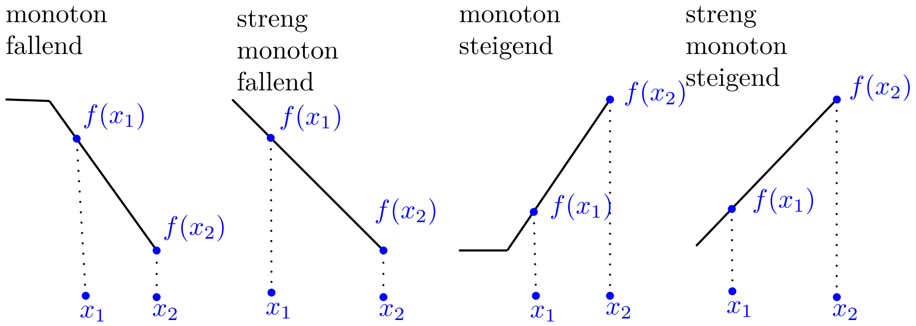
$f(x) = -2x^5 + 3x^3$
$f(-x) = -2 \cdot (-x)^5 + 3 \cdot (-x)^3$
$f(-x) = -\left(-2 \cdot x^5 + 3 \cdot x^3\right)$
$f(-x) = -f(x)$

Achsensymmetrie zur y-Achse - gerade Funktion

$f(-x) = f(x) \Rightarrow f(x)$ ist eine gerade Funktion

$f(x) = x^4 + 2 \cdot x^2 + 1$
$f(-x) = (-x)^4 + 2 \cdot (-x)^2 + 1$
$f(-x) = x^4 + 2 \cdot x^2 + 1$
$f(-x) = f(x)$

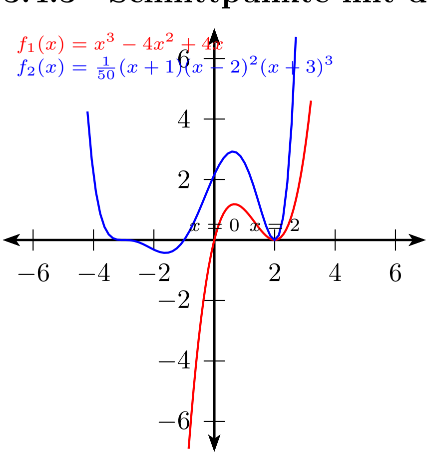
3.4.2 Monotonie

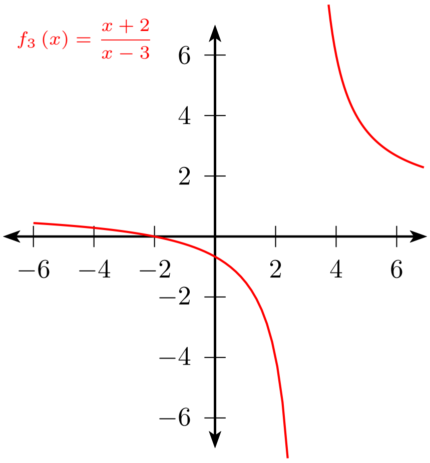


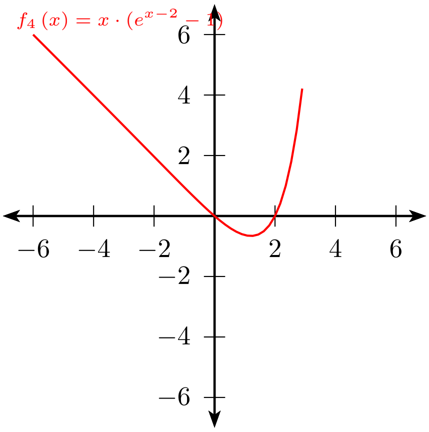
$x_1 < x_2$

monoton steigend		$f(x_1) \leq f(x_2)$
streng monoton steigend	sms	$f(x_1) < f(x_2)$
monoton fallend		$f(x_1) \geq f(x_2)$
streng monoton fallend	smf	$f(x_1) > f(x_2)$

3.4.3 Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen







Schnittpunkte mit der x-Achse - Nullstellen

Funktionsterm gleich Null setzen und die Gleichung lösen.
$f(x) = 0$ (siehe Algebra-Gleichungen)
- Vielfachheit der Nullstelle gerade
- Nullstelle ohne Vorzeichenwechsel (VZW)
- Berührpunkt mit die x-Achse (Hoch- oder Tiefpunkt)
- Vielfachheit der Nullstelle ungerade
- Nullstelle mit Vorzeichenwechsel (VZW)
- Schnittpunkt mit die x-Achse

Einfache Nullstelle mit VZW: $f(x) = (x - x_1) \cdot ..$
Zweifache Nullstelle ohne VZW: $f(x) = (x - x_1)^2 \cdot ..$
Dreifache Nullstelle mit VZW: $f(x) = (x - x_1)^3 \cdot ..$
Vierfache Nullstelle ohne VZW: $f(x) = (x - x_1)^4 \cdot ..$

$f_1(x) = x^3 - 4x^2 + 4x = x(x^2 - 4x + 4) = x(x-2)^2$
Einfache Nullstelle mit VZW: $x = 0$ $N_1(0/0)$
Zweifache Nullstelle ohne VZW: $x = 2$ $N_2(2/0)$

$f_2(x) = \frac{1}{50}(x+1)(x-2)^2(x+3)^3$
Einfache Nullstelle mit VZW: $x = -1$ $N_1(-1/0)$
Zweifache Nullstelle ohne VZW: $x = 2$ $N_2(2/0)$
Dreifache Nullstelle mit VZW: $x = -3$ $N_3(-3/0)$
$f_4(x) = x \cdot (e^{x-2} - 1)$
$e^{(x-2)} - 1 = 0 \quad / + 1$
$e^{(x-2)} = 1 \quad / \ln$
$x - 2 = \ln(1) \quad / + 2$
$x = 2$

Schnittpunkte mit der y-Achse

x=0 in den Funktionsterm einsetzen.

$f_1(x) = x^3 - 4x^2 + 4x = x(x^2 - 4x + 4) = x(x-2)^2$
$f_1(0) = 0^3 - 4 \cdot 0^2 + 4 \cdot 0 = 0$
$P(0/0)$
$f_2(x) = \frac{1}{50}(x+1)(x-2)^2(x+3)^3$
$f_2(0) = \frac{1}{50}(0+1)(0-2)^2(0+3)^3 = 2,16$
$Q(0/2,16)$

Graph oberhalb/unterhalb der x-Achse

Bei Funktionen kann sich das Vorzeichen nur an den Nullstellen oder den Definitionslückenlücken ändern. Einen beliebigen Wert kleiner bzw. größer als die Nullstelle wählen und das Vorzeichen des Funktionswerts in die Tabelle eintragen.

Vorzeichentabelle mit f(x)

	$x<$	x_1	$<x$
$f(x)$	$+$	0	$-$
Graph	oberhalb	0	unterhalb

+	f(x)>0	Graph oberhalb der x-Achse
-	f(x)<0	Graph unterhalb der x-Achse

$f_1(x) = x^3 - 4x^2 + 4x = x(x^2 - 4x + 4) = x(x-2)^2$
Nullstellen: $x_1 = 0 \quad x_2 = 2$
Wert kleiner als 0 wählen: $-1 < 0 \qquad f_1(-1) = -1 < 0 \Rightarrow -$
Wert zwischen 0 und 2 wählen:
$0 < 1,2 < 2 \qquad f_1(1,2) = 0,768 > 0 \Rightarrow +$
Wert größer als 2 wählen: $3 > 2 \qquad f_1(3) = 1 > 0 \Rightarrow +$
Vorzeichentabelle:

	$x<$	0	$<x<$	2	$<x$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$

$x \in]0;2[\ \cup \ ]2;\infty[\quad f(x) > 0$ oberhalb der x-Achse
$x \in]-\infty;0[\quad f(x) < 0$ unterhalb der x-Achse

$f_3(x) = \dfrac{x+2}{x-3}$
Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{3\}$
$x_1 = -2$ 1-fache Nullstelle
Vorzeichentabelle:

	$x<$	-2	$<x<$	3	$<x$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

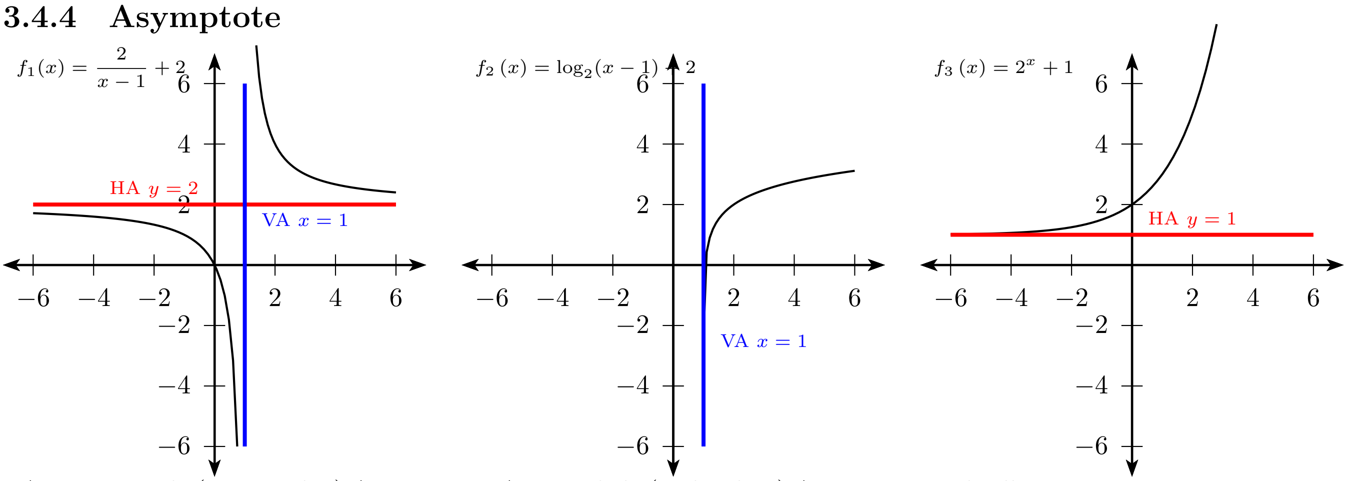
$x \in]-\infty;-2[\ \cup \ ]3;\infty[\quad f(x) > 0$ oberhalb der x-Achse
$x \in]-2;3[\quad f(x) < 0$ unterhalb der x-Achse

$f_4(x) = x \cdot (e^{x-2} - 1)$
$x_1 = 0;$ 1-fache Nullstelle
$x_2 = 2;$ 1-fache Nullstelle

	$x<$	0	$<x<$	2	$<x$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$x \in]-\infty;0[\ \cup \ ]2;\infty[\quad f(x) > 0$ oberhalb der x-Achse
$x \in]0;2[\quad f(x) < 0$ unterhalb der x-Achse

3.4.4 Asymptote



HA - Horizontale (waagerechte) Asymptote; VA - Vertikale (senkrechte) Asymptote - Polstelle

Definition

Eine Asymptote ist ein Gerade, der sich eine Funktion beliebig weit annähert. (siehe Analysis - Grenzwerte)

$f_1(x) = \dfrac{2}{x-1} + 2$
nicht kürzbare Nullstellen des Nenners
$VA: x = 1 \qquad HA: y = 2$

Horizontale (waagerechte) Asymptote

Funktionsgleichung: $y = a$

$f_3(x) = 2^x + 1$
$HA: y = 1$

Vertikale (senkrechte) Asymptote - Polstelle

Funktionsgleichung: $x = b$

$f_2(x) = \log_2(x-1) + 2$
$VA: x = 1$

3.4.5 Verknüpfung von Funktionen

Addition von Funktionen

$u(x) = f(x) + g(x)$

$f(x) = x^2$
$g(x) = e^x$
$u(x) = f(x) + g(x)$
$u(x) = x^2 + e^x$

Subtraktion von Funktionen

$u(x) = f(x) - g(x)$

$f(x) = x^2$
$g(x) = e^x$
$u(x) = f(x) - g(x)$
$u(x) = x^2 - e^x$

Multiplikation von Funktionen

$u(x) = f(x) \cdot g(x)$

$f(x) = x^2$
$g(x) = e^x$
$u(x) = f(x) \cdot g(x)$
$u(x) = x^2 \cdot e^x$

Division von Funktionen

$u(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

$f(x) = x^2$
$g(x) = e^x$
$u(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$
$u(x) = \frac{x^2}{e^x}$

Verketten von Funktionen

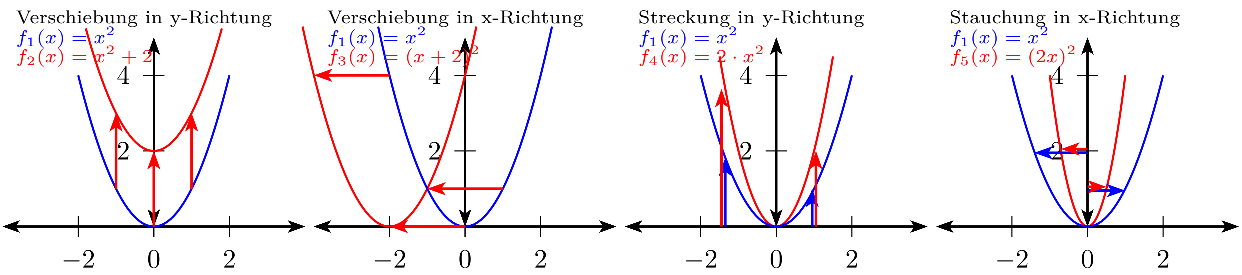
äußere Funktion f(x) - innere Funktion g(x)
$u(x) = f(g(x))$ oder $f \circ g = f(g(x))$ f nach g

äußere Funktion g(x) - innere Funktion f(x)
$v(x) = g(f(x))$ oder $g \circ f = g(f(x))$ g nach f

$f(x) = x^2$
$g(x) = e^x$
$u(x) = f(g(x))$
$u(x) = (e^x)^2$
$v(x) = g(f(x))$
$v(x) = e^{x^2}$

Interaktive Inhalte: Graph (JS) -

3.4.6 Abbildung von Funktionen



Verschiebung des Graphen in y-Richtung

$y = f(x) + d$

$f_1(x) = x^2 \qquad f_2(x) = x^2 + 2$
Verschiebung um d=2 in y-Richtung
$g_1(x) = e^x \qquad g_2(x) = e^x - 3$
Verschiebung um d=- 3 in y-Richtung

Verschiebung des Graphen in x-Richtung

$y = f(x - c)$

$f_1(x) = x^2 \qquad f_3(x) = (x-2)^2$
Verschiebung um c=2 in x-Richtung
$g_1(x) = e^x \qquad g_3(x) = e^{x+3}$
Verschiebung um c=-3 in x-Richtung

Streckung - Stauchung in y-Richtung

y = a · f(x)
a > 1 : Streckung in y-Richtung
0 < a < 1 : Stauchung in y-Richtung
a = −1 :Spiegelung an der x-Achse
a < -1 : Spiegelung an der x-Achse und Streckung in y-Richtung

$f_1(x) = x^2 \qquad f_4(x) = 2x^2$
Streckung in y-Richtung mit $a = 2$
$g_1(x) = e^x \qquad g_4(x) = \frac{1}{3}e^x$
Stauchung in y-Richtung mit $a = \frac{1}{3}$
$f_5(x) = e^x \qquad f_6(x) = -e^x$
Spiegelung an der x-Achse

Streckung - Stauchung in x-Richtung

$y = f(b \cdot x)$
$b > 1$: Stauchung in x-Richung mit $\frac{1}{b}$
$0 < b < 1$: Streckung in x-Richtung mit $\frac{1}{b}$
$b = -1$: Spiegelung an der y-Achse
$b < -1$: Spiegelung an der y-Achse und Stauchung in x-Richung mit $\frac{1}{b}$

$f_1(x) = x^2 \qquad f_5(x) = (2x)^2$
$b = 2$ Stauchung in x-Richtung mit $\frac{1}{2}$
$g_1(x) = e^x \qquad f_5(x) = e^{(\frac{1}{3}x)}$
$b = \frac{1}{3}$ Streckung in x-Richtung mit 3
$f_5(x) = e^x \qquad f_6(x) = e^{-x}$
Spiegelung an der y-Achse

Zusammenfassung

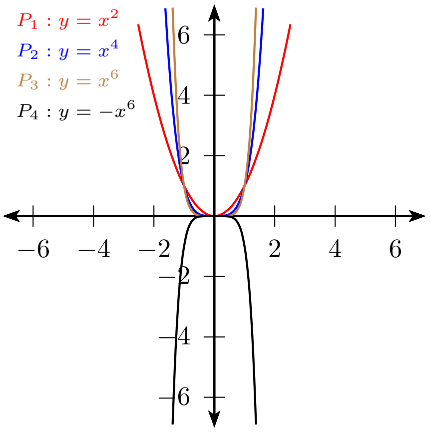
$y = a \cdot f(b(x - c)) + d$
$y = a \cdot f(bx - cb) + d$
a:Streckung/Stauchung in y-Richtung
$\frac{1}{b}$:Streckung/Stauchung in x-Richtung
c:Verschiebung des Graphen in x-Richtung
d:Verschiebung des Graphen in y-Richtung

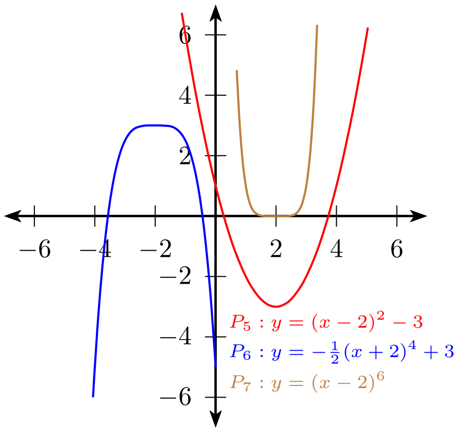
$f_1(x) = x^2 \qquad f_2(x) = -3(2x-6)^2 + 1 = -3[2(x-3)]^2 + 1$
Streckung in y-Richtung und Spieglung an der x-Achse: $a = -3$
Stauchung in x-Richtung: $\frac{1}{b} = \frac{1}{2}$
Verschiebung des Graphen in x-Richtung: $c = \frac{-6}{2} = 3$
Verschiebung in y-Richtung: $d = 1$
Verschiebung in x-Richtung: 3

Interaktive Inhalte: Graph (JS) -

3.5 Potenzfunktion

3.5.1 Parabeln vom Grad n - gerader Exponent





Formen der Parabelgleichung - gerader Exponent

Exponent:2,4,6..

Grundfunktion: $y = x^n$

Funktion mit Formvariablen:

$y = a(x-c)^n + d$

$y = a(b(x-c))^n + d$

$P_1 : y = x^2 \qquad P_5 : y = (x-2)^2 - 3$
Verschiebung um 2 in x-Richtung und um -3 in y-Richtung

$P_2 : y = x^4 \qquad P_6 : y = -\frac{1}{2}(x+2)^4 + 3$
Verschiebung um -2 in x-Richtung und um 3 in y-Richtung
Spiegelung an der x-Achse und Stauchung um $\frac{1}{2}$ in y-Richtung

$P_3 : y = x^6 \qquad P_9 : y = 2(x+4)^4$
Streckung um 2 in y-Richtung und Verschiebung um -4 in x-Richtung

$P_3 : y = x^6 \qquad P_7 : y = (x-2)^6$
Verschiebung um 2 in x-Richtung

Definitions- und Wertebereich

$y = x^n \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R} \qquad \mathbb{W} = \mathbb{R}_0^+$

$y = a(b(x-c))^n + d \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R}$

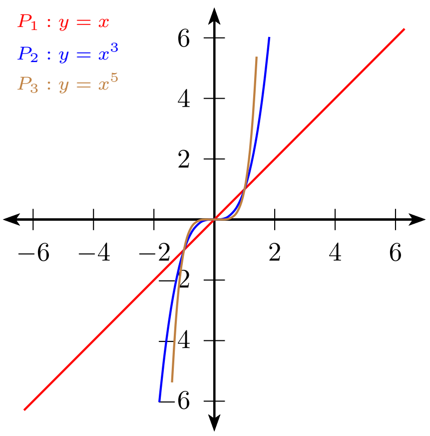
$a > 0 \quad \mathbb{W} = [d; \infty[$

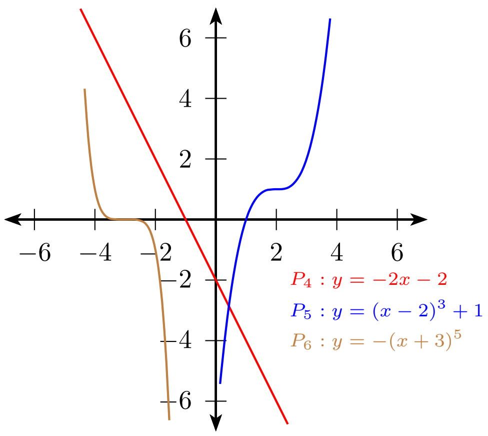
$a < 0 \quad \mathbb{W} =]-\infty; d]$

$P_2 : y = x^4 \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R} \quad \mathbb{W} = \mathbb{R}_0^+$
$P_5 : y = (x-2)^2 - 3 \; \mathbb{D} = \mathbb{R} \qquad \mathbb{W} = [-3; \infty[$
$P_4 : y = -x^6 \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R} \quad \mathbb{W} = \mathbb{R}_0^-$
$P_6 : y = -\frac{1}{2}(x+2)^4 + 3 \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R} \quad \mathbb{W} =]-\infty; 3]$
$P_9 : y = 2(x+4)^4 \quad \mathbb{D} = \mathbb{R} \quad \mathbb{W} = \mathbb{R}_0^+$

Interaktive Inhalte: Graph (JS) - Graph -

3.5.2 Parabeln vom Grad n - ungerader Exponent





Formen der Parabelgleichung - ungerader Exponent

Exponent:1,3,5..
Grundfunktion: $y = x^n$
Funktion mit Formvariablen:
$y = a(x-c)^n + d$
$y = a(b(x-c))^n + d$

$P_1 : y = x \qquad P_4 : y = -2x - 2$
Verschiebung um -2 in y-Richtung und Strechung um -2 in y-Richtung
$P_2 : y = x^3 \qquad P_5 : y = (x-2)^3 + 1$
Verschiebung um 2 in x-Richtung und um 1 in y-Richtung P_3 : $y = x^5 \qquad P_6 : y = -(x+3)^5$
Spiegelung an der x-Achse und Verschiebung um -3 in x-Richtung

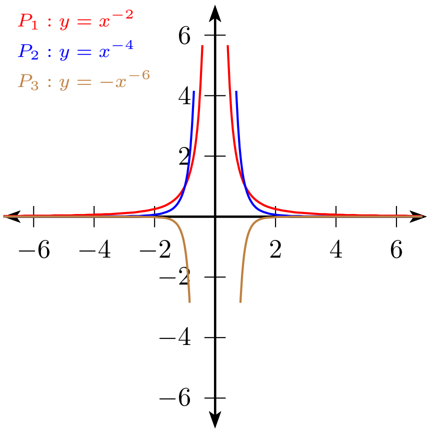
Definitions- und Wertebereich

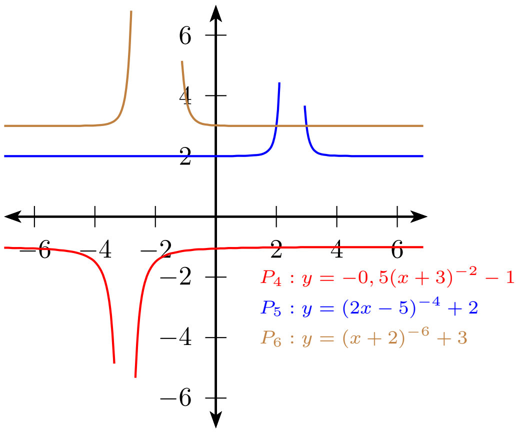
$y = x^n \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R} \qquad \mathbb{W} = \mathbb{R}$
$y = a(b(x-c))^n + d \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R} \qquad \mathbb{W} = \mathbb{R}$

$P_2 : y = x^3 \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R} \quad \mathbb{W} = \mathbb{R}$
$P_5 : y = (x-2)^3 + 1 \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R} \quad \mathbb{W} = \mathbb{R}$

Interaktive Inhalte: Graph (JS) - Graph -

3.5.3 Hyperbeln vom Grad n - gerader Exponent





Formen der Hyperbelgleichung - gerader Exponenten

Exponent:-2,-4,-6..
Grundfunktion: $y = x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$
Funktion mit Formvariablen:
$y = a(x-c)^{-n} + d = \dfrac{a}{(x-c)^n} + d$
$y = a(b(x-c))^{-n} + d = \dfrac{a}{(b(x-c))^n} + d$

$P_1 : y = x^{-2} \qquad P_4 : y = -0,5(x+3)^{-2} - 1$
Verschiebung um -3 in x-Richtung und um -1 in y-Richtung
Streckung um -0,5 in y-Richtung
$P_2 : y = x^{-4} \qquad P_5 : y = (2x-5)^{-4} + 2 = (2(x-2,5))^{-4} + 2$
Verschiebung um 2,5 in x-Richtung und um 2 in y-Richtung
Stauchung um 2 in x-Richtung
$y = x^{-6} \qquad P_6 : y = (x+2)^{-6} + 3$
Streckung um -2 in x-Richtung und um 3 in y-Richtung

Definitions- und Wertebereich

$y = x^{-n} = \dfrac{1}{x^n} \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\} \qquad \mathbb{W} = \mathbb{R}^+$
$y = a(b(x-c))^{-n} + d \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{c\}$
$a > 0 \quad \mathbb{W} =]d; \infty[$
$a < 0 \quad \mathbb{W} =]-\infty; d[$

$P_1 : y = x^{-2} \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\} \qquad \mathbb{W} = \mathbb{R}^+$
$P_4 : y = -0,5(x+3)^{-2} - 1$
$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-3\} \qquad \mathbb{W} =]-\infty; -1[$
$P_6 : y = (x+2)^{-6} + 3 \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2\} \qquad \mathbb{W} =]3; \infty[$

Asymptoten

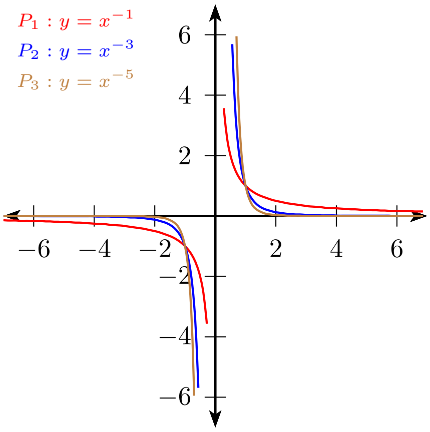
$y = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$
Horizontale Asymptote (HA): $y = 0$
Vertikale Asymptote (VA): $x = 0$
$y = a(b(x-c))^{-n} + d$
Horizontale Asymptote: $y = d$
Vertikale Asymptote: $x = c$

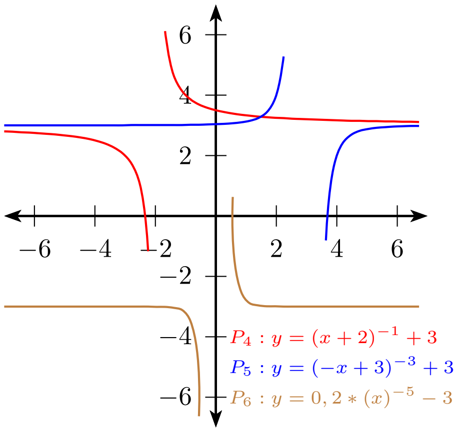
$P_1 : y = x^{-2}$ HA: $y = 0$ VA: $x = 0$
$P_4 : y = -0,5(x+3)^{-2} - 1$ HA: $y = -1$ VA: $x = -3$

$P_6 : y = (x+2)^{-6} + 3$ HA: $y = 3$ VA: $x = -2$

Interaktive Inhalte: Graph (JS) - Graph -

3.5.4 Hyperbeln vom Grad n - ungerader Exponent





Formen der Hyperbelgleichung - ungerader Exponenten

Exponent:-1,-3,-5..
Grundfunktion: $y = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$
Funktion mit Formvariablen:
$y = a(x-c)^{-n} + d = \frac{a}{(x-c)^n} + d$
$y = a(b(x-c))^{-n} + d = \frac{a}{(b(x-c))^n} + d$

$P_1 : y = x^{-1}$ $P_4 : y = (x+2)^{-1} + 3$
Verschiebung um -2 in x-Richtung um 3 in y-Richtung
$P_2 : y = x^{-3}$ $P_5 : y = (-x+3)^{-3} + 3 = (-1(x-3))^{-3} + 3$
Verschiebung um 3 in x-Richtung und um 3 in y-Richtung
Spiegelung an der y-Achse
$P_3 : y = x^{-5}$ $P_6 : y = 0,2 * x^{-5} - 3$
Streckung um -3 in y-Richtung und Stauchung um 0,2 in y-Richtung

Definitions- und Wertebereich

$y = x^{-n}$ $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $\mathbb{W} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
$y = a(b(x-c))^{-n} + d$
$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{c\}$ $\mathbb{W} = \mathbb{R} \setminus \{d\}$

$P_1 : y = x^{-1}$ $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $\mathbb{W} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
$P_4 : y = (x+2)^{-1} + 3$ $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ $\mathbb{W} = \mathbb{R} \setminus \{3\}$
$P_6 : y = 0,2 * x^{-5} - 3$ $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $\mathbb{W} = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$

Asymptoten

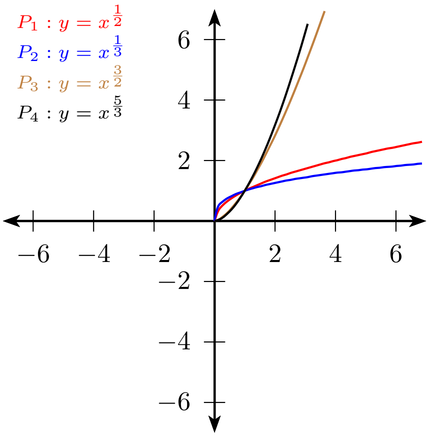
$y = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$
Horizontale Asymptote (HA): $y = 0$
Vertikale Asymptote (VA): $x = 0$
$y = a(b(x-c))^{-n} + d$
Horizontale Asymptote: $y = d$
Vertikale Asymptote: $x = c$

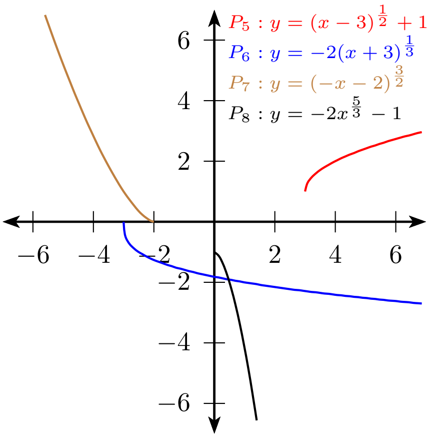
$P_1 : y = x^{-1}$ HA: $y = 0$ VA: $x = 0$
$P_4 : y = (x+2)^{-1} + 3$ HA: $y = 3$ VA: $x = -2$

$P_6 : y = 0,2 * x^{-5} - 3$ HA: $y = -3$ VA: $x = 0$

Interaktive Inhalte: Graph (JS) - Graph -

3.5.5 Wurzelfunktion - rationaler, positiver Exponent





Formen der Wurzelfunktion - positiver Exponent

Quadratwurzelfuktion: $y = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x} \qquad x > 0$

Grundfunktion: $y = x^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{x^n} \qquad x > 0$

Funktion mit Formvariablen:

$y = a(x-c)^{\frac{n}{m}} + d = a\sqrt[m]{(x-c)^n} + d \qquad x - c > 0$

$y = a(b(x-c))^{\frac{n}{m}} + d = a\sqrt[m]{(b(x-c))^n} + d \qquad b(x-c) > 0$

$P_1 : y = x^{\frac{1}{2}} \qquad P_5 : y = (x-3)^{\frac{1}{2}} + 1$
Verschiebung um 3 in x-Richtung und um 1 in y-Richtung
$P_2 : y = x^{\frac{1}{3}} \qquad P_6 : y = -2(x+3)^{\frac{1}{3}}$
Verschiebung um -3 in x-Richtung und Streckung um -2 in y-Richtung
$P_3 : y = x^{\frac{3}{2}} \qquad P_7 : y = (-x-2)^{\frac{3}{2}} = (-(x+2))^{\frac{3}{2}}$
Verschiebung um -2 in x-Richtung und Spiegelung an der y-Achse
$P_4 : y = x^{\frac{5}{3}} \qquad P_8 : y = -2x^{\frac{5}{3}} - 1$
Verschiebung um -1 in y-Richtung und Streckung um -2 in y-Richtung

Definitions- und Wertebereich

$y = x^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{x^n} \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R}_0^+ \qquad \mathbb{W} = \mathbb{R}_0^+$

$y = a(b(x-c))^{\frac{n}{m}} + d = a\sqrt[m]{(b(x-c))^n} + d$

$b > 0 \quad \mathbb{D} = [c; \infty[$

$b < 0 \quad \mathbb{D} =]-\infty; c]$

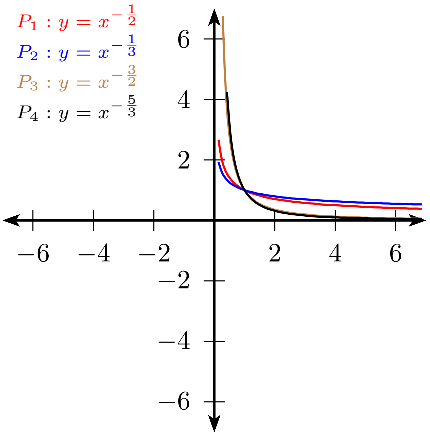
$a > 0 \quad \mathbb{W} = [d; \infty[$

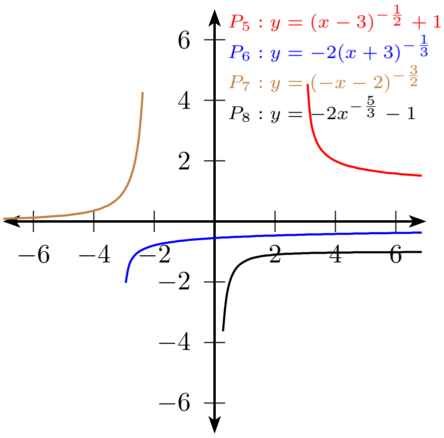
$a < 0 \quad \mathbb{W} =]-\infty; d]$

$P_2 : y = x^{\frac{1}{3}} \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R}_0^+ \qquad \mathbb{W} = \mathbb{R}_0^+$
$P_5 : y = (x-3)^{\frac{1}{2}} + 1 \qquad \mathbb{D} = [3; \infty[\quad \mathbb{W} = [1; \infty[$
$P_8 : y = -2x^{\frac{5}{3}} - 1 \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R}_0^+ \quad \mathbb{W} =]-\infty; -1]$

Interaktive Inhalte: Graph (JS) - Graph -

3.5.6 Wurzelfunktion - rationaler, negativer Exponent





Formen der Wurzelfunktion - negativer Exponent

$y = x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x}} \qquad x > 0$

Grundfunktion: $y = x^{-\frac{n}{m}} = \frac{1}{\sqrt[m]{x^n}} \qquad x > 0$

Funktion mit Formvariablen: $y = a(x-c)^{-\frac{n}{m}} + d = \frac{a}{\sqrt[m]{(x-c)^n}} + d \qquad x - c > 0$

$y = a(b(x-c))^{-\frac{n}{m}} + d = a\frac{1}{\sqrt[m]{(b(x-c))^n}} + d \qquad b(x-c) > 0$

$P_1 : y = x^{-\frac{1}{2}} \qquad P_5 : y = (x-3)^{-\frac{1}{2}} + 1$
Verschiebung um 3 in x-Richtung und um 1 in y-Richtung
$P_2 : y = x^{-\frac{1}{3}} \qquad P_6 : y = -2(x+3)^{-\frac{1}{3}}$
Verschiebung um -3 in x-Richtung und Streckung um -2 in y-Richtung
$P_3 : y = x^{-\frac{3}{2}} \qquad P_7 : y = (-x-2)^{\frac{3}{2}} = (-(x+2))^{-\frac{3}{2}}$
Verschiebung um -2 in x-Richtung und Spiegelung an der y-Achse
$P_4 : y = x^{-\frac{5}{3}} \qquad P_8 : y = -2x^{-\frac{5}{3}} - 1$
Verschiebung um -1 in y-Richtung und Streckung um -2 in y-Richtung

Definitions- und Wertebereich

$y = x^{-\frac{n}{m}} = \frac{1}{\sqrt[m]{x^n}}$

$\mathbb{D} = \mathbb{R}^+ \qquad \mathbb{W} = \mathbb{R}^+$

$y = a(b(x-c))^{-\frac{n}{m}} + d = \frac{a}{\sqrt[m]{(b(x-c))^n}} + d$

$b > 0 \quad \mathbb{D} =]c;\infty[$

$b < 0 \quad \mathbb{D} =]-\infty;c[$

$a > 0 \quad \mathbb{W} =]d;\infty[$

$a < 0 \quad \mathbb{W} =]-\infty;d[$

$P_2 : y = x^{-\frac{1}{3}} \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R}^+ \qquad \mathbb{W} = \mathbb{R}^+$
$P_5 : y = (x-3)^{-\frac{1}{2}} + 1 \qquad \mathbb{D} =]3;\infty[\quad \mathbb{W} =]1;\infty[$
$P_8 : y = -2x^{-\frac{5}{3}} - 1 \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R}^+ \quad \mathbb{W} =]-\infty;-1[$

Asymptoten

$y = x^{-\frac{n}{m}} = \frac{1}{\sqrt[m]{x^n}}$

Horizontale Asymptote (HA): $y = 0$

Vertikale Asymptote (VA): $x = 0$

$y = a(b(x-c))^{-\frac{n}{m}} + d = \frac{a}{\sqrt[m]{(b(x-c))^n}} + d$

Horizontale Asymptote: $y = d$

Vertikale Asymptote: $x = c$

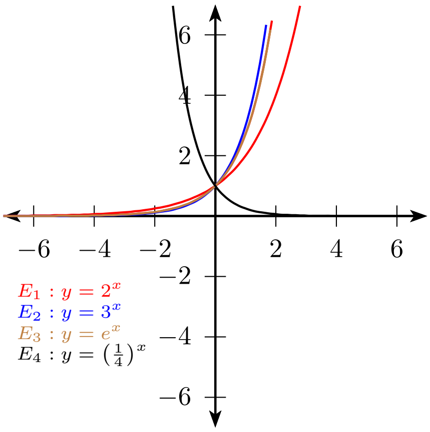
[$P_2 : y = x^{-\frac{1}{3}} \qquad$ HA: $y = 0 \qquad$ VA: $x = 0$
$P_5 : y = (x-3)^{-\frac{1}{2}} + 1 \qquad$ HA: $y = -1 \qquad$ VA: $x = 3$

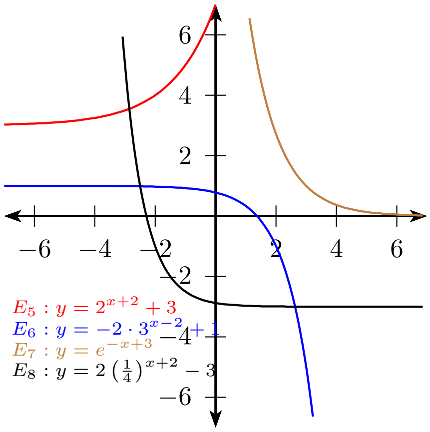
$P_8 : y = -2x^{-\frac{5}{3}} - 1 \qquad$ HA: $y = -1 \qquad$ VA: $x = 0$

Interaktive Inhalte: Graph (JS) - Graph -

3.6 Exponentialfunktion

3.6.1 Graph und Eigenschaften





Formen der Exponentialfunktion

Grundfunktion: $y = q^x \qquad q > 0$

Funktion mit Formvariablen:

$y = a \cdot q^{(x-c)} + d \qquad q > 0$

$y = a \cdot q^{b(x-c)} + d \qquad q > 0$

Funktionen mit der Basis: e = 2,718..

Grundfunktion: $y = e^x$

Funktion mit Formvariablen:

$y = a \cdot e^{(x-c)} + d$

$y = a \cdot e^{b(x-c)} + d$

$E_1 : y = 2^x \qquad E_5 : y = 2^{x+2} + 3$
Verschiebung um -2 in x-Richtung und um 3 in y-Richtung
$E_2 : y = 3^x \qquad E_6 : y = -2 \cdot 3^{x-2} + 1$
Verschiebung um 2 in x-Richtung und um 1 in y-Richtung
Streckung um -2 in y-Richtung
$E_3 : y = e^x \qquad E_7 : y = e^{-x+3} = e^{-(x-3)}$
Verschiebung um 3 in x-Richtung und Spiegelung an der y-Achse
$E_4 : y = \left(\frac{1}{4}\right)^x = 4^{-x} \qquad E_8 : y = 2\left(\frac{1}{4}\right)^{x+2} - 3$
Verschiebung um -2 in x-Richtung und um -3 in y-Richtung
Streckung um 2 in y-Richtung

Definitions- und Wertebereich

$y = e^x \qquad y = q^x$

$\mathbb{D} = \mathbb{R} \qquad \mathbb{W} = \mathbb{R}^+$

$y = a \cdot q^{b(x-c)} + d \qquad y = a \cdot e^{b(x-c)} + d$

$\mathbb{D} = \mathbb{R}$

$a > 0 \qquad \mathbb{W} =]d; \infty[$

$a < 0 \qquad \mathbb{W} =]-\infty; d[$

$E_1 : y = 2^x \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R} \qquad \mathbb{W} = \mathbb{R}^+$
$E_4 : y = \left(\frac{1}{4}\right)^x \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R} \qquad \mathbb{W} = \mathbb{R}^+$
$E_5 : y = 2^{x+2} + 3 \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R} \qquad \mathbb{W} =]3; \infty[$
$E_6 : y = -2 \cdot 3^{x-2} + 1 \quad \mathbb{D} = \mathbb{R} \qquad \mathbb{W} =]-\infty; 1[$
$E_8 : y = 2\left(\frac{1}{4}\right)^{x+2} - 3 \quad \mathbb{D} = \mathbb{R} \qquad \mathbb{W} =]-3; \infty[$

Asymptoten

$y = e^x \qquad y = q^x$

Horizontale Asymptote (HA): $y = 0$

$y = a \cdot q^{b(x-c)} + d \qquad y = a \cdot e^{b(x-c)} + d$

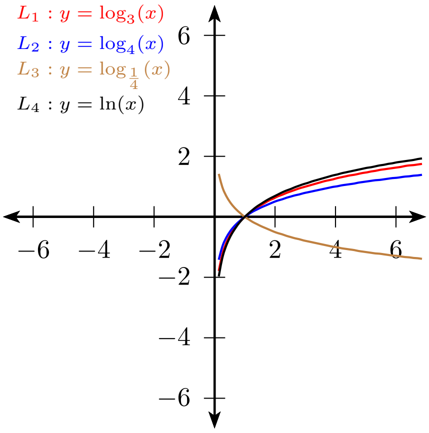
Horizontale Asymptote: $y = d$

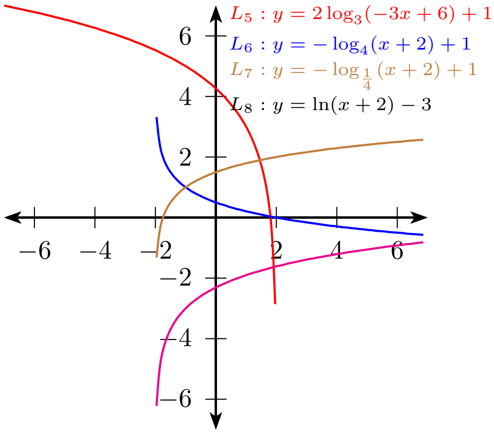
[$E_1 : y = 2^x \qquad$ HA: $y = 0$
$E_5 : y = 2^{x+2} + 3 \qquad$ HA: $y = 3$
$E_8 : y = 2\left(\frac{1}{4}\right)^{x+2} - 3 \qquad$ HA: $y = -3$

Interaktive Inhalte: Graph (JS) - Graph -

3.7 Logarithmusfunktion

3.7.1 Graph und Eigenschaften





Formen der Logarithmusfunktion

Grundfunktion: $y = \log_q x \qquad q > 0$

Funktion mit Formvariablen:

$y = a\log_q(x-c)+d \qquad -\frac{d}{c} > 0$

$y = a\log_q(b(x-c))+d$

Funktionen mit der Basis: e = 2,718..

Grundfunktion: $y = \ln x$

Funktion mit Formvariablen:

$y = a\ln(x-c)+d$

$y = a\ln(b(x-c))+d$

$L_1 : y = \log_3(x) \qquad L_5 : y = 2\log_3(-3x+6)+1 = 2\log_3(-3(x-2))+1$
Verschiebung um 2 in x-Richtung und um 1 in y-Richtung
Streckung um 2 in y-Richtung und um -3 in x-Richtung
$L_2 : y = \log_4(x) \qquad L_6 : y = -\log_4(x+2)+1$
Verschiebung um -2 in x-Richtung und um 1 in y-Richtung
Spiegelung an der x-Achse
$L_3 : y = \log_{\frac{1}{4}}(x) \qquad L_7 : y = -\log_{\frac{1}{4}}(x+2)+1$
Verschiebung um -2 in x-Richtung und um 1 in y-Richtung
Spiegelung an der x-Achse
$L_4 : y = \ln(x) \qquad L_8 : y = \ln(x+2)-3$
Verschiebung um -2 in x-Richtung und um -3 in y-Richtung

Definitions- und Wertebereich

$y = \log_q x \qquad y = \ln x \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R}^+ \qquad \mathbb{W} = \mathbb{R}$

$y = a\log_q(b(x-c))+d \qquad y = a\ln(b(x-c))+d$

Definitionsbereich: $b(x-c) > 0$

$b > 0 \qquad \mathbb{D} =]c;\infty[$

$b < 0 \qquad \mathbb{D} =]-\infty;c[$

$\mathbb{W} = \mathbb{R}$

$L_5 : y = 2\log_3(-3x+6) \qquad \mathbb{D} =]-\infty;2[\qquad \mathbb{W} = \mathbb{R}$
$L_6 : y = -\log_4(x+2)+1 \qquad \mathbb{D} =]-2;\infty[\qquad \mathbb{W} = \mathbb{R}$
$L_8 : y = \ln(x+2)-3 \qquad \mathbb{D} =]-2;\infty[\qquad \mathbb{W} = \mathbb{R}$

Asymptoten

$y = \log_q x \qquad y = \ln x$

Vertikale Asymptote (VA): $x = 0$

$y = a\log_q(b(x-c))+d \qquad y = a\ln(b(x-c))+d$

Vertikale Asymptote: $x = c$

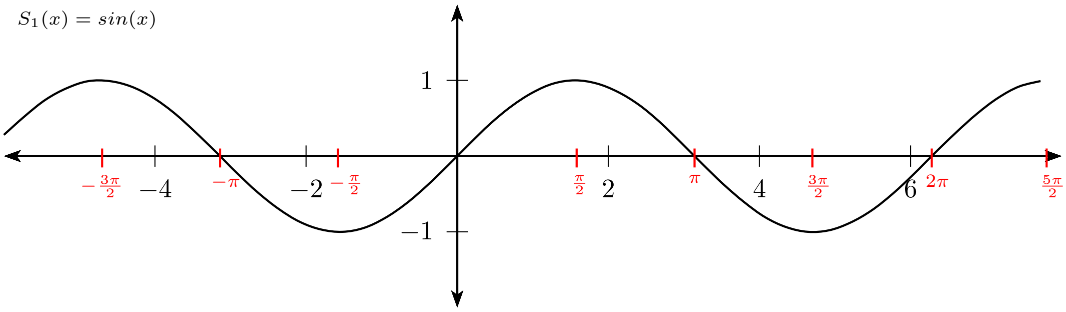
[$L_5 : y = 2\log_3(-3x+6)$ VA: $x = 2$
$L_6 : y = -\log_4(x+2)+1$ VA: $x = -2$

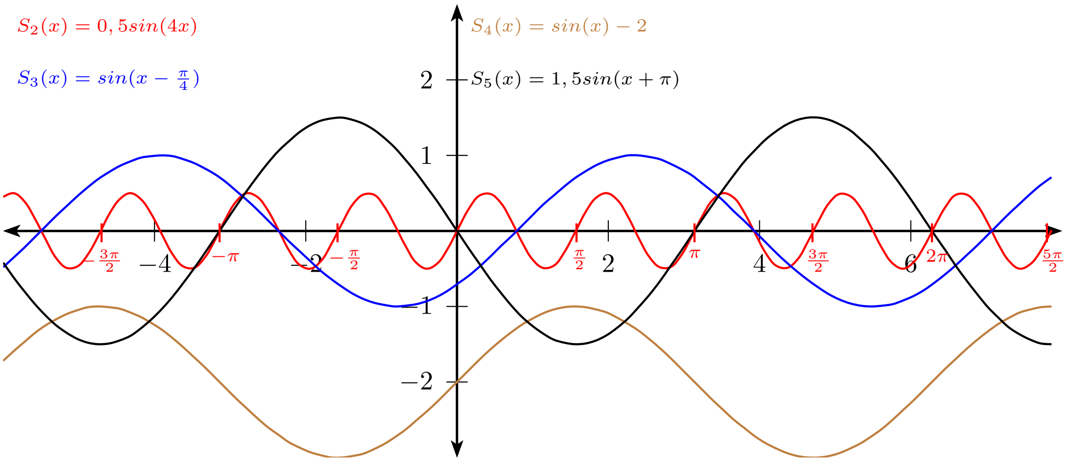
$L_8 : y = \ln(x+2)-3$ VA: $x = -2$

Interaktive Inhalte: Graph (JS) - Graph -

3.8 Sinusfunktion

3.8.1 Graph und Eigenschaften





Formen der Sinusfunktion

Grundfunktion: $f(x) = \sin x$

Amplitude: 1 Periode: 2π

Funktion mit Formvariablen:

$f(x) = a\sin(x - c) + d$

$f(x) = a\sin(b(x - c) + d$

Amplitude: $|a|$ Periode: $\frac{2\pi}{b}$

$S_1(x) = \sin(x)$ $S_2(x) = 0,5sin(4x)$
Stauchung um $0,5$ in y-Richtung und $\frac{1}{4}$ in x-Richtung
Amplitude: $0,5$ Periode: $\frac{2\pi}{4}$
$S_1(x) = \sin(x)$ $S_3(x) = sin(x - \frac{\pi}{4})$
Verschiebung um $\frac{\pi}{4}$ in x-Richtung
Amplitude: 1 Periode: 2π
$S_1(x) = \sin(x)$ $S_4(x) = sin(x) - 2$
Verschiebung um -2 in y-Richtung
Amplitude: 1 Periode: 2π
$S_1(x) = \sin(x)$ $S_5(x) = 1,5sin(x + \pi)$
Verschiebung um $-\pi$ in x-Richtung und Streckung um 1,5 in y-Richtung
Amplitude: 1 Periode: 2π

Definitions- und Wertebereich

$f(x) = \sin(x)$

$\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} = [1; -1]$

$f(x) = a\sin(b(x - c)) + d$

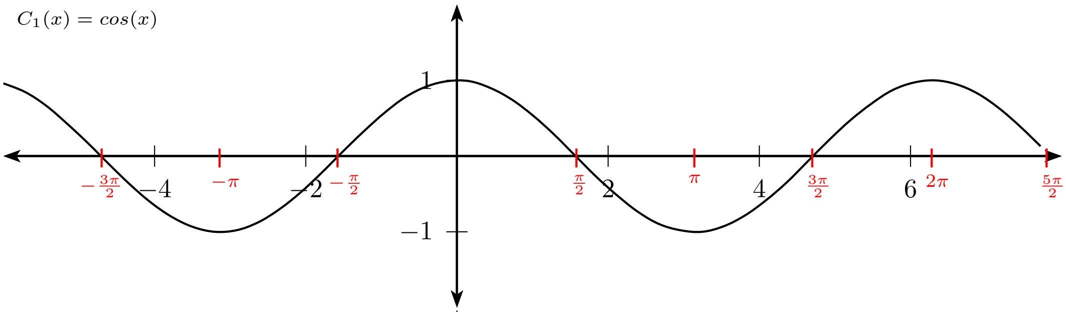
$\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} = [d - a; d + a]$

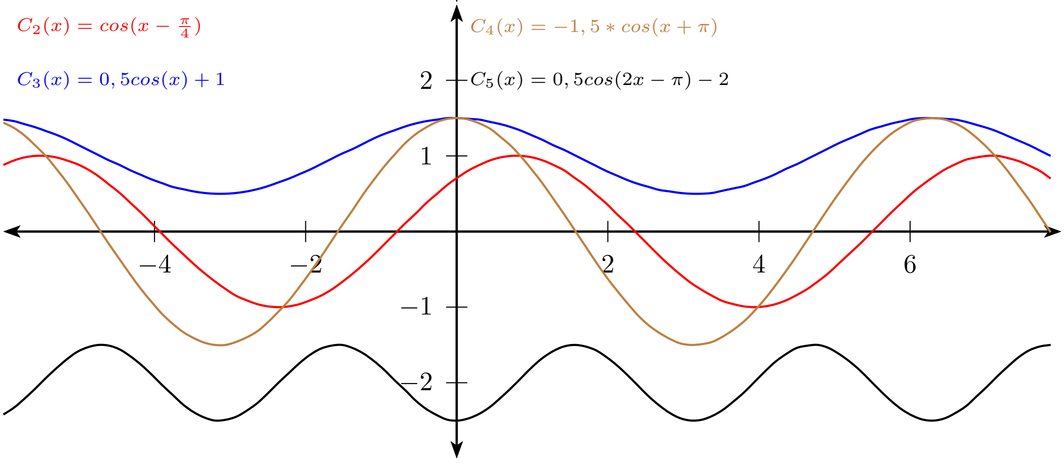
$S_2(x) = 0,5sin(4x)$ $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} = [-0,5; +0,5]$
$S_3(x) = sin(x - \frac{\pi}{4})$ $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} = [-1; 1]$
$S_4(x) = sin(x) - 2$ $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} = [-1; -3]$

Interaktive Inhalte: Graph (JS) - Graph -

3.9 Kosinusfunktion

3.9.1 Graph und Eigenschaften





Formen der Kosinusfunktion

Grundfunktion: $f(x) = \cos x$

Amplitude: 1 Periode: 2π

Funktion mit Formvariablen:

$f(x) = a\cos(x - c) + d$

$f(x) = a\cos(b(x - c)) + d$

Amplitude: $|a|$ Periode: $\frac{2\pi}{b}$

$C_1(x) = \cos(x)$ $C_2(x) = cos(x - \frac{\pi}{4})$
Verschiebung um $\frac{\pi}{4}$ in x-Richtung
Amplitude: 1 Periode: 2π
$C_1(x) = \cos(x)$ $C_3(x) = 0,5cos(x) + 1$
Verschiebung um 1 in y-Richtung und Stauchung um 0,5 in y-Richtung
Amplitude: $0,5$ Periode: 2π
$C_1(x) = \cos(x)$ $C_4(x) = -1,5 * cos(x + \pi)$
Verschiebung um $-\pi$in x-Richtung
Amplitude: $1,5$ Periode: 2π
$C_1(x) = \cos(x)$ $C_5(x) = 0,5cos(2x - \pi) - 2 = 0,5cos(2(x - \frac{\pi}{2})) - 2$
Verschiebung um $\frac{\pi}{2}$ in x-Richtung und Streckung um 0,5 in y-Richtung
Amplitude: $0,5$ Periode: Periode: $\frac{2\pi}{2}$

Definitions- und Wertebereich

$f(x) = \cos(x)$

$\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} = [1; -1]$

$f(x) = a\cos(b(x - c) + d$

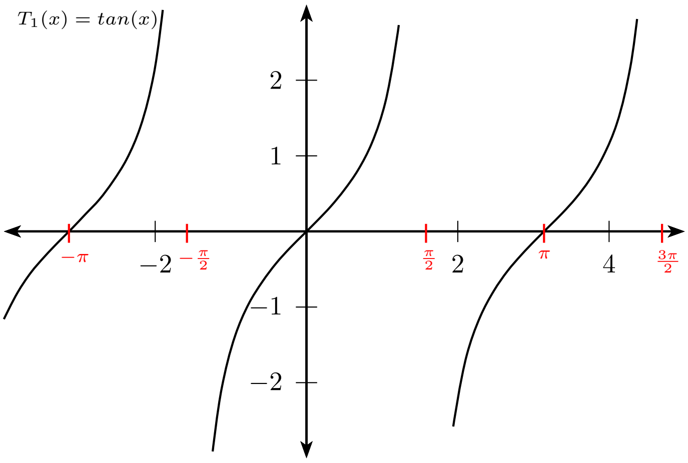
$\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} = [d - a; d + a]$

$C_2(x) = cos(x - \frac{\pi}{4})$ $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} = [-1; 1]$
$C_3(x) = 0,5cos(x) + 1$ $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} = [-0,5; +0,5]$
$C_5(x) = 0,5cos(2x - \pi) - 2$ $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} = [-1,5; -2,5]$

Interaktive Inhalte: Graph (JS) - Graph -

3.10 Tangensfunktion

3.10.1 Graph und Eigenschaften



Formen der Tangenfunktion

Grundfunktion: $f(x) = \tan x$

Periode: π

Funktion mit Formvariablen:

$f(x) = a \tan(x - c) + d$

$f(x) = a \tan(b(x - c)) + d$

Periode: $\frac{\pi}{b}$

Definitions- und Wertebereich

$f(x) = \tan x$

$\mathbb{D} = \mathbb{R}\backslash\{k \cdot \frac{\pi}{2}\} \qquad \mathbb{W} = \mathbb{R} \qquad k \in \mathbb{Z}$

$f(x) = a \tan b(x + c) + d$

$b(x - c) = k\frac{\pi}{2}$

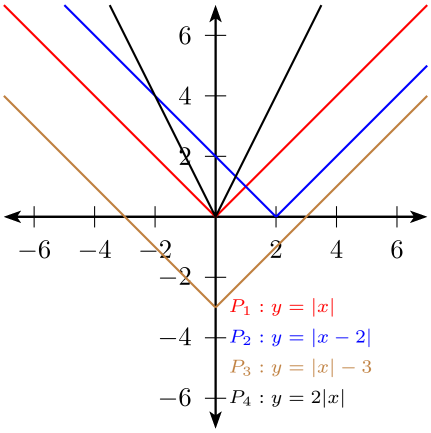
$x = \frac{k\pi}{2b} + c$

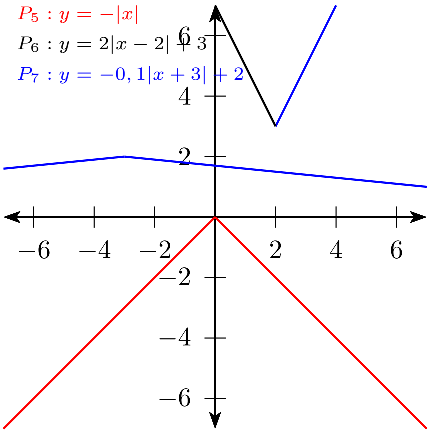
$\mathbb{D} = \mathbb{R}\backslash\{\frac{k\pi}{2b} + c\} \qquad \mathbb{W} = \mathbb{R} \qquad k \in \mathbb{Z}$

Interaktive Inhalte: Graph (JS) - Graph -

3.11 Betragsfunktion

3.11.1 Graph und Eigenschaften





Formen der Betragsfunktion

• Aufspalten der Beträge in einzelne Intervalle.
Betragsstriche sind nicht nötig, wenn der Term des Betrags positiv ist.
Betragsstriche sind nicht nötig, wenn der Term des Betrags negativ ist und dafür zusätzlich ein Minuszeichen vor dem Term geschrieben wird.
Grundfunktion:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & x > 0 \\ -x & x < 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Funktion mit Formvariablen:

$$f(x) = a|b(x-c)| + d = \begin{cases} a(b(x-c)) + d & x > c \\ -a(b(x-c)) + d & x < c \\ d & x = c \end{cases}$$

$$P_6 : y = 2|x-2| + 3 = \begin{cases} 2(x-2)+3 & x > 2 \\ -2(x-2)+3 & x < 2 \\ 3 & x = 2 \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} 2x-1 & x > 2 \\ -2x+7 & x < 2 \\ 3 & x = 2 \end{cases}$$

Definitions- und Wertebereich

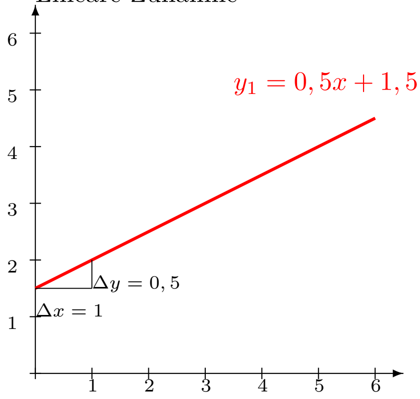
$f(x) = |x|$
$\mathbb{D} = \mathbb{R} \qquad \mathbb{W} = \mathbb{R}_0^+$
$f(x) = a|b(x-c)| + d \ \mathbb{D} = \mathbb{R}$
$a > 0 \quad \mathbb{W} = [d; \infty[$
$a < 0 \quad \mathbb{W} =]-\infty; d]$

Interaktive Inhalte: Graph (JS) - Graph -

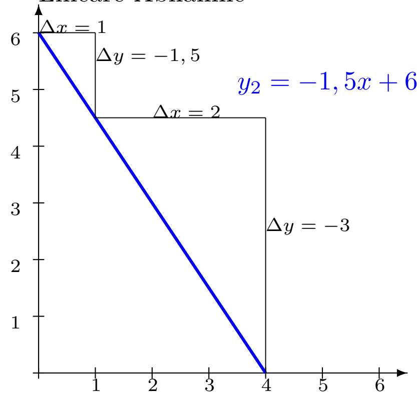
3.12 Wachstumsfunktionen

3.12.1 Lineares Wachstum

Lineare Zunahme



Lineare Abnahme



• Zum Anfangswert t wird pro Zeiteinheit der gleiche Wert m addiert oder subtrahiert.

• Lineare Funktion: $y = m \cdot x + t$

x - Zeit in Stunden, Minuten usw.

y - Funktionswert nach der Zeit x

t - Anfangswert

m - konstante Änderungsrate, Steigung

$m > 0$ positives lineares Wachstum (Zunahme)

$m < 0$ negatives lineares Wachstum (Abnahme)

$m = 0$ Nullwachstum

• Änderungsrate - Wachstumsgeschwindigkeit

$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

• Umformungen:$y = m \cdot x + t$

$x = \frac{y-t}{m}$ $t = y - m \cdot x$ $m = \frac{y-t}{x}$

• Schreibweisen

Funktion	Änderungsrate	Variable	Anfangswert
$y = m \cdot x + t$	m	x	t
$y = a \cdot x + b$	a	x	b
$y = a + b \cdot x$	b	x	a
$f(x) = a \cdot x + f_0$	a	x	f_0
$N(t) = a \cdot t + N_0$	a	t	N_0
$B(t) = k \cdot t + B_0$	a	x	B_0
$K(t) = q \cdot t + K_0$	q	t	K_0

Lineare Zunahme

Ein Wasserbecken entält 1,5 Liter Wasser. Pro Minute fließen 0,5 Liter zu.

x_1= Minuten y_1= Liter $t = 1,5$

x_1	0	1	2	3	4
y_1	$1,5$	$1,5 + 0,5$	$2 + 0,5$	$2,5 + 0,5$	$3 + 0,5$
y_1	$1,5$	2	$2,5$	3	$3,5$

$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2-1,5}{1-0} = \frac{0,5}{1} = 0,5$

$y = 0,5x + 1,5$

Lineare Abnahme

Ein Wasserbecken entält 6 Liter Wasser. Pro Minute fließen 1,5 Liter ab.

x_2= Minuten y_2= Liter

x_2	0	1	2	3	4
y_2	6	$6 - 1,5$	$4,5 - 1,5$	$3 - 1,5$	$1,5 - 1,5$
y_2	6	$4,5$	3	$1,5$	0

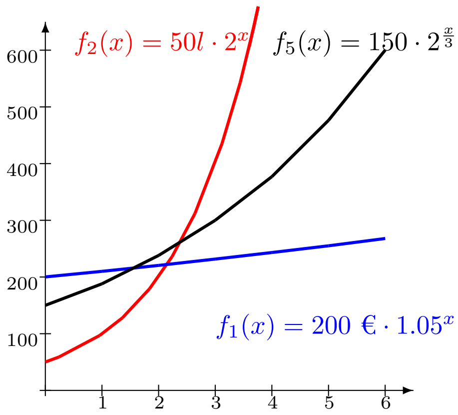
$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4,5-6}{1-0} = \frac{-1,5}{1} = -1,5$

$y = -1,5x + 6$

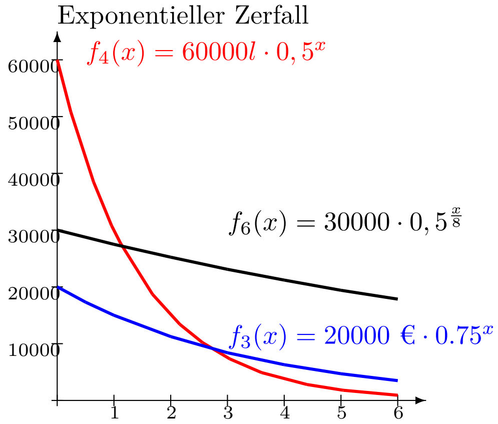
Interaktive Inhalte: Graph (JS) - Graph - Eigenschaften - $y = m \cdot x + t$ - $m = \frac{y-t}{x}$ - $x = \frac{y-t}{m}$ - $t = y - m \cdot x$ -

3.12.2 Exponentielles Wachstum

Exponentielles Wachstum



Exponentieller Zerfall



Wachstumsfaktor pro Zeiteinheit

• Der Anfangswert a wird pro Zeiteinheit mit den gleichen Faktor q multipliziert.

• Funktion: $f(x) = a \cdot q^x$

x - Zeit in Stunden, Minuten usw.

$y = f(x)$ - Funktionswert nach der Zeit x

a - Anfangswert

q - Wachstumsfaktor pro Zeiteinheit

$q > 1$ exponentielles Wachstum

$0 < q < 1$ exponentieller Zerfall

$q = 0$ Nullwachstum

•Prozentuale Zunahme p pro Zeiteinheit

$f(x) = a \cdot (1 + \frac{p}{100})^x = a \cdot q^x$

$q = 1 + \frac{p}{100}$ $\quad p = (q-1) \cdot 100$

•Prozentuale Abnahme p pro Zeiteinheit

$f(x) = a \cdot (1 - \frac{p}{100})^x = a \cdot q^x$

$q = 1 - \frac{p}{100}$ $\quad p = (1-q) \cdot 100$

• Lokale Änderungsrate - Wachstumsgeschwindigkeit

1.Ableitung: $f'(x) = a \cdot ln(q) \cdot q^x$

• Umformungen $y = f(x)$

$y = a \cdot q^x \quad a = \frac{y}{q^x} \quad x = log_q(\frac{y}{a}) \quad q = \sqrt[x]{\frac{y}{a}}$

• Schreibweisen

Funktion	Wachstumsfaktor	Variable	Anfangswert
$f(t) = a \cdot q^t$	q	t	a
$y = a \cdot b^x$	b	x	a
$y = b \cdot a^t$	a	t	b
$K(t) = K_0 \cdot q^t$	q	t	N_0
$N(t) = N_0 \cdot q^t$	q	t	N_0

Exponentielle Zunahme

Ein Kapital von 200 € wird mit 5 % (pro Jahr) verzinst.

x_1= Jahr $\quad y_1$=€ $\quad$ p=5 $\quad q = 1 + \frac{5}{100} = 1,05$ $\quad a = 200$ €

x_1	0	1	2	3	4
y_1	200	$200 \cdot 1,05$	$210 \cdot 1,05$	$220,5 \cdot 1,05$	$231,52 \cdot 1,05$
y_1	200	210	220,5	231,52	243,1

$f_1(x) = 200€ \cdot (1 + \frac{5}{100})^x$ $\quad f_1(x) = 200€ \cdot 1,05^x$

Kapital nach 10 Jahren: $f_1(10) = 200€ \cdot 1,05^{10} = 325,78€$

In jeder Minute verdoppelt sich die Wassermenge in einem Wasserbecken. Nach 4 Minuten enthält es 800 Liter Wasser.

$q = 2 \quad f(4) = 800$

Prozentuale Zunahme: $p = (2-1) \cdot 100\% = 100\%$

Anfangswert: $a = \frac{y}{q^x} = \frac{800}{2^4} = 50l$

$f_2(x) = 50€ \cdot 2^x$ $\quad f_2(x) = 50 \cdot (1 + \frac{100}{100})^x$

Exponentielle Abnahme

Ein Auto kostet 20000 €. Der Wertverlust beträgt 25 % pro Jahr. $\quad$ x= Jahre $\quad y_3$=€

x	0	1	2	3	4
y_3	20000	$20000 \cdot 0,75$	$25000 \cdot 0,75$	$11250 \cdot 0,5$	$8437,50 \cdot 0,75$
y_3	20000	25000	11250	8437,50	6328,12

$f_3(x) = 20000€ \cdot (1 - \frac{25}{100})^x$ $\quad f_3(x) = 20000€ \cdot 0,75^x$

Wann ist das Auto nur noch 1000 € Wert?

$x = log_q(\frac{y}{a}) = log_0,75(\frac{1000€}{20000€}) = 19,41$ Jahren

Ein Wasserbecken enthält 60000 Liter Wasser.

Pro Minute halbiert sich die Wassermenge.

x_4= Minuten $\quad y_4$= Liter

x_4	0	1	2	3	4
y_4	60000	$60000 \cdot 0,5$	$30000 \cdot 0,5$	$15000 \cdot 0,5$	$7500 \cdot 0,5$
y_4	60000	30000	15000	7500	3750

$f_4(x) = 60000l \cdot 0,5^x$ $\quad f_4(x) = 60000l \cdot (1 - \frac{50}{100})^x$

Wachstumsfaktor pro Periode

• Der Anfangswert a wird pro Periode mit den gleichen Faktor q multipliziert.

• Funktion: $f(x) = a \cdot q^{\frac{x}{T}}$

x - Zeit in Stunden, Minuten usw.

$y = f(x)$ - Funktionswert nach der Zeit x

a - Anfangswert

T - Periode, Zeitintervall

q - Wachstumsfaktor pro Periode

$q > 1$ exponentielles Wachstum

$0 < q < 1$ exponentieller Zerfall

$q = 0$ Nullwachstum

• Prozentuale Zunahme p pro Periode T

$f(x) = a \cdot (1 + \frac{p}{100})^{\frac{x}{T}}$

$q = 1 + \frac{p}{100}$ $\quad p = (q - 1) \cdot 100$

• Prozentuale Abnahme pro Periode T

$f(x) = a \cdot (1 - \frac{p}{100})^{\frac{x}{T}}$

$q = 1 - \frac{p}{100}$ $\quad p = (1 - q) \cdot 100$

• Umformungen $y = f(x)$

$y = a \cdot q^{\frac{x}{T}}$ $\quad a = \frac{y}{q^{\frac{x}{T}}}$ $\quad x = T \cdot log_q(\frac{y}{a})$ $\quad q = \sqrt[\frac{x}{T}]{\frac{y}{a}}$

Exponentielles Wachstum

Zu Beginn der Beobachtung sind 150 Bakterien vorhanden. Die Anzahl der Bakterien verdoppelt sich alle 3 Stunden.

q=2 T=3 $a = 150$

x_5= Stunden y_5=Anzahl der Bakterien

x_5	0	3	6	9	12
y_5	150	$150 \cdot 2$	$300 \cdot 2$	$600 \cdot 2$	$1200 \cdot 2$
y_1	150	300	600	1200	2400

$f_5(x) = 150 \cdot 2^{\frac{x}{3}}$

Anzahl der Bakterien nach 2 Stunden:

$f_5(2) = 150 \cdot 2^{\frac{2}{3}} = 238$

Jod 131 hat eine Halbwertszeit von 8 Tagen. Am Anfang sind 30000 Atome vorhanden.

q=0,5 T=8 $a = 30000$

x_6= Tage y_6= Anzahl der Atome

x_6	0	8	16	24	32
y_6	30000	$30000 \cdot 0,5$	$15000 \cdot 0,5$	$7500 \cdot 0,5$	$37500 \cdot 0,5$
y_6	30000	15000	7500	3750	1875

$f_6(x) = 30000 \cdot 0,5^{\frac{x}{8}}$ $\quad f_6(x) = 30000 \cdot (1 - \frac{50}{100})^{\frac{x}{8}}$

Wachstumskonstante und e-Funktion

•Funktion: $f(x) = a \cdot e^{k \cdot x}$
x - Zeit in Stunden, Minuten usw.
f(x) - Funktionswert nach der Zeit x
a - Anfangswert
k - Wachstumskonstante
$k > 0$ exponentielles Wachstum
$k < 0$ exponentieller Zerfall

• Wachstumsfaktor q pro Zeiteinheit
$f(x) = a \cdot q^x = a \cdot e^{ln(q^x)} = a \cdot e^{ln(q) \cdot x} = a \cdot e^{k \cdot x}$
$k = ln(q) \qquad q = e^k$

• Wachstumsfaktor q pro Periode T
$f(x) = a \cdot q^{\frac{x}{T}} = a \cdot e^{ln(q^{\frac{x}{T}})} = a \cdot e^{ln(q) \cdot \frac{x}{T}} = a \cdot e^{k \cdot x}$
$k = \frac{ln(q)}{T} \qquad q = e^{k \cdot T}$

• Lokale Änderungsrate - Wachstumsgeschwindigkeit
1.Ableitung: $f'(x) = a \cdot k \cdot e^{k \cdot x} = k \cdot f(x)$

• Umformungen $y = f(x)$
$$y = a \cdot e^{k \cdot x} \qquad a = \frac{y}{e^{k \cdot x}} \qquad x = \frac{ln(\frac{y}{a})}{k} \qquad k = \frac{ln(\frac{y}{a})}{x}$$

$f_1(x) = 200€ \cdot 1,05^x$
$k = ln(q) = ln(1,05) = 0,0488$
$f_1(x) = 200€ \cdot e^{ln(1,05)x} \qquad f_1(x) = 200€ \cdot e^{0,0488x}$
$f_1(10) = 200€ \cdot e^{ln(1,05)10} = 325,78$

$f_6(x) = 30000 \cdot 0,5^{\frac{x}{8}}$
$k = \frac{ln(q)}{T} = \frac{ln(0,5)}{8} = -0,087$
$f_6(x) = 30000 \cdot e^{\frac{ln(0,5)}{8}x} \qquad f_6(x) = 30000 \cdot e^{-0,087x}$

Interaktive Inhalte: $p = (q-1) \cdot 100$ - $q = 1 + \frac{p}{100}$ - $f(x) = a \cdot q^x$ - $a = \frac{f(x)}{q^x}$ - $x = log_q(\frac{y}{a})$ - $q = \sqrt[x]{\frac{y}{a}}$ -